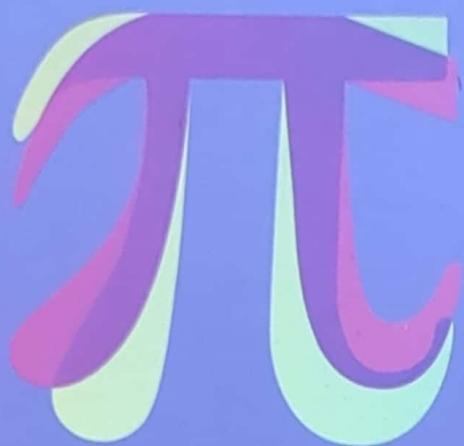




TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 3 - SỐ 3

THÁNG 3, 2019

Xin đừng cường điệu
BLOCKCHAIN

MỘT CÁCH TIẾP CẬN
CÁC BÀI TOÁN
ĐẾM SỐ LỚP
TƯƠNG ĐƯƠNG

ISSN 2525-2437

2 Thể lệ gửi bài, đặt báo

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

Xin đừng cường điệu công nghệ blockchain 3

Phạm Huy Điển

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

10 Một cách tiếp cận bài toán
đếm số lớp tương đương

Nguyễn Khắc Minh

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Các bài toán tính thể tích trong cuốn sách toán 19

Hán Nôm Đại thành Toán học chỉ mình

của Phạm Gia Kỳ

Nhiều tác giả

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

Nhiều tác giả

26 Thách thức kỳ này dành cho THCS

27 Thách thức kỳ này dành cho THPT

27 Giải bài kỳ trước

DIỄN ĐÀN DẠY VÀ HỌC TOÁN

Tìm tòi xung quanh một bài toán thi 44
Olympic Toán học của Brazil năm 2005

Lê Đức Hiếu

GÓC STEM

48 Nước và những điều chưa biết.

Kỳ 3. Giải thích các tính chất của nước

Nguyễn Hoàng Hải

QUÁN TOÁN

- 51 **Thêm đôi điều về hệ mật mã khóa công khai**

Hà Minh Thơ

- 55 **Dò tìm mật khẩu**

Phan Thanh Hồng

Nguyễn Thị Nhung

- 56 **Có bao nhiêu tam giác**

- 56 **Giải đáp bài "Cầu thang có bao nhiêu bậc"**

TRẠM THIÊN VĂN

- 57 **"Trăng quầng thì hạn, trăng tán thì mưa"**

Nguyễn Anh Tuấn

TOÁN CỦA BÌ

- 59 **Hướng dẫn giải các Sudoku phiên bản hình ảnh**

Lê Huy, Vũ Thị Hà

ĐỜI SỐNG TOÁN HỌC

- 64 **Gặp mặt đầu xuân Hội Toán học Việt Nam**

TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Toán của Bì giới thiệu cách giải các Sudoku đã ra ở Tập chí Pi tập 2, số 10, tháng 10.2018. Bì và các bé cùng học cách suy luận nhé! Trang 59.

Giải toán cùng bạn trong số này sẽ dành cho các bạn học sinh trung học phổ thông, và lớp cuối cấp THCS. Bài toán đếm số lớp tương đương, một chủ đề thú vị và quan trọng đối với học sinh giỏi toán. Các bạn học sinh hãy cố gắng đọc chậm và suy nghĩ nhé; để lĩnh hội kiến thức, nhiều khi cần phải có cả sự kiên trì. Trang 10.

Đặc biệt, ở **Diễn đàn dạy và học Toán** kỳ này, các bạn học sinh trung học phổ thông sẽ tìm thấy một chia sẻ của bạn Lê Đức Hiếu, học sinh lớp 11, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, về những tìm tòi xung quanh một bài toán thi Olympic Brazil 2015. Một cố gắng rất đáng khen ngợi của bạn Hiếu. Trang 44.

Quán Toán trong số này có bài viết về **Hệ mật mã khóa công khai RSA**, một ứng dụng thú vị và bất ngờ của các số nguyên tố. Nếu ai đó trêu hay đùa bạn rằng "Số học thì có ích gì?", thì bài viết này sẽ cho câu trả lời ngạc nhiên nhất cho câu hỏi đó. Trang 51.

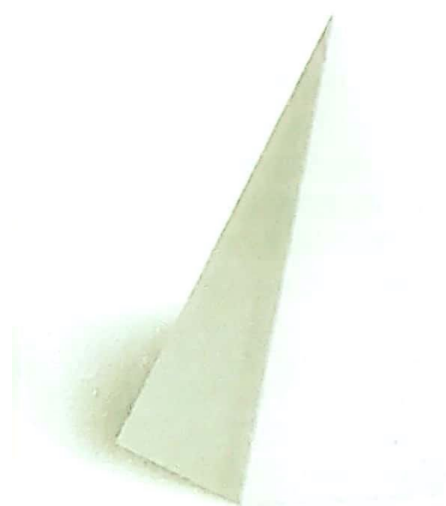
Cũng trong Quán Toán, cùng với một câu đố thách thức khả năng suy luận logic của các bạn học sinh phổ thông, là một câu hỏi tuy đơn giản, nhưng cho đến bây giờ người ta vẫn chưa có câu trả lời hoàn chỉnh cho câu hỏi đó. Hãy thử sức mình! Trang 55, 56.

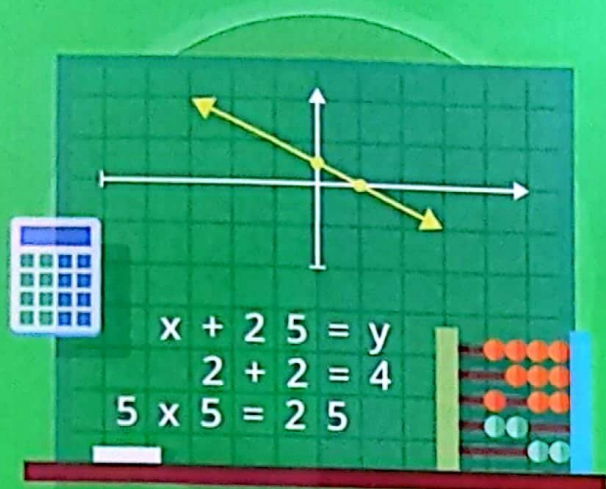
Mục Toán học và Đời sống đưa ra cảnh báo: đừng quá cường điệu vai trò của Blockchain! Trong khi Blockchain đang là một chủ đề rất nóng trong lĩnh vực Công nghệ Thông tin thì tác giả Phạm Huy Điển lại tỏ ra nghi ngờ về khả năng thực sự của nó. Trang 3.

Góc STEM có phần thứ ba bài viết về Nước. Tại sao nước đá lại nổi trong nước? Tại sao nước đổ không ướt được lá khoai? Câu trả lời có thể tìm thấy được trong bài viết này. Trang 48.

Trạm thiên văn sẽ giải thích cho độc giả ý nghĩa khoa học của nhận định dân gian "Trăng quầng thì hạn, Trăng tán thì mưa". Trang 57.

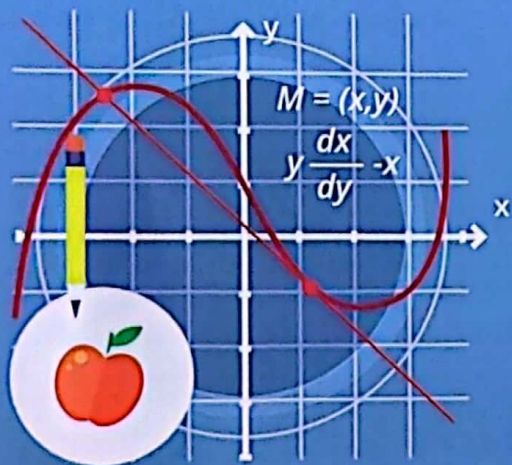
Lịch sử Toán học số này có bài giới thiệu hết sức thú vị về nội dung cuốn sách toán Hán-Nôm của tác giả Phạm Gia Kỳ. Bạn có biết các cụ nhà ta ngày xưa xấp xỉ Pi bằng mấy? Hãy tìm đọc. Trang 19.





THỂ LỆ GỬI BÀI:

- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán đề xuất, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, nơi học tập/công tác, email và số điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf. Chủ đề (subject) của email: Lời giải của bài nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì/hoặc không theo chuyên mục nào.
- Bản thảo có thể viết tay gửi qua bưu điện đến Tòa soạn.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: bbt@pi.edu.vn
- Qua bưu điện:

Tòa soạn Tạp chí Pi

P705 - B8, tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Số 1 Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.

THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại bưu điện gần nhất:** Tạp chí Pi được phát hành qua mạng lưới Bưu điện Việt Nam. Mã của ấn phẩm: C057 (có thể đặt các số báo đã ra). Hotline: 1800 585855.
- **Đặt tại website www.pi.edu.vn:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:**

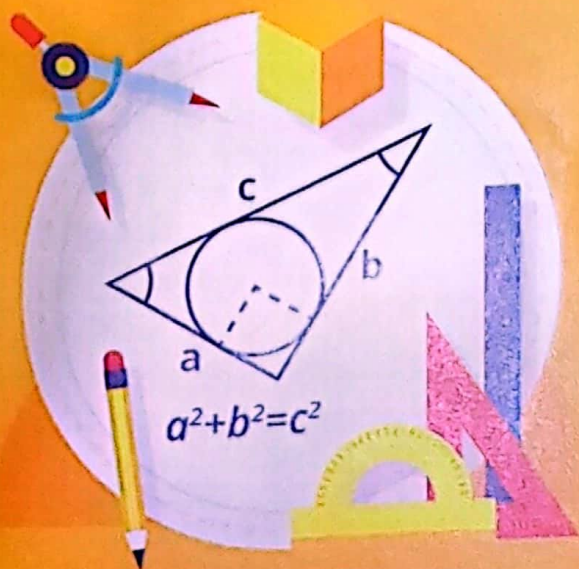
Gửi email đến địa chỉ info@pi.edu.vn nêu nhu cầu đặt báo, chi tiết người nhận báo (họ và tên, địa chỉ, điện thoại).

Chuyển tiền đặt báo vào Tài khoản Tạp chí Pi.

Tài khoản số: 0851000012293,

Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành

(trong nội dung chuyển tiền ghi rõ họ tên _ điện thoại người chuyển tiền).





Xin đừng cường điệu công nghệ Blockchain

Phạm Huy Điển

Thông thường, để có thể lôi cuốn được người đọc, khi viết bài giới thiệu về một công nghệ “thời thượng” thì người ta trước hết nói về những cái hay, những thể mạnh mang tính đột phá, và những ứng dụng mang đậm màu sắc “cách mạng 4.0” của công nghệ đó. Bản thân người viết bài này cũng đã định làm như vậy, như lời hứa trong câu cuối cùng của bài viết trước. Nhưng rồi những sự ồn ào gần đây liên quan công nghệ Blockchain đã khiến cho tác giả phải suy nghĩ lại.

Trong mấy năm vừa qua, với sự phát triển ấn tượng của nền kinh tế Bitcoin và một số ứng dụng độc đáo của công nghệ nền của nó trong nhiều lĩnh vực công nghiệp khác, cụm từ *blockchain* đã trở nên khá âm ỉ trên truyền thông. Người ta không ngại ngần gán cho nó rất nhiều điều có thể tưởng tượng ra được. Chẳng hạn, ở ta có người còn bảo rằng Blockchain là sản phẩm của cuộc cách mạng công nghiệp 4.0 trong lĩnh vực kinh tế (xem trong <https://chungta.vn/cong-nghe/blockchain-la-san-pham-cua-cach-mang-cong-nghe-4-0-trong-linh-vuc-kinh-te-1120030.html>), trong khi cả thiên hạ đều biết nó được sinh ra cùng với tiền mặt mã Bitcoin. Khó mà biết được người này say rượu hay là say màu “cách mạng 4.0” mà phát ngôn như vậy. Đâu đó người ta đang quảng cáo những lớp học

dạy về công nghệ Blockchain hấp dẫn đến mức tưởng như cứ học xong là có thể “làm ăn” ngay được (chả là có không ít công ty khởi nghiệp đang phát cao ngọn cờ Blockchain, cho nên nhu cầu về nhân lực ắt phải lớn!). Điều đáng nói là học phí cho các lớp học này không hề thấp, cho nên việc cân nhắc cũng là cần thiết. Ở đời, mọi nỗi thất vọng thường có cội nguồn là một niềm hy vọng nào đó, và “biên độ” của chúng cũng là tỷ lệ thuận với nhau, cho nên việc không “cường điệu hóa” một niềm hy vọng sẽ góp phần làm giảm biên độ của nỗi thất vọng liên quan (nếu có).

Cần phải nói ngay rằng những ứng dụng độc đáo của công nghệ Blockchain là có thật, và việc nắm bắt công nghệ này là việc nên làm, nhưng cần được làm với một cái đầu lạnh, không nóng vội và không ảo tưởng, để có sức mà đi xa và có thể vượt qua những khó khăn, thách thức mà công nghệ này đòi hỏi người ta phải đương đầu. Chính vì vậy, trước khi đề cập đến những gì mà công nghệ Blockchain có thể mang lại (như đã dự kiến trong bài viết trước), chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu về mặt sau của nó. Hay nói cho vui thì cùng đội nước nên đầu cho “mát”, trước khi tìm hiểu về một công nghệ “nóng”.

Sự cường điệu xung quanh blockchain là rất lớn, không chỉ ở bên ta mà ở cả bên Tây. Theo



như họ nói thì bây giờ Blockchain sẽ có thể: giải quyết bất bình đẳng thu nhập, làm cho tất cả dữ liệu được an toàn mãi mãi, làm cho mọi thứ hiệu quả hơn và không cần phải đặt lòng tin vào ai cả, cứu những em bé đang chết, v.v... và v.v... Có người không ngại nói về viễn cảnh công nghệ Blockchain “phá hủy” các ngành công nghiệp đương thời để thay mới cho hoàn mỹ hơn (xem trong <https://www.inc.com/nicolas-cole/blockchain-technology-is-set-to-disrupt-every-industry.html>).

Vậy thì Blockchain là cái chết tiệt gì thế này? Nó thực sự có thể làm tất cả những điều này sao? Liệu Blockchain có thể mang lại điều gì đó tuyệt vời cho các ngành công nghiệp đa dạng như chăm sóc sức khỏe, tài chính, quản lý chuỗi cung ứng, thu tiền bản quyền âm nhạc,... và thậm chí làm nên một chính phủ văn minh hay không?

Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm cách trả lời những câu hỏi này bằng cách xem xét blockchain là gì và, quan trọng hơn, những gì không phải là nó.

BLOCKCHAIN LÀ GÌ?

Như đã nói, để kiểm tra những tuyên bố nêu bên trên, chúng ta phải xác định blockchain là gì và ở đây có rất nhiều nhầm lẫn. Nhiều công ty sử dụng từ “blockchain” để chỉ một

loại thiết bị huyền diệu nào đó mà tất cả dữ liệu của họ sẽ không bao giờ sai. Một thiết bị như vậy, tất nhiên, không tồn tại, ít nhất là khi có liên quan đến thế giới thực.

Như ta đã biết qua bài viết trước, về mặt kỹ thuật, blockchain là một chuỗi các khối được liên kết và mỗi khối là một nhóm các giao dịch được sắp theo thứ tự. Điều chính yếu để phân biệt một blockchain với cơ sở dữ liệu thông thường là ở chỗ có các quy tắc cụ thể về cách đưa dữ liệu vào cơ sở dữ liệu. Nghĩa là, nó không thể xung đột với một số dữ liệu khác mà đã có trong cơ sở dữ liệu (tính nhất quán), nó là không thay đổi và dữ liệu được khóa móc với chủ sở hữu (có thể sở hữu được), có thể sao chép và luôn có sẵn. Cuối cùng, mọi người đều đồng thuận về trạng thái của những thứ trong cơ sở dữ liệu (tính hợp quy) mà không cần có một bên trung tâm nào “cầm trịch” (tính phi tập trung).

Cái điểm cuối cùng này thực sự là “chén thánh” của blockchain. Phi tập trung là rất hấp dẫn bởi vì nó ngụ ý không có một điểm nào “hổng” (thất bại). Đó cũng là, sẽ không có một cơ quan nào có thể lấy đi tài sản của bạn hoặc thay đổi “lịch sử” cho phù hợp với nhu cầu của họ. Con đường kiểm soát tính bất biến này, nơi mà bạn không cần phải tin tưởng bất cứ ai, là cái lợi ích mà tất cả mọi

người đang “chơi” với công nghệ này muốn tìm kiếm. Lợi ích này, tuy nhiên, đến với một chi phí lớn.

CÁI GIÁ CỦA BLOCKCHAIN

Việc phát triển là chặt chẽ hơn và chậm hơn

Việc tạo ra một hệ thống nhất quán có thể mình chứng được không phải là một nhiệm vụ dễ dàng. Một lỗi nhỏ có thể làm hỏng toàn bộ cơ sở dữ liệu hoặc khiến cho một số cơ sở dữ liệu trở nên khác với những cái khác. Tất nhiên, một cơ sở dữ liệu bị hỏng hoặc phân tách thì không còn có bất kỳ đảm bảo nào về tính nhất quán. Hơn nữa, tất cả các hệ thống như vậy phải được thiết kế ngay từ đầu là nhất quán. Khác với cơ sở dữ liệu không thường, không có “những cái di chuyển nhanh và phá vỡ” trong một blockchain. Nếu bạn phá vỡ cái gì đó, thì bạn sẽ mất đi tính nhất quán và blockchain trở thành ra hỏng và vô giá trị.

Có thể bạn đang nghĩ, tại sao ta không có thể sửa lỗi cơ sở dữ liệu hoặc bắt đầu lại và tiếp tục? Điều đó là đủ dễ dàng để làm trong một hệ thống tập trung, nhưng điều này rất khó trong một hệ thống phi tập trung. Ta cần đến sự đồng thuận, hoặc sự đồng ý của tất cả mọi người trong hệ thống, để thay đổi cơ sở dữ liệu. Blockchain phải là một tài nguyên công cộng mà không thuộc sự kiểm soát của một thực thể duy nhất (phi tập trung là như vậy, bạn nhớ không?). Vậy là, dốc toàn bộ nỗ lực là một cách rất tốn kém để tạo ra một cơ sở dữ liệu tập trung, chậm chạp.

Cấu trúc ưu đãi (khuyến khích) rất khó thiết kế

Việc thêm các cấu trúc khuyến khích phù hợp và đảm bảo rằng tất cả các tác nhân trong hệ thống không thể lạm dụng hoặc làm hỏng cơ sở dữ liệu cũng là một sự cân nhắc lớn. Một blockchain có thể là nhất quán, nhưng sẽ là không hữu ích lắm nếu như nó có nhiều dữ liệu phù phiếm, vô dụng bên trong vì chi phí đưa dữ liệu vào đó rất thấp. Điều gì mang lại tài chính cho dữ liệu? Làm thế nào bạn có thể đảm bảo rằng những phần thưởng được

gắn kết với các mục tiêu của mạng? Tại sao các nút giữ lại hoặc cập nhật dữ liệu, và điều gì khiến chúng chọn một phần dữ liệu thay cho phần khác khi chúng bị xung đột? Đây là những câu hỏi về sự ưu đãi (khuyến khích) mà cần có câu trả lời tốt và chúng cần được căn chỉnh không chỉ ngay từ đầu mà còn ở tất cả các thời điểm trong tương lai, khi công nghệ và các công ty thay đổi, nếu không thì blockchain là không hữu ích.

Một lần nữa, bạn có thể tự hỏi tại sao bạn không thể sửa chữa một số ưu đãi bị hỏng. Thì lại một lần nữa, điều này là dễ dàng trong một hệ thống tập trung, nhưng trong một hệ thống phi tập trung, bạn chỉ đơn giản là không thể thay đổi bất cứ điều gì mà không có sự đồng thuận. Ở đó, không có bản sửa lỗi nào khác, trừ khi có sự đồng ý của mọi người.

Việc duy trì là rất tốn kém

Một cơ sở dữ liệu tập trung truyền thống chỉ cần được ghi một lần. Một blockchain cần phải được ghi đến hàng ngàn lần. Một cơ sở dữ liệu tập trung truyền thống chỉ cần kiểm tra dữ liệu một lần. Một blockchain cần kiểm tra dữ liệu hàng ngàn lần. Một cơ sở dữ liệu tập trung truyền thống chỉ cần truyền dữ liệu để lưu trữ một lần. Một blockchain cần truyền dữ liệu hàng ngàn lần. Các chi phí để duy trì một blockchain có bậc biên độ cao hơn và chi phí cần phải được chứng tỏ bằng tiện ích. Hầu hết các ứng dụng tìm kiếm một số thuộc tính được nêu trước đó như tính nhất quán và độ tin cậy có thể có được những thứ như vậy với giá rẻ hơn rất nhiều khi sử dụng kiểm tra tính toàn vẹn, biên lai và sao lưu.

Người dùng là có chủ quyền

Điều này có thể thực sự tốt khi các công ty không thích trách nhiệm pháp lý về việc có dữ liệu người dùng ngay từ đầu. Tuy nhiên, điều này có thể là không tốt, nếu như người dùng có hành vi sai trái. Không có cách nào để mà loại bỏ cái người dùng mà “xả rác” trên blockchain của bạn với những dữ liệu phù phiếm hoặc là tìm ra cách để kiếm được lợi nhuận thông qua một số kiểu gây ra nhiều bất

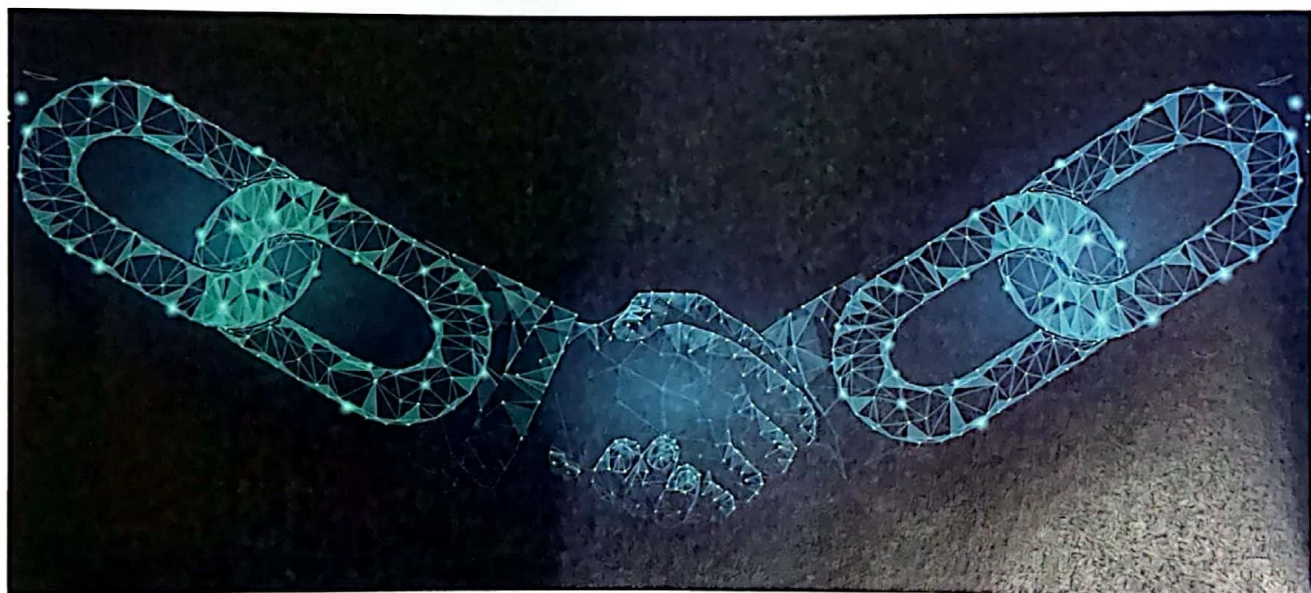
tiện cho những người dùng khác. Điều này có liên quan đến những vấn đề đã nói ở trên rằng các cấu trúc ưu đãi (khuyến khích) phải được thiết kế thực sự tốt sao cho một người dùng tìm ra cách khai thác không thích từ bỏ điều đó, đặc biệt là nếu có lợi nhuận cho người dùng này.

Bạn nghĩ rằng bạn có thể từ chối dịch vụ với người dùng độc hại một cách đơn giản, điều này sẽ rất dễ thực hiện trong một dịch vụ tập trung. Tuy nhiên, không giống như một dịch vụ tập trung, việc từ chối dịch vụ ở đây là khó khăn vì không một thực thể nào có quyền loại bỏ bất kỳ ai. Blockchain phải vô tư và tuân thủ các quy tắc được xác định bởi phần mềm. Nếu các quy tắc không đủ để ngăn chặn hành

vi xấu, bạn sẽ không gặp may. Ở đây không có cái “tinh thần” của pháp luật. Bạn chỉ đơn giản là sẽ phải đối phó với các tác nhân độc hại hoặc sai trái, có thể trong một thời gian rất dài.

Tất cả các nâng cấp là tự nguyện

Buộc nâng cấp không phải là một lựa chọn. Những người chơi khác trên mạng không có nghĩa vụ phải thay đổi phần mềm của bạn. Nếu họ làm như thế, một hệ thống như vậy sẽ dễ dàng hơn nhiều, nhanh hơn và rẻ hơn để xây dựng, như một hệ thống tập trung. Điểm quan trọng của blockchain là nó không thuộc quyền kiểm soát của một thực thể duy nhất và điều này xem như bị vi phạm ta buộc nâng cấp.



Thay vào đó, tất cả các nâng cấp phải tương thích ngược. Điều này rõ ràng là khá khó khăn, đặc biệt nếu bạn muốn thêm các tính năng mới và thậm chí khó hơn khi suy nghĩ từ góc độ thử nghiệm. Mỗi phiên bản của phần mềm thêm rất nhiều vào ma trận thử nghiệm và kéo dài thời gian phát hành.

Một lần nữa, nếu đây là một hệ thống tập trung, điều này sẽ rất dễ sửa nếu không còn phục vụ các hệ thống cũ. Tuy nhiên, bạn không thể làm điều này trong một hệ thống phi tập trung vì bạn không thể ép buộc bất cứ ai làm bất cứ điều gì.

Mở rộng là thực sự khó

Cuối cùng, việc mở rộng cũng ít nhất là vài bậc biên độ khó hơn trong một hệ thống tập trung truyền thống. Lý do là rõ ràng. Cùng một dữ liệu phải tồn tại ở hàng trăm hoặc hàng ngàn nơi, thay vì là ở một nơi duy nhất. Chi phí truyền tải, xác minh và lưu trữ là rất lớn vì mỗi bản sao của cơ sở dữ liệu đều phải trả chi phí đó, thay vì việc nó chỉ cần được trả một lần trong cơ sở dữ liệu tập trung, truyền thống.

Tất nhiên, bạn có thể giảm gánh nặng bằng cách giảm số lượng nút. Nhưng thế thì ở điểm

này, tại sao bạn cần một hệ thống phi tập trung? Tại sao không chỉ tạo một cơ sở dữ liệu tập trung nếu như chi phí mở rộng là mối quan tâm chính?

TẬP TRUNG LÀ DỄ DÀNG HƠN NHIỀU

Ai cũng biết là các hệ thống phi tập trung rất khó để làm việc, tốn kém để duy trì, khó nâng cấp và gây khó khăn cho mở rộng quy mô. Một cơ sở dữ liệu tập trung sẽ là nhanh hơn nhiều, ít tốn kém hơn, dễ bảo trì và dễ nâng cấp hơn so với blockchain. Vậy tại sao mọi người cứ sử dụng từ *blockchain* như thể nó là một thứ thuốc chữa bách bệnh cho tất cả các vấn đề của họ?

Đầu tiên, rất nhiều ngành công nghiệp đang được bán trên blockchain là thực sự quá hạn cho việc nâng cấp cơ sở hạ tầng CNTT. Chăm sóc sức khỏe nổi tiếng là phần mềm khủng khiếp. Quyết toán tài chính vẫn đang chạy trên phần mềm từ những năm 70. Phần mềm quản lý chuỗi cung ứng vừa khó sử dụng vừa khó cài đặt. Hầu hết các công ty trong các ngành này chống lại việc nâng cấp vì những rủi ro liên quan tiềm ẩn. Có rất nhiều nâng cấp cơ sở hạ tầng trị giá hàng trăm triệu và kết thúc bằng việc chạy vẫn như trước. Blockchain là một cách để bán các nâng cấp cơ sở hạ tầng CNTT này và làm chúng trở nên “hợp khẩu vị” hơn một chút.

Thứ hai, blockchain là một cách để trông như là bạn đang ở trên nền tảng công nghệ hàng đầu. Dù muốn hay không, từ blockchain đã có một cuộc sống của riêng nó. Rất ít người thực sự hiểu nó là gì, nhưng muốn thể hiện “cho ra vẻ” nên sử dụng những từ này như một cách để nghe có vẻ văn minh hơn. Trên thực tế, cũng giống như “đám mây” có nghĩa là máy tính của ai đó và AI có nghĩa là một thuật toán biết điều chỉnh, từ blockchain trong bối cảnh này cũng chỉ có nghĩa là một cơ sở dữ liệu chậm chạp, đắt tiền.

Thứ ba, mọi người thực sự không thích sự kiểm soát của chính phủ đối với một số ngành công nghiệp nhất định nào đó và muốn có một cơ chế phán xử khác thay vì khung pháp lý hợp pháp hiện hành, vốn thường chậm chạp

và tốn kém. Đối với họ, blockchain thực sự là một cách để thoát khỏi bộ máy nặng nề các quy định của chính phủ. Đây là quá với những gì blockchain có thể làm. Blockchain không “huyền diệu” đến mức có thể lấy đi xung đột của con người.

Kết quả là rất nhiều người bị cường điệu về những lời hứa mà không thực sự hiểu các khả năng hoặc chi phí. Điều tệ hại hơn, các chi tiết kỹ thuật thực tế và chi phí được trừu tượng hóa đi từ rất nhiều nguồn đầu tư mạo hiểm (VC) và giám đốc điều hành theo cách làm lu mờ những gì một blockchain có thể và không thể làm được. Mọi người bên dưới họ trở nên sợ hãi khi nói rằng hoàng đế cởi truồng, và chúng ta có tình huống mà chúng ta đang có bây giờ.

VẬY BLOCKCHAIN LÀ TỐT CHO CÁI GÌ?

Chúng ta đã chứng tỏ rằng một blockchain rất đắt so với các cơ sở dữ liệu tập trung. Vì vậy, lý do duy nhất bạn nên sử dụng blockchain là để *phi tập trung*. Đó là, loại bỏ các điểm đơn lẻ của thất bại hoặc kiểm soát.

Điều này về bản chất có nghĩa là phần mềm hoặc cơ sở dữ liệu không được thay đổi thường xuyên (nếu có thay đổi). Có rất ít “mặt trái” cần phải nâng cấp và cũng ít phải hiệu chỉnh hoặc thay đổi các quy tắc.

Phần lớn các ngành công nghiệp lại là không như thế. Rất nhiều ngành công nghiệp yêu cầu các tính năng mới hoặc nâng cấp và tự do thay đổi và mở rộng khi cần thiết. Vì rằng blockchain khó nâng cấp, khó thay đổi và khó mở rộng quy mô, có thể thấy rằng rất nhiều ngành công nghiệp không phù hợp đối với blockchain.

Một ngoại lệ mà chúng ta đã tìm thấy là tiền. Không giống như hầu hết các trường hợp sử dụng của công nghiệp, tiền sẽ tốt hơn nếu nó không thay đổi. Bất biến và khó khăn trong việc thay đổi các quy tắc lại là một điểm tích cực cho tiền và không gây bất lợi. Đây là lý do tại sao blockchain là công cụ phù hợp cho công việc khi nó đến với Bitcoin.

Một điều rõ ràng là rất nhiều công ty đang tìm cách sử dụng blockchain là không thực sự muốn một blockchain nào cả, mà chỉ là nâng cấp nền tảng CNTT cho ngành công nghiệp cụ thể của họ. Đây không phải là tồi, nhưng sử dụng từ *blockchain* để đạt được điều đó thì là không trung thực và vượt quá khả năng của nó.

ĐÃ ĐẾN LÚC CẦN TRỌNG VỚI BLOCKCHAIN

Thực ra, lúc này không ít các công ty khởi nghiệp đã và đang cần trọng hơn về việc sử dụng của họ đối với công nghệ Blockchain. Liệu đó có phải là sự sụt giảm thực sự hay là họ chỉ đang cố gắng tránh cái sự mệt mỏi (từ blockchain)?

Cách đây ít lâu, một nhà báo đã có một cuộc phỏng vấn với CEO của một công ty blockchain về cách mà các nền tảng truyền thông xã hội phi tập trung có thể ngăn chặn và đảo ngược hiệu ứng “tiếng dội ngược trở lại” trên mạng xã hội. Điều làm cho cái bài thuyết trình này hấp dẫn là nó không hề đề cập đến blockchain, mặc dù công ty rõ ràng là một công ty khởi nghiệp blockchain. Thay vào đó, người CEO giới thiệu sản phẩm của công ty chỉ đơn giản là một “mạng không thể ngăn chặn được”.

Mặc dù blockchain là thành phần chính của nền tảng của nó, nhưng công ty cũng đã đề cập rất ít về nó trên trang web của mình. Thay vào đó, có rất nhiều từ khóa lựa chọn chỉ ra mối liên hệ với công nghệ blockchain, chẳng hạn như “phi tập trung”, “không thể ngăn chặn”, “kháng kiểm duyệt” và “kháng giám sát”.

Đây không phải là một trường hợp cá biệt. Trong dòng các thuyết minh, quảng cáo từ các công ty blockchain hiện nay, trái ngược với thời 2016–2017, các tổ chức hiện giờ đang cần trọng hơn khi nói về việc họ sử dụng công nghệ này.

Ở một mức độ nào đó, blockchain giống với ngành công nghiệp AI (trí tuệ nhân tạo) vào những năm 1980. Vào thời điểm đó, nhiều nhà nghiên cứu trong lĩnh vực này đã hứa hẹn quá

mức và đã đem lại dưới mức, dẫn đến cảm giác thất vọng chung với ngành công nghiệp này và sự sụt giảm trong tài trợ chính phủ và đầu tư mạo hiểm VC (Venture Capital) – một kỷ nguyên được gọi là “mùa đông AI”. Khi ấy, các công ty và tổ chức đã từ chối mô tả công việc của họ theo hướng “trí tuệ nhân tạo” vì sợ làm mất lòng khán thính giả và sợ liên lụy với một ngành công nghiệp mà đã không thực hiện được lời hứa của mình. Một ví dụ nổi bật là Deep Blue của IBM, siêu máy tính đã đánh bại nhà vô địch cờ vua thế giới Garry Kasparov vào năm 1997. Khi ấy, IBM tuyên bố rõ ràng rằng Deep Blue không sử dụng trí tuệ nhân tạo.

Công bằng mà nói, blockchain còn chưa ở trạng thái mà AI đã ở trong mùa đông dày của nó. Rất nhiều ấn phẩm về các phát triển blockchain, và một số gặp gỡ và hội nghị về blockchain diễn ra hàng năm. Các cuộc mời chào “tiền xu ban đầu” vẫn đang tiếp tục gây quỹ, dù là không nhiều như trước đây.



Hội nghị và hội thảo về blockchain vẫn diễn ra đều đặn

Nhưng những dấu hiệu của một “mùa đông blockchain” đang xuất hiện, vì nhiều người đang quan sát ngành công nghiệp với sự hoài nghi ngày càng tăng.

Mark Devlin, CEO và là người sáng lập New-blocks, một nền tảng muốn thiết lập niềm tin vào báo chí trực tuyến bằng cách đăng ký các sự thật trên blockchain, nói rằng lý do ông bỏ qua việc đề cập đến blockchain trong “sân chơi” của mình là vì muốn tập trung

vào chức năng vận hành của ứng dụng của mình. Nhưng ông cũng thừa nhận rằng các phóng viên, người mà các công ty khởi nghiệp dựa vào để quảng bá về các dự án của mình, đang ngày càng tiêu cực về các khởi nghiệp blockchain.

Nhưng cũng có quá nhiều lý do để hoài nghi về các công ty khởi nghiệp blockchain. Trong thời kỳ bùng nổ ICO (việc chào bán tiền xu ban đầu của các dự án phát hành tiền điện tử) vào năm 2017, các dự án blockchain đã thu được số tiền điên rồ bằng cách cung cấp chỉ một tỷ hơn cái trang web hào nhoáng và một sách trắng (whitepaper). Có thể thấy trước, nhiều dự án trong số đó đã thất bại trong việc thực hiện lời hứa của họ, trong khi những dự án khác hóa ra là lừa đảo. Và với rất ít sự giám sát theo quy định, ngành công nghiệp này đã trở thành chủ đề của nhiều hoạt động đáng ngờ, như là tạo ra sự cường điệu và thao túng giá cả thông qua các kế hoạch “bơm và xì” nhân tạo.

Tất cả những điều này đã góp phần tạo ra cảm giác chung về sự nghi ngờ xung quanh blockchain và tiền điện tử, bao gồm cả các nhà báo và nhà đầu tư.

Devlin nói rằng trong một số trường hợp, ông đã bị nói rằng ông đang lừa đảo chỉ vì có đề cập đến các từ “ICO” và “blockchain” trong khi thảo luận về tính toàn vẹn tin tức trên các diễn đàn trực tuyến.

TƯƠNG LAI SẼ RA SAO?

Bất chấp sự “lạnh lùng” hiện tại, công nghệ blockchain tiếp tục phát triển mạnh mẽ với

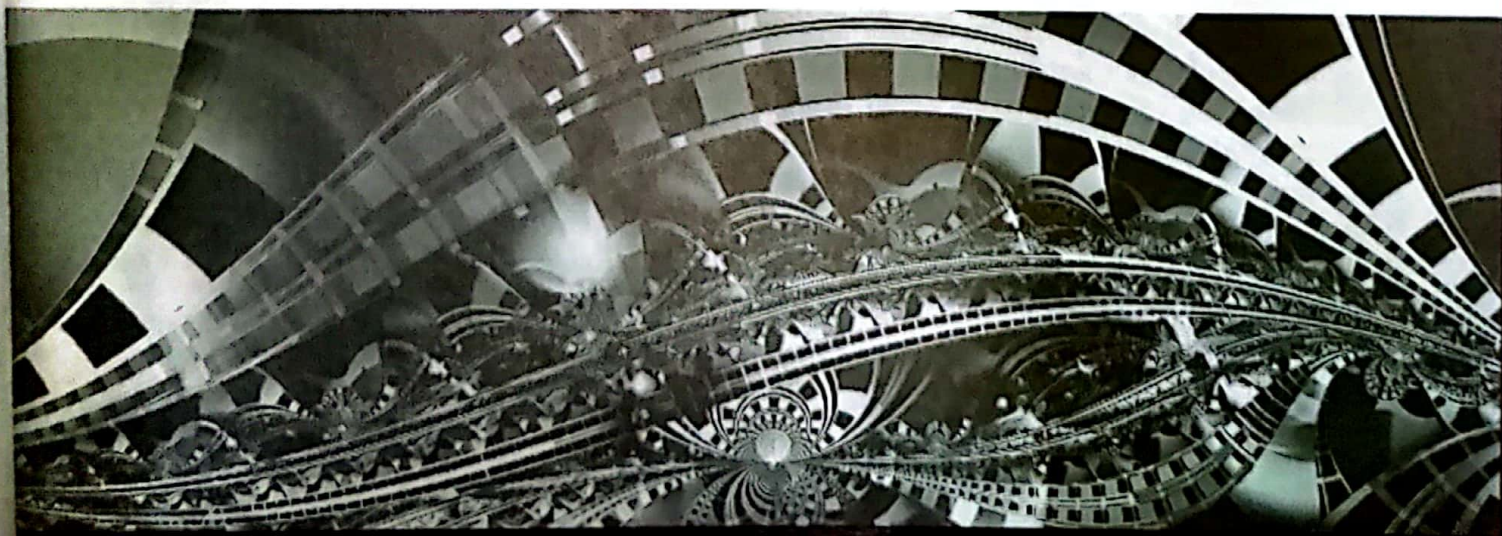
tốc độ ổn định và rất nhiều sự đổi mới vẫn đang diễn ra trong lĩnh vực này.

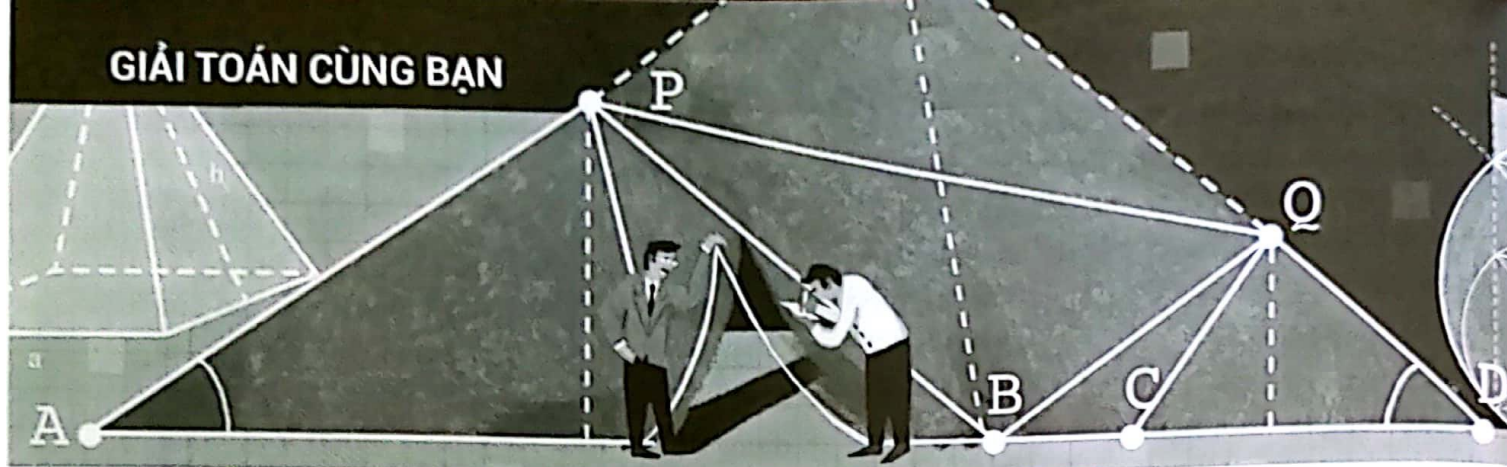
Mùa đông AI đã kết thúc với những đột phá trong *deep learning* (học sâu), cái hương vị của AI mà đã trở thành bánh mì và bơ của nhiều dịch vụ và công ty trực tuyến trong vài năm qua. Từ những chiếc xe tự lái đến nhận dạng khuôn mặt và y học, nhiều ứng dụng thực tế của việc *học sâu* đã làm hồi sinh mối quan tâm đến trí tuệ nhân tạo và rót hàng tỷ đô la vào ngành công nghiệp này. Nếu lịch sử là sự dẫn dắt đưa đường, vận may của blockchain cuối cùng sẽ có bước chuyển tích cực.

Tuy nhiên, trước khi điều đó xảy ra, blockchain phải tìm ra ứng dụng sát thủ của nó. Vài năm qua đã chỉ ra rằng việc sao chép các ứng dụng trực tuyến hiện có trên blockchain không phải là cách sử dụng phổ biến nhất cho công nghệ này. Nhưng chúng ta đã thấy một số mô hình độc đáo xuất hiện, chẳng hạn như *sưu tầm tiền điện tử và thị trường dự đoán phi tập trung*. Các mạng truyền thông xã hội cũng đã thể hiện sự quan tâm trong việc tích hợp một số khía cạnh của blockchain hoặc tiền điện tử. Điều này đặc biệt sẽ xảy ra khi họ đương đầu với việc định hình lại các doanh nghiệp của họ để đối phó với làn sóng kinh doanh gia tăng đối với việc thu thập và khai thác dữ liệu người dùng.

Điều chắc chắn là rất nhiều dự án blockchain sẽ thất bại. Nhưng những cái sống sót cuối cùng có thể đạt được sự chấp nhận hàng loạt và trở thành người khổng lồ công nghệ mới của tương lai.

Liệu có phải là Blockchain trong thế giới Fractal?





MỘT CÁCH TIẾP CẬN BÀI TOÁN ĐẾM SỐ LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

Nguyễn Khắc Minh

Ở bài viết này, người viết bài muốn trao đổi với bạn đọc của Tạp chí Pi về một cách tiếp cận các tình huống yêu cầu đếm số lớp tương đương, được hình thành từ việc phân hoạch một tập hợp hữu hạn cho trước theo một quan hệ tương đương trên tập hợp đó.

Nội dung bài viết gồm hai phần chính:

- Phần I, có tiêu đề “Quan hệ tương đương và lớp tương đương”, nhằm mục đích cùng bạn đọc ôn lại, hoặc làm quen, với hai khái niệm cơ bản của Toán học: “quan hệ tương đương”, và “lớp tương đương”;
- Phần II, có tiêu đề “Một cách tiếp cận các bài toán đếm số lớp tương đương”, nhằm mục đích trao đổi với bạn đọc về một cách tiếp cận, có thể giúp tìm ra lời giải cho một số bài toán đếm số lớp tương đương có thể gặp trong quá trình học Toán ở bậc phổ thông.

Như thế, ngay cả trong trường hợp bạn chưa biết, hoặc chưa hiểu ở mức tối thiểu cần thiết, các khái niệm “quan hệ tương đương” và “lớp tương đương”, bạn vẫn hoàn toàn có thể đọc bài viết này, mà không gặp chút khó khăn nào do sự thiếu hụt kiến thức vừa nêu gây ra. Tùy theo năng lực của mình, bạn có thể đọc hoặc bỏ qua Chứng minh của Định lý ở phần I, vì việc bỏ qua này sẽ không ảnh hưởng gì tới việc đọc các phần tiếp theo của bài viết.

I. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

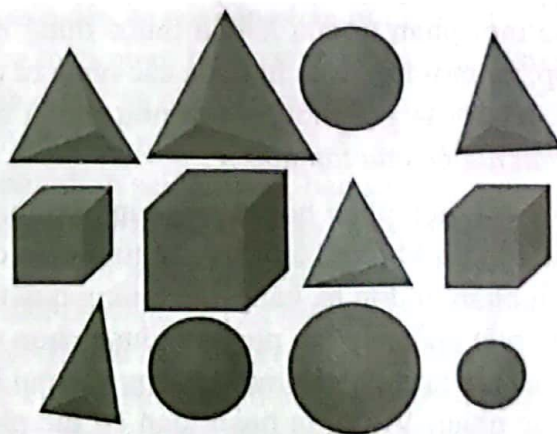
1. Quan hệ tương đương và lớp tương đương là gì?

Trong sinh hoạt, học tập hằng ngày, hẳn bạn thường nghe thấy từ “lớp”: “học sinh lớp ...”, “lớp trẻ”, “lớp già”, “lớp đồng dư”, “lớp các bài toán đếm”, “lớp một lá mầm”, “lớp hai lá mầm”, “lớp dương xỉ có hạt”, Lẽ dĩ nhiên, từ “lớp” trong các trường hợp khác nhau (như ở các trường hợp vừa nêu chẳng hạn) có những điểm khác nhau nhất định về ngữ nghĩa. Tuy nhiên, trong mọi trường hợp, nó đều có hoàn cảnh xuất thân như nhau; đó là, sự ra đời của nó gắn liền với việc phân chia tất cả phần tử của một tập hợp nào đó thành các cụm phần tử, đôi một không có phần tử chung; mỗi cụm phần tử được gọi là một lớp. Chẳng hạn, “lớp” trong “lớp trẻ”, “lớp già” được sinh ra từ việc phân chia mọi người thuộc một cộng đồng nào đó thành các nhóm đôi một rời nhau (tức, không có hai nhóm nào cùng có chung một người), theo độ tuổi; hay “lớp” trong “lớp đồng dư” được sinh ra từ việc phân chia tất cả các số thuộc tập hợp số nguyên thành các nhóm đôi một rời nhau, theo số dư trong phép chia cho một số xác định nào đó; Việc phân chia tất cả phần tử của một tập hợp X nào đó thành các cụm phần tử, đôi một không có phần tử chung, được nói vắn tắt là *phân lớp* các phần tử của tập hợp X , hay *phân hoạch* tập hợp X thành các lớp (hay, các tập con).

Để tâm một chút, bạn sẽ thấy, “lớp”, hay các “biến thể” của nó, như “tầng lớp”, “giai cấp”, “họ”, “loài”, “dạng”, “loại”, ..., là một khái niệm được sử dụng rộng rãi trong hầu hết các lĩnh vực hoạt động của con người. Điều này chứng tỏ, trong hầu hết các lĩnh vực hoạt động của mình, con người đều thực hiện việc phân hoạch một tập hợp nào đó thành các lớp. Chẳng hạn, khi cần tìm hiểu, nghiên cứu các phần tử của một tập hợp nào đó, theo những tính chất nào đó của chúng, người ta thường hướng tới việc phân hoạch tập hợp ấy thành các lớp, sao cho các phần tử thuộc cùng một lớp đều “hành xử” như nhau dưới “sức ép” của

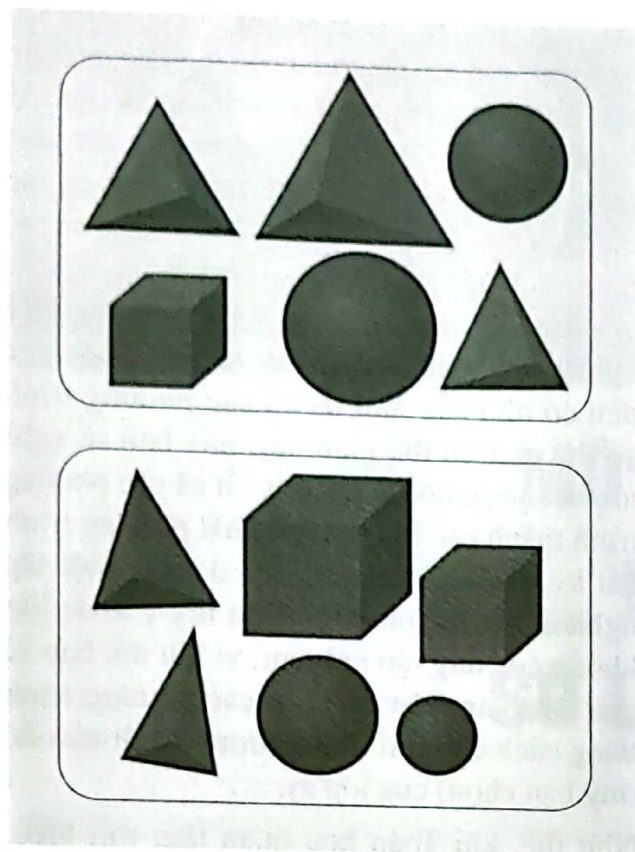
các tính chất mà người ta quan tâm, nhằm tạo ra cơ hội tìm hiểu, nghiên cứu toàn bộ một lớp các phần tử thông qua một đại diện của lớp ấy. Để nghiên cứu thế giới thực vật, các nhà thực vật học không nghiên cứu từng cá thể thực vật đơn lẻ; họ phân chia tất cả các cá thể thực vật thành các loài, sao cho có thể nghiên cứu toàn bộ một loài thực vật thông qua việc nghiên cứu một đại diện của loài ấy. Hoặc giả, nếu có nhu cầu giải tất cả các phương trình có thể có trên thể gian này, hẳn bạn sẽ nghĩ tới việc phân hoạch tập hợp tất cả các phương trình thành các lớp, sao cho hai phương trình bất kỳ thuộc cùng một lớp có cùng một tập nghiệm, và hai phương trình tùy ý khác lớp không có cùng tập nghiệm; vì khi đó, bạn sẽ giải được nguyên một lớp các phương trình bằng cách chỉ giải một phương trình nào đó (tùy bạn chọn) của lớp ấy. ...

Như thế, khi Toán học quan tâm tìm hiểu, nghiên cứu việc phân hoạch một tập hợp thành các lớp, thì đó là Toán học đang phục vụ cuộc sống vậy.



Hình 1

Để phân hoạch một tập hợp thành các lớp, người ta có thể sử dụng các dấu hiệu khác nhau, gắn liền với các phần tử của tập hợp ấy. Chẳng hạn, có thể phân hoạch tập hợp các vật thể trong Hình 1 theo màu sắc (xem Hình 2a; mỗi cụm vật thể trong hình là một lớp), hoặc theo hình dạng (xem Hình 2b; mỗi cụm vật thể trong hình là một lớp), hoặc theo một dấu hiệu nào đó khác.

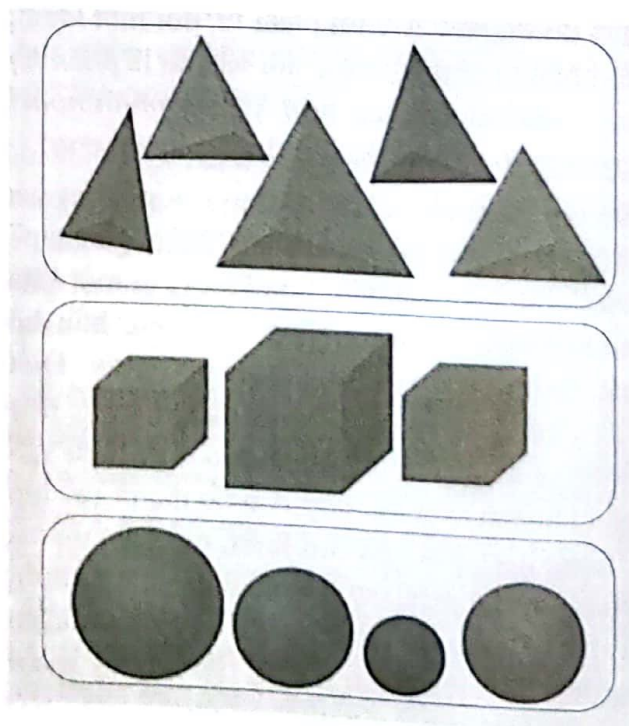


Hình 2a

Rõ ràng, kết quả thu được khi phân hoạch tập hợp X nào đó thành các lớp là một họ các lớp, mà mỗi phần tử của X đều thuộc đúng một lớp, và mỗi lớp đều chỉ chứa các phần tử của X . Người ta gọi một họ lớp như thế là một *phân hoạch của tập hợp X* .

Đối với việc phân hoạch một tập hợp thành các lớp, ta không hẳn cần các tính chất của mỗi phần tử đơn lẻ, bằng cần những quy tắc, cho biết phải xếp hai phần tử, được chọn tùy ý của tập hợp ấy, vào một lớp hay vào hai lớp khác nhau. Ví dụ, ta hoàn toàn có thể phân hoạch tập hợp tất cả các đường thẳng của mặt phẳng thành các lớp, khi dùng quy tắc “hai đường thẳng được xếp vào cùng một lớp khi và chỉ khi chúng không cắt nhau”. Ở phân hoạch nhận được nhờ quy tắc này, hai đường thẳng bất kỳ thuộc cùng một lớp không cắt nhau, và hai đường thẳng tùy ý thuộc hai lớp khác nhau sẽ cắt nhau. Trong ví dụ vừa nêu, điều ta đã sử dụng để phân hoạch tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng không phải là một dấu hiệu, mà mỗi đường thẳng đơn lẻ có hoặc không có; điều ta đã sử dụng là một quan hệ, mà mỗi cặp

đường thẳng đều hoặc thỏa mãn hoặc không thỏa mãn quan hệ ấy (cặp đường thẳng nào cũng hoặc không cắt nhau, hoặc cắt nhau). Người ta nói, phân hoạch trong ví dụ đó là *phân hoạch sinh bởi (hay được sinh bởi) quan hệ “không cắt nhau”*, của tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng. Có thể lấy thêm nhiều ví dụ nữa để bạn tin rằng, bằng cách sử dụng một quan hệ nào đó, mà mỗi cặp phần tử của một tập hợp cho trước đều hoặc thỏa mãn hoặc không thỏa mãn quan hệ ấy, người ta có thể phân hoạch tập hợp đó thành các lớp, sao cho mỗi cặp phần tử cùng lớp thỏa mãn quan hệ đang xét, và bất kỳ cặp phần tử khác lớp nào cũng không thỏa mãn quan hệ ấy. Nghĩa là, có rất nhiều những phân hoạch của một tập hợp, sinh bởi các quan hệ. Hơn nữa, ngay cả phân hoạch của một tập hợp, có được khi phân hoạch tập hợp đó theo một dấu hiệu, mà mỗi phần tử đơn lẻ của tập hợp ấy đều có hoặc không có, cũng có thể được coi là một phân hoạch sinh bởi một quan hệ – quan hệ “có cùng dấu hiệu”. Phân hoạch, được thể hiện ở Hình 2a, của tập hợp các vật thể trong Hình 1, có thể được coi là phân hoạch sinh bởi quan hệ “cùng màu”; còn phân hoạch, được thể hiện ở Hình 2b, có thể được coi là phân hoạch sinh bởi quan hệ “cùng hình dạng”.



Hình 2b

Như vậy, để phân hoạch một tập hợp thành các lớp, ta cần một quan hệ, mà mỗi cặp phần tử của tập hợp đó hoặc thỏa mãn hoặc không thỏa mãn quan hệ ấy. Một quan hệ như thế được gọi là *quan hệ hai ngôi (binary relation) trên một tập hợp*.

Trước khi bạn đọc phần tiếp theo, tôi muốn lưu ý bạn rằng, *cặp phần tử* (của một tập hợp nào đó) là một bộ gồm hai phần tử, có tính đến thứ tự nằm của hai phần tử đó trong bộ. Như thế, với a, b là hai phần tử khác nhau (của một tập hợp nào đó), thì (a, b) và (b, a) là hai cặp phần tử khác nhau.

Trong quá trình học tập, bạn đã gặp không ít các quan hệ hai ngôi trên các tập hợp. Chẳng hạn, quan hệ “bằng nhau”, quan hệ “nhỏ hơn”, quan hệ “lớn hơn”, trên tập số thực $\mathbb{R}$; quan hệ “đồng dư” trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$; quan hệ “bằng nhau” trên tập hợp các đa thức; quan hệ “cắt nhau”, quan hệ “không cắt nhau”, quan hệ “song song”, quan hệ “vuông góc”, trên tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng; quan hệ “đồng dạng” trên tập hợp tất cả các tam giác có thể vẽ được trên mặt phẳng; Trong cuộc sống, bạn cũng gặp không ít các quan hệ hai ngôi trên tập hợp “nhân loại”: quan hệ “bạn bè”, quan hệ “đồng chí”, quan hệ “đồng hương”, quan hệ “đồng nghiệp”, quan hệ “cùng huyết thống”,

Xét, chẳng hạn, quan hệ “lớn hơn” trên tập số thực $\mathbb{R}$. Ta biết rằng, quan hệ đó được kí hiệu bởi dấu “ $>$ ”. Người ta định nghĩa, số thực a có quan hệ “lớn hơn” với số thực b (hay, nói vắn tắt “ a lớn hơn b ”), và viết $a > b$, nếu hiệu $a - b$ là một số dương. Ta nói, cặp số thực (a, b) thỏa mãn quan hệ “lớn hơn”, nếu $a > b$ (tức là, nếu a có quan hệ “lớn hơn” với b) là một khẳng định đúng; và nói, cặp số thực (a, b) không thỏa mãn quan hệ “ $>$ ”, nếu $a > b$ là một khẳng định sai. Ví dụ, cặp số thực $(7, 3)$ thỏa mãn quan hệ “ $>$ ”, vì $7 > 3$ là một khẳng định đúng; còn cặp số thực $(1, 5)$ không thỏa mãn quan hệ “ $>$ ”, vì $1 > 5$ là một khẳng định sai. Khi đó, rõ ràng, mỗi cặp số thực (x, y) chỉ có thể hoặc thỏa mãn,

hoặc không thỏa mãn quan hệ “lớn hơn” (do hiệu $x - y$ chỉ có thể hoặc là số dương, hoặc là số không dương). Bởi thế, quan hệ “lớn hơn” là một quan hệ hai ngôi trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Bằng cách nhìn nhận tương tự trên, bạn sẽ lý giải được, vì sao các quan hệ đã được liệt kê trên đây đều là các quan hệ hai ngôi trên các tập hợp tương ứng.

Bây giờ, thay vì tập số thực $\mathbb{R}$, tập số nguyên $\mathbb{Z}$, tập các đa thức, tập các đường thẳng trong mặt phẳng, tập “nhân loại”, ..., ta xét một tập hợp X “chung chung” nào đó. Cùng với đó, ta xét một quan hệ nào đó giữa các phần tử của tập X , và đặt tên cho quan hệ đó là R . Bất cứ cách thể hiện quan hệ ở các ví dụ trên đây (như để thể hiện số thực a có quan hệ “ $>$ ” với số thực b ta viết $a > b$, để thể hiện đường thẳng x có quan hệ “ $\perp$ ” (vuông góc) với đường thẳng y ta viết $x \perp y$, để thể hiện người A có quan hệ “đồng hương” với người B ta viết “ A đồng hương (với) B ”, ...), để thể hiện phần tử $x \in X$ có quan hệ R với phần tử $y \in X$ ta viết xRy . Cũng tương tự như ở các ví dụ trên đây, ta nói cặp phần tử (x, y) , $x, y \in X$, thỏa mãn quan hệ R , nếu xRy là một khẳng định đúng; và nói, cặp phần tử (x, y) , $x, y \in X$, không thỏa mãn quan hệ R , nếu xRy là một khẳng định sai. Khi đó, bạn sẽ thấy, *quan hệ R được gọi là quan hệ hai ngôi trên tập hợp X , nếu với mỗi cặp phần tử (x, y) , $x, y \in X$, ta đều có hoặc xRy là một khẳng định đúng, hoặc xRy là một khẳng định sai*. Nếu đã biết các khái niệm “mệnh đề” và “mệnh đề chứa biến”, bạn có thể diễn đạt lại điều vừa nêu, như sau:

Định nghĩa 1. Quan hệ R giữa các phần tử của tập hợp X được gọi là quan hệ hai ngôi trên tập hợp đó, nếu

$$P((x, y)) = xRy, (x, y) \in X^2$$

là một mệnh đề chứa biến.

Để việc diễn đạt đỡ dài dòng, ta quy ước, trong phần trình bày dưới đây:

– “Quan hệ hai ngôi” được gọi tắt là “quan hệ”, ngoại trừ một số trường hợp cần nói rõ để tránh hiểu nhầm;

– Khi viết aRb thì hiểu rằng “ a có quan hệ R với b ” là một khẳng định (hay mệnh đề) đúng;

– Khi có đồng thời aRb và bRa thì nói rằng, a và b có quan hệ R với nhau. Ví dụ, khi nói “hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau”, thì điều đó có nghĩa là, ta có đồng thời $d_1 \perp d_2$ và $d_2 \perp d_1$.

Giả sử ta có tập hợp X , và một quan hệ hai ngôi R trên tập đó. Khi đó:

Định nghĩa 2. Ta nói, quan hệ R có tính chất (hay, tính) phản xạ, nếu với mọi phần tử $x \in X$ ta đều có xRx (nghĩa là, “ x có quan hệ R với chính mình” là một khẳng định đúng).

Định nghĩa 3. Ta nói, quan hệ R có tính chất (hay, tính) đối xứng, nếu với mọi $x, y \in X$ ta đều có: nếu xRy thì yRx (nghĩa là, nếu “ x có quan hệ R với y ” là một khẳng định đúng, thì “ y có quan hệ R với x ” cũng là một khẳng định đúng).

Định nghĩa 4. Ta nói, quan hệ R có tính chất (hay, tính) bắc cầu, nếu với mọi $x, y, z \in X$ ta đều có: nếu xRy và yRz , thì xRz (nghĩa là, nếu “ x có quan hệ R với y ” và “ y có quan hệ R với z ” là các khẳng định đúng, thì “ x có quan hệ R với z ” cũng là một khẳng định đúng).

Ví dụ, quan hệ “đồng dạng” trên tập hợp tất cả các tam giác có thể vẽ được trên mặt phẳng có đầy đủ cả ba tính chất: phản xạ, đối xứng, và bắc cầu; vì ta biết rằng:

– Mỗi tam giác đều đồng dạng với chính mình (tính phản xạ);

– Nếu tam giác T_1 đồng dạng với tam giác T_2 thì tam giác T_2 cũng đồng dạng với tam giác T_1 (tính đối xứng);

– Nếu tam giác T_1 đồng dạng với tam giác T_2 , và tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_3 , thì tam giác T_1 đồng dạng với tam giác T_3 (tính bắc cầu).

Quan hệ “đồng hướng” trên tập hợp “nhân loại” cũng có đầy đủ cả ba tính chất: phản xạ,

đối xứng, và bắc cầu; vì rõ ràng:

– Mỗi người đều đồng hướng với chính mình (tính phản xạ);

– Nếu người A đồng hướng với người B thì người B cũng đồng hướng với người A (tính đối xứng);

– Nếu người A đồng hướng với người B , và người B đồng hướng với người C , thì người A đồng hướng với người C (tính bắc cầu).

Quan hệ “vuông góc” trên tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng không có các tính chất phản xạ, bắc cầu, nhưng có tính chất đối xứng; vì trong mặt phẳng:

– Mỗi đường thẳng không vuông góc với chính mình (không có tính phản xạ);

– Với d_1 và d_2 là hai đường thẳng tùy ý, nếu $d_1 \perp d_2$ thì cũng có $d_2 \perp d_1$ (tính đối xứng);

– Với d_1, d_2 và d_3 là ba đường thẳng tùy ý, từ $d_1 \perp d_2$ và $d_2 \perp d_3$, không thể suy ra $d_1 \perp d_3$ (không có tính bắc cầu).

Với công nghệ gen hiện nay, quan hệ “cha con” là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp “nhân loại”. Quan hệ này không có bất cứ tính chất nào, trong các tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu; vì:

– Không có ai là cha/bố của chính mình (không có tính phản xạ);

– Không thể có, nếu “ A là cha/bố của B ” thì “ B cũng là cha/bố của A ” (không có tính đối xứng);

– Từ “ A là cha/bố của B ” và “ B là cha/bố của C ”, không thể suy ra “ A là cha/bố của C ” (không có tính bắc cầu).

Ở phần trên, chúng ta đã thấy, quan hệ “không cắt nhau” trên tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng sinh ra một phân hoạch của tập hợp đó. Nói một cách khác, chúng ta đã thấy, ta có thể phân hoạch tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng thành các lớp, sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

– Mỗi đường thẳng thuộc một lớp tùy ý không cắt chính mình (tức, có quan hệ “không cắt nhau” với chính mình);

– Hai đường thẳng bất kỳ thuộc cùng một lớp không cắt nhau (tức, có quan hệ “không cắt nhau” với nhau);

– Hai đường thẳng bất kỳ thuộc hai lớp khác nhau sẽ cắt nhau (tức, trong hai đường thẳng bất kỳ thuộc hai lớp khác nhau, không có đường thẳng nào có quan hệ “không cắt nhau” với đường thẳng còn lại).

Phải chăng, mỗi quan hệ hai ngôi R trên một tập hợp đều sinh ra một phân hoạch của tập hợp đó? Hay, nói một cách khác, phải chăng, với mỗi quan hệ hai ngôi R trên một tập hợp, ta đều có thể phân hoạch tập hợp đó thành các lớp, sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

- i) Mỗi phần tử thuộc một lớp tùy ý có quan hệ R với chính mình;
- ii) Hai phần tử bất kỳ thuộc cùng một lớp có quan hệ R với nhau;
- iii) Trong hai phần tử bất kỳ thuộc hai lớp khác nhau, không có phần tử nào có quan hệ R với phần tử còn lại.

Để thấy, quan hệ “vuông góc” trên tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng không sinh ra một phân hoạch của tập đó (nghĩa là, ta không thể phân hoạch tập hợp đó thành các lớp, sao cho các điều kiện i), ii) và iii) trên đây được đồng thời thỏa mãn). Hay như, quan hệ “cha con” trên tập hợp “nhân loại” cũng không sinh ra một phân hoạch của tập hợp ấy. Câu hỏi đặt ra: *Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp cần phải thỏa mãn những điều kiện nào, để có thể sinh ra một phân hoạch của tập hợp ấy?*

Định lý dưới đây là câu trả lời cho câu hỏi trên.

Định lý. *Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp S sẽ sinh ra một phân hoạch của tập hợp đó khi và chỉ khi R có đồng thời các tính chất: phản xạ, đối xứng, và bắc cầu.*

Chứng minh.

• *Điều kiện cần (“chỉ khi”).*

Giả sử quan hệ R trên tập hợp S sinh ra một phân hoạch của tập hợp đó; nghĩa là, ta có thể

phân hoạch S thành các lớp, sao cho ba điều kiện i), ii) và iii) vừa nêu trên được đồng thời thỏa mãn. Khi đó:

– Theo i), với a là phần tử tùy ý thuộc S , ta luôn có aRa ; vì thế, quan hệ R có tính phản xạ.

– Nếu phần tử $a \in S$ có quan hệ R với phần tử $b \in S$, thì theo iii), a và b phải thuộc cùng một lớp; do đó, theo ii), b cũng có quan hệ R với a . Điều này chứng tỏ quan hệ R có tính đối xứng.

– Xét ba phần tử $a, b, c \in S$, mà a có quan hệ R với b , và đồng thời, b có quan hệ R với c . Theo iii), a và b thuộc cùng một lớp, b và c cũng thuộc cùng một lớp; do đó, a, b, c cùng thuộc một lớp. Vì thế, theo ii), a có quan hệ R với c . Điều này chứng tỏ quan hệ R có tính bắc cầu.

Như thế, nếu quan hệ R trên tập hợp S sinh ra một phân hoạch của tập hợp ấy, thì R là một quan hệ có đầy đủ các tính chất: phản xạ, đối xứng, và bắc cầu.

Điều kiện cần được chứng minh.

• *Điều kiện đủ (“khi”).*

Giả sử quan hệ R trên tập hợp S có đầy đủ các tính chất: phản xạ, đối xứng, và bắc cầu. Ta sẽ chứng minh rằng, khi đó, có thể phân hoạch tập hợp S thành các lớp, sao cho các điều kiện i), ii) và iii) trên đây được đồng thời thỏa mãn (nghĩa là, tồn tại một phân hoạch của S , sinh bởi quan hệ R).

Thật vậy, với mỗi phần tử $a \in S$, kí hiệu S_a là lớp (tức, tập con) gồm tất cả các phần tử $x \in S$, mà a có quan hệ R với x :

$$S_a = \{x \in S \mid aRx\}.$$

Bằng cách trên, ta thu được một họ $\mathcal{H}$ các lớp (tức, một họ các tập con của tập hợp S). Ta sẽ chứng minh họ $\mathcal{H}$ là một phân hoạch của tập hợp S , thỏa mãn các điều kiện i), ii) và iii).

Trước hết, do quan hệ R có tính phản xạ nên với mỗi phần tử $a \in S$, ta đều có $a \in S_a$. Vì thế, mỗi phần tử của tập hợp S đều thuộc ít nhất một lớp trong họ $\mathcal{H}$. (1)

Tiếp theo, xét hai phần tử a, b tùy ý thuộc tập hợp S ; ta sẽ chứng minh, nếu S_a và S_b có phần tử chung thì $S_a = S_b$ (2)

Thật vậy, giả sử S_a và S_b có ít nhất một phần tử chung, gọi là c . Khi đó, theo định nghĩa của S_a và S_b , ta có:

$$aRc \quad (3)$$

$$\text{và} \quad bRc \quad (4)$$

Vì quan hệ R có tính đối xứng nên từ (3) suy ra cRa . Kết hợp với (4), suy ra bRa (do quan hệ R có tính bắc cầu). (5)

Xét phần tử d tùy ý thuộc S_a . Theo định nghĩa của S_a , ta có aRd . Kết hợp với (5), suy ra bRd (do quan hệ R có tính bắc cầu); vì thế, $d \in S_b$ (theo định nghĩa của S_b).

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được rằng, nếu $d \in S_b$ thì $d \in S_a$.

Như vậy, nếu S_a và S_b có phần tử chung thì mọi phần tử thuộc S_a đều thuộc S_b , và ngược lại, mọi phần tử thuộc S_b đều thuộc S_a . Vì thế, (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) suy ra, mỗi phần tử thuộc tập hợp S đều thuộc đúng một lớp thuộc họ $\mathcal{H}$. Mà mỗi lớp thuộc $\mathcal{H}$, theo định nghĩa, đều chỉ chứa các phần tử thuộc S , nên $\mathcal{H}$ là một phân hoạch của S .

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $\mathcal{H}$ là phân hoạch được sinh bởi quan hệ R ; nghĩa là, nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện i), ii) và iii) trên đây.

Thật vậy, vì $\mathcal{H}$ là một phân hoạch của S và quan hệ R có tính phản xạ, nên hiển nhiên i) được thỏa mãn.

Xét hai phần tử bất kỳ a, b thuộc cùng một lớp. Theo định nghĩa các lớp, ta có $a \in S_a$; vì thế, $b \in S_a$; suy ra, aRb (theo định nghĩa của S_a). Mà R có tính đối xứng nên từ đó ta có bRa . Vì vậy, a và b có quan hệ R với nhau. Điều này chứng tỏ $\mathcal{H}$ thỏa mãn ii).

Xét hai phần tử bất kỳ a, b thuộc hai lớp khác nhau. Khi đó, vì $a \in S_a$ và $b \in S_b$ nên $S_a \neq S_b$. (6)

– Nếu aRb thì $b \in S_a$ (theo định nghĩa của S_a). Suy ra, $S_a \cap S_b \neq \emptyset$; vì thế, theo (2), $S_a = S_b$, mâu thuẫn với (6). Vì vậy, không thể có aRb .

– Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được, không thể có bRa .

Những điều vừa trình bày trên đây cho thấy, $\mathcal{H}$ thỏa mãn iii).

Vậy, tóm lại, nếu quan hệ R trên tập hợp S có đầy đủ các tính chất phản xạ, đối xứng, và bắc cầu, thì tồn tại một phân hoạch của S , sinh bởi R .

Điều kiện đủ được chứng minh.

Thông thường, khi xét một phân hoạch của một tập hợp, người ta hay gọi hai phần tử thuộc cùng một lớp là hai phần tử tương đương. Vì lý do này, nếu quan hệ hai ngôi trên một tập hợp sinh ra một phân hoạch của tập hợp đó, thì người ta gọi quan hệ đó là một *quan hệ tương đương*, và gọi mỗi lớp thuộc phân hoạch nhận được là một *lớp tương đương*. Như vậy, theo định lý trên, chúng ta có:

Định nghĩa 5. Một quan hệ hai ngôi trên một tập hợp được gọi là một *quan hệ tương đương*, nếu quan hệ đó có đầy đủ ba tính chất: phản xạ, đối xứng, và bắc cầu.

Với định nghĩa trên, ta có thể phát biểu lại Định lý trên đây dưới dạng:

Dạng phát biểu khác của Định lý. Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp S sẽ sinh ra một phân hoạch của tập hợp đó khi và chỉ khi R là một quan hệ tương đương.

Tới đây, hẳn bạn đã hiểu vì sao quan hệ “vuông góc” trên tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng không sinh ra một phân hoạch của tập đó. Cũng như, vì sao quan hệ “bố con” trên tập hợp “nhân loại” cũng không sinh ra một phân hoạch của tập ấy.

2. MỘT SỐ VÍ DỤ

• Ví dụ I. 1.

Xét tập hợp Q gồm tất cả các phân số, tức, gồm tất cả các số có dạng $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

Người ta *định nghĩa*: “Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là có quan hệ “bằng” với phân số $\frac{c}{d}$, và viết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, nếu $ad = bc$.”

Do với mỗi cặp phân số $\left(\frac{x}{y}, \frac{u}{v}\right)$, ta đều có hoặc $xv = yu$, hoặc $xv \neq yu$, nên mỗi cặp phân số $\left(\frac{x}{y}, \frac{u}{v}\right)$ đều hoặc thỏa mãn quan hệ “bằng”, hoặc không thỏa mãn quan hệ đó. Do vậy, quan hệ “bằng” là một quan hệ hai ngôi trên tập Q . Nói một cách khác, với định nghĩa trên, người ta đã xác lập trên tập Q một quan hệ hai ngôi, với tên gọi là “bằng”, và được kí hiệu bởi dấu “=”.

Tiếp theo, ta có thể chứng minh rằng, quan hệ “bằng” trên đây là một quan hệ tương đương.

Thật vậy, xét phân số $\frac{a}{b}$ tùy ý thuộc Q . Do $ab = ba$ nên ta có $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Như thế, mỗi phân số thuộc Q đều có quan hệ “bằng” với chính mình. Điều này chứng tỏ quan hệ “bằng” có tính phản xạ.

Xét hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ tùy ý thuộc Q . Giả sử, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; nghĩa là, $\frac{a}{b}$ có quan hệ “bằng” với $\frac{c}{d}$. Khi đó, ta có $ad = bc$; suy ra, ta cũng có $cb = da$. Vì thế, ta có $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ (do $b, d \neq 0$); nghĩa là $\frac{c}{d}$ cũng có quan hệ “bằng” với $\frac{a}{b}$. Điều này chứng tỏ quan hệ “bằng” có tính đối xứng.

Xét ba phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ và $\frac{e}{f}$ tùy ý thuộc Q . Giả sử, ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ và $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; nghĩa là, $\frac{a}{b}$ có quan hệ “bằng” với $\frac{c}{d}$, và $\frac{c}{d}$ có quan hệ “bằng” với $\frac{e}{f}$. Khi đó, ta có $ad = bc$ và $cf = de$; suy ra, $adf = bcf$ và $bcf = bde$. Do đó, $adf = bde$; kéo theo, $af = be$ (do $d \neq 0$). Vì thế, $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$; nghĩa là, $\frac{a}{b}$ có quan hệ “bằng” với $\frac{e}{f}$. Điều này cho thấy quan hệ “bằng” có tính bắc cầu.

Như vậy, ta đã chứng minh được, quan hệ “bằng” trên tập hợp Q là một quan hệ tương đương. Vì thế, theo định lý ở mục 1 trên đây, quan hệ đó sinh ra một phân hoạch của tập Q . Nghĩa là, ta có thể phân hoạch tập Q thành các lớp tương đương, sao cho tất cả các phân số thuộc cùng một lớp đôi một bằng nhau, và hai phân số thuộc hai lớp khác nhau không bằng nhau. Người ta gọi mỗi lớp tương đương thuộc phân hoạch ấy là một *số hữu tỉ*.

Tất cả quá trình xây dựng tập số hữu tỉ trên đây được trình bày một cách vắn tắt và cô đọng (vì lí do sơ phạm) trong sách giáo khoa Đại số lớp 7 hiện hành, như sau: Sau khi đưa ra định nghĩa *hai phân số bằng nhau* (định nghĩa này có được nhờ quan hệ “bằng”, được định nghĩa trên đây, có tính đối xứng), người ta viết “tất cả các phân số bằng nhau cùng xác định một số; số ấy được gọi là số hữu tỉ” (điều này có nghĩa là, tập hợp tất cả các phân số phân hoạch được thành các lớp tương đương, sao cho mỗi lớp gồm và chỉ gồm các phân số bằng nhau, và hai phân số thuộc hai lớp khác nhau không bằng nhau; ta gọi mỗi lớp tương đương đó là một số hữu tỉ).

• Ví dụ I.2.

Kí hiệu X là tập hợp các phương trình một ẩn, xét trên tập số thực $\mathbb{R}$ (nghĩa là, ẩn số của phương trình chỉ nhận các giá trị thực).

Cho M là một tập con của tập số thực $\mathbb{R}$.

Bạn đã biết, người ta *định nghĩa*, *tập nghiệm của một phương trình một ẩn trên M* là tập hợp tất cả các nghiệm thuộc M của phương trình đó.

Ta nói rằng, phương trình (a) có *quan hệ R* với phương trình (b), nếu *tập nghiệm trên M của phương trình (a) bằng tập nghiệm trên M của phương trình (b)*.

Dễ thấy, bằng cách trên, ta đã xác lập một quan hệ hai ngôi R trên tập X . Hơn nữa, rất dễ dàng kiểm nghiệm được rằng, quan hệ đó là một quan hệ tương đương. Bởi thế, quan hệ ấy sẽ sinh ra một phân hoạch của tập X . Nghĩa là, ta có thể phân hoạch tập X thành các lớp tương đương, sao cho hai phương trình bất kì

thuộc cùng một lớp có cùng một tập nghiệm trên M , và hai phương trình thuộc hai lớp khác nhau có tập nghiệm trên M khác nhau. Chính vì điều này, người ta gọi hai phương trình có cùng tập nghiệm trên M là hai *phương trình tương đương trên M* .

Như đã nêu ở phần đầu của bài viết này, một trong các mục đích của việc phân hoạch một tập hợp thành các lớp là nhằm tạo ra cơ hội tìm hiểu, nghiên cứu toàn bộ một lớp các phần tử của tập đó, thông qua một đại diện của lớp ấy. Như thế, có thể thấy, một trong các mục đích của việc đưa ra khái niệm phương trình tương đương trên một tập hợp là nhằm tạo ra cơ hội giải cả một lớp các phương trình trên tập đó, thông qua việc giải một phương trình của lớp ấy. Đây chính là ý tưởng của phương pháp giải phương trình nhờ các phép biến đổi tương đương. Toàn bộ quá trình sử dụng các phép biến đổi tương đương, khi bạn giải một phương trình cho trước, chính là quá trình bạn tìm đến phương trình dễ giải nhất, trong lớp tương đương chứa phương trình ấy.

Để củng cố những điều chúng ta đã trao đổi trên đây, bạn hãy giải các bài tập đơn giản sau.

Bài tập 1. Hỏi, quan hệ " $\leq$ " ("nhỏ hơn hoặc bằng") trên tập số thực $\mathbb{R}$ có những tính chất nào, trong các tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu?

Bài tập 2. Hỏi, quan hệ "trùng nhau hoặc vuông góc với nhau" trên tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng có những tính chất nào, trong các tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu?

Bài tập 3. Chứng minh rằng các tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu của một quan hệ hai ngôi, trên một tập hợp, đôi một độc lập với nhau (nghĩa là, không có tính chất nào là hệ quả của hai tính chất còn lại).

Gợi ý: Hãy chỉ ra các ví dụ cho thấy tồn tại một quan hệ hai ngôi trên một tập hợp, mà tuy có hai trong ba tính chất, nhưng không có tính chất còn lại.

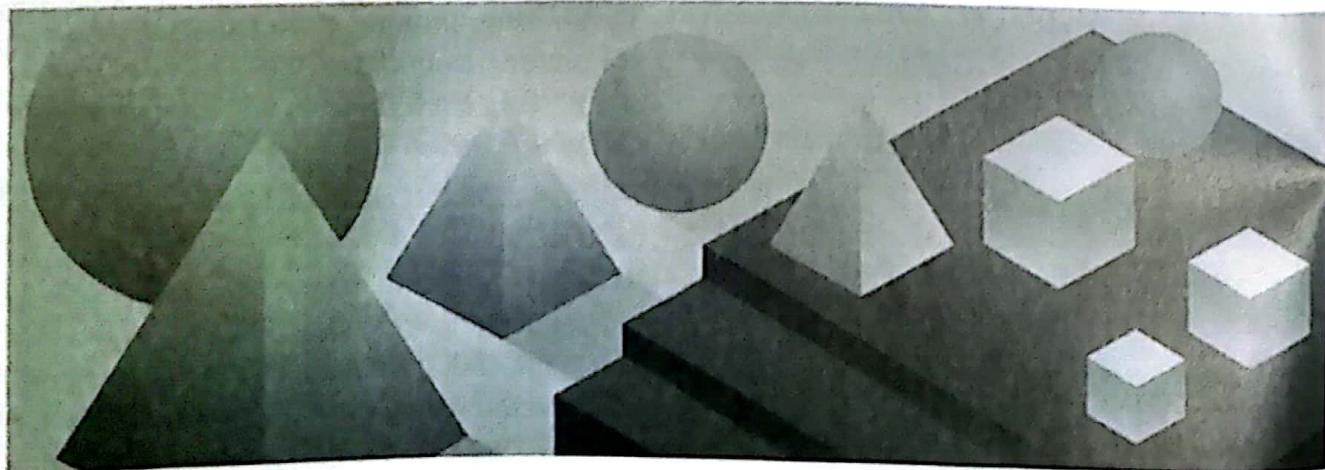
Bài tập 4. Cho tập hợp S . Cho R_1 và R_2 là hai quan hệ tương đương trên S . Hỏi quan hệ R trong mỗi trường hợp sau có phải là quan hệ tương đương trên S hay không?

- 1) Phần tử $a \in S$ được gọi là có quan hệ R với phần tử $b \in S$ khi và chỉ khi a có quan hệ R_1 với b hoặc a có quan hệ R_2 với b .
- 2) Phần tử $a \in S$ được gọi là có quan hệ R với phần tử $b \in S$ khi và chỉ khi a có quan hệ R_1 với b , và đồng thời, a có quan hệ R_2 với b .
- 3) Phần tử $a \in S$ được gọi là có quan hệ R với phần tử $b \in S$ khi và chỉ khi a có quan hệ R_1 với b , và đồng thời, a không có quan hệ R_2 với b .

Bài tập 5. Xét hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Ta nói, số thực a có quan hệ R_f với số thực b , nếu $f(a) = b$.

- 1) Bạn có thể nói gì về đồ thị của hàm số f , nếu quan hệ R_f trên $\mathbb{R}$ có tính đối xứng?
- 2) Tìm tất cả các hàm số f sao cho quan hệ R_f trên $\mathbb{R}$ là một quan hệ tương đương. Hỏi khi đó, các lớp tương đương là các tập hợp nào?

(Còn nữa)





CÁC BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH TRONG CUỐN SÁCH TOÁN HÁN NÔM ĐẠI THÀNH TOÁN HỌC CHỈ MINH CỦA PHẠM GIA KỶ

Đoàn Thị Lệ¹, Phạm Vũ Lộc², Tạ Duy Phương³

GIỚI THIỆU

Đại thành toán học chỉ minh do Sơn Tây Bộ chánh sứ Phạm Gia Kỷ (1797–?) khởi thảo, và quan Tư nghiệp Quốc tử giám Phạm Gia Chuyên (1791–1862) hiệu đính. Sách được viết khoảng sau năm 1839.

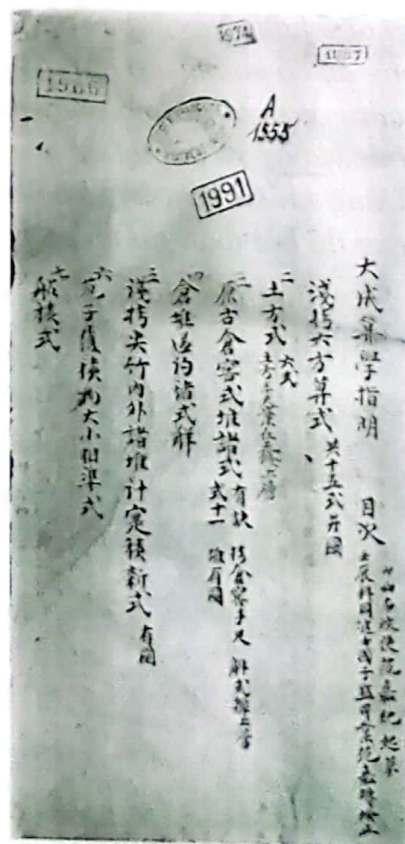
Bài viết trình bày các bài toán tính thể tích trong *Đại thành toán học chỉ minh*, có tham chiếu với một số sách toán cổ của Việt Nam và Trung Hoa, qua đó phần nào làm sáng tỏ câu hỏi: *Người Việt Nam xưa đã tính toán diện tích, thể tích các hình và ứng dụng toán học vào đời sống như thế nào?*

Hiện chỉ có duy nhất một bản *Đại thành toán học chỉ minh* viết tay chữ Hán trong thư viện Hán Nôm dày 57 trang dúp. Trong bài viết, chúng tôi đánh số theo cách đánh số của sách Hán Nôm và trích dẫn: trang 9b, nghĩa là: trang 9b trong [7], *Đại thành toán học chỉ minh*.

Để bài viết được ngắn gọn và sáng sủa, dễ hiểu với bạn đọc là học sinh phổ thông, chúng tôi sử dụng các kí hiệu và ngôn ngữ hiện đại, mặc dù phương pháp giải vẫn trung thành với

bản gốc. Bạn đọc muốn tìm hiểu kĩ hơn có thể xem trực tiếp [7].

Trang đầu tiên của *Đại thành toán học chỉ minh*, thư viện Viện NC Hán Nôm, kí hiệu A.1555:



¹ Đại học Thanh Hoa, Đài Loan.

² Trung tâm Vũ trụ Việt Nam, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

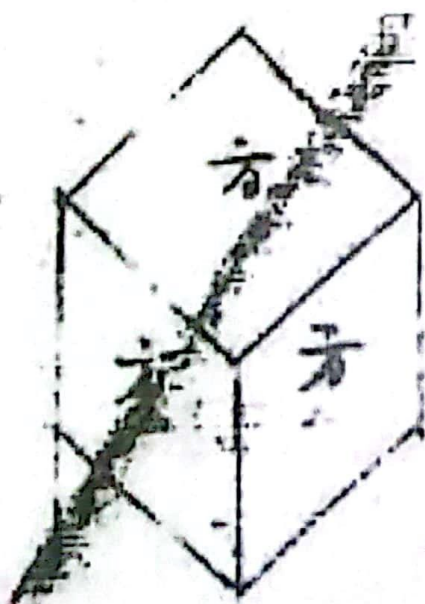
³ Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

CÁC BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH TRONG ĐẠI THÀNH TOÁN HỌC CHỈ MINH

Mục 1 của Đại thành toán học chỉ minh được mở đầu với tên gọi Toán hình sáu mặt (lục phương): tính thể tích các khối đa diện sáu mặt (khối lập phương, khối hộp chữ nhật, khối lăng trụ, khối lăng trụ lệch,...). Các khối đa diện sáu mặt được phân loại thành 15 dạng khác nhau, mà theo A. Volkov (xem [5]) thì, sự phân loại này không tìm thấy trong các sách Trung Hoa: "section 1 contains a classification of rectilinear solids containing 15 different types, to the best of my knowledge, not found in the extant Chinese treatises."

Phạm Gia Kỷ viết (xem [7], trang 2b): "Cách này (công thức chung tính thể tích các khối đa diện) từ xưa không có, nhưng tính toán sơ lược thì đã đạt được, nên cách tính chưa đủ. Nay nhân việc khảo cứu hết, biên tập thành bài, dùng cách đo sáu mặt (lục diện thì độ), nên gọi là lục phương. Trong đó, có hình dạng vuông mà dài rộng không bằng nhau thì bài mỗi cái khác nhau. Nay lược chia thành 15 dạng, trong đó có vuông, có dài, có nghiêng, trong khoảng ba cái đó mà chia thành bài toán. Đại để vuông và dài thì dễ, mà nghiêng thì khó. Càng nhiều lại càng khó. Đến như đều nghiêng thì bài toán rất phiền vậy."

Dạng 1: Sử dụng các công thức tính thể tích khối lăng trụ



Bài 1 (trang 9b) Nay có kho vuông, (đáy) vuông 12 thước, cao 9 thước, hỏi (chứa) bao nhiêu gạo?

Giải: 1 thạch = 1,5 thước khối. Thể tích kho vuông (khối hộp chữ nhật có đáy vuông) là:

$$V = a^2h = 12 \times 12 \times 9 = 1296 \text{ thước khối.}$$

Vậy kho chứa được:

$$1296 : 1,5 = 864 \text{ thạch gạo.}$$

Chú ý: Phạm Gia Kỷ coi 1 thạch bằng 1.5 khối.

Bài 2 (trang 10a) Kho dài 18 thước, rộng 9 thước, cao 8 thước, chứa được bao nhiêu thóc?

Giải: Thể tích kho (hộp) chữ nhật là:

$$V = abc = 18 \times 9 \times 8 = 1296 \text{ thước khối.}$$

Vậy kho chứa được:

$$1296 : 1,5 = 864 \text{ thạch gạo.}$$

Bài 3 (trang 10a) Nay có kho dài 28 thước, rộng 18 thước, cao 12 thước, (hỏi) tích được bao nhiêu thạch thóc?

Giải: Thể tích kho (hộp chữ nhật) là:

$$V = abc = 28 \times 18 \times 12 = 6048 \text{ thước khối.}$$

Vậy kho chứa 6048 : 1,5 = 4032 thạch.

Bài 4 (trang 8b) Nay có một đồng đất dài 3 trượng, rộng 4 thước, cao 9 thước, muốn cắt thành miếng dài 1 thước, rộng 5 thốn, dày 2 thốn. Hỏi cắt được mấy miếng?

Giải: 1 trượng = 10 thước = 100 thốn.

Thể tích đồng đất (hộp chữ nhật) là:

$$V = abc = 300 \times 40 \times 90 = 1080000 \text{ thốn.}$$

Thể tích miếng cắt (hộp chữ nhật) là:

$$V' = a'b'c' = 10 \times 5 \times 2 = 100 \text{ thốn.}$$

Số miếng cắt được là:

$$V : V' = 1080000 : 100 = 10800 \text{ miếng.}$$

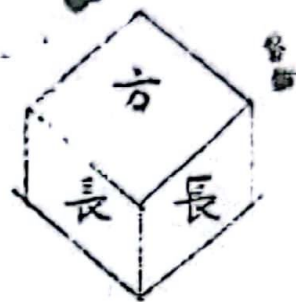
Nhận xét: Có thể hiểu các miếng cắt là những viên đất để nung thành gạch (1 vạn 800 viên).

式五

式四

式三

式二



Bài 5 (trang 7a) Nay khơi sông dài 6450 thước. Trên rộng 60 thước, dưới rộng 52 thước, sâu 15 thước. Mỗi ngày một công khơi 280 thước. Hỏi khơi tất cả bao nhiêu thước, tính ra dùng bao nhiêu công?

Giải: Coi mặt cắt của sông là một hình thang. Thể tích sông được tính theo công thức thể tích lăng trụ đứng có đáy hình thang $V = S_d h$:

$$V = \frac{60 + 52}{2} \times 15 \times 6450 = 5418000 \text{ thước.}$$

Số ngày công cần để khơi xong sông là:

$$5418000 : 280 = 19350 \text{ công.}$$

Bài 6 (trang 7b) Nay khơi đất sâu, trên rộng 2 trượng 4 thước, dưới rộng 2 trượng 1 thước, sâu 9 thước, dài 3840 thước. Dùng 12 phu mỗi ngày khơi 600 thước. Hỏi mấy ngày hoàn thành công việc và bao nhiêu phu?

Giải: Khối lượng đất V đào được là thể tích lăng trụ đứng có đáy là hình thang $V = S_d h$:

$$V = \frac{24 + 21}{2} \times 9 \times 3840 = 777600 \text{ thước khối.}$$

Số thước khối một phu đào được trong một ngày là:

$$600 : 12 = 50 \text{ thước khối.}$$

Số ngày công cần để khơi xong sông là:

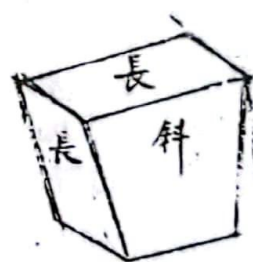
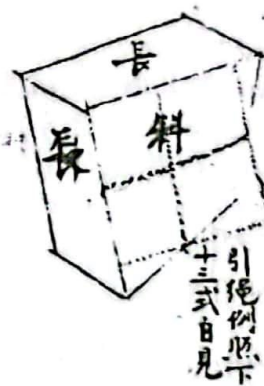
$$777600 : 50 = 15552 \text{ công.}$$

Nếu mỗi ngày dùng 12 người thì mất:

$$777600 : 600 = 1296 \text{ ngày (hơn 3 năm).}$$

式七

式六



Bài 7 (trang 10a) Nay có hố trên vuông 8 thước, dưới vuông 10 thước, cao 12 thước, (hỏi) tích được bao nhiêu thạch thóc?

Giải: Áp dụng công thức tính thể tích hình chóp cụt tứ giác đều

$$V = \frac{1}{3} (B + B' + \sqrt{BB'}) h = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + ab) h$$

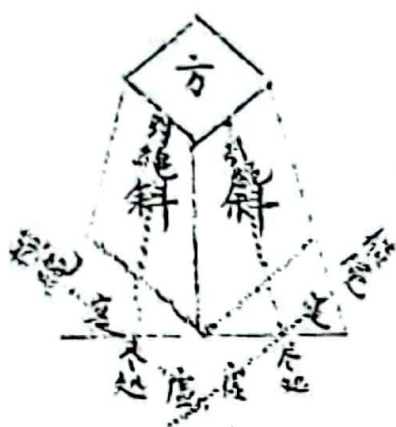
với $a = 8$, $b = 10$, $h = 12$ (thước) ta được

$$V = \frac{1}{3} (8^2 + 10^2 + 8 \times 10) \times 12 = 976 \text{ thước khối.}$$

Vậy kho tích được:

$$976 : 1.5 = 650.66... \text{ thạch} = 650 \text{ thạch 6 đấu.}$$

式十



式九



式八



Bài 8 (trang 8a) Nay khơi ao, đào đất luận công, tổng cộng đào thông ba tầng. Tầng trên dài 40 trượng, rộng 26 trượng, sâu 1 thước 2 thốn. Tầng giữa dài 38 trượng, rộng 24 trượng, sâu 9 thốn. Tầng dưới dài 36 trượng, rộng 22 trượng, sâu 8 thốn. Mỗi chiều dài 1 trượng, rộng 1 trượng, sâu 1 thước là một phương. Một công đào được 3 phương. Mỗi công giá 4 phân 4 li bạc. Hỏi bao nhiêu phương và giá bao nhiêu?

Giải: Tổng thể tích đất đào được

$$V = 40 \times 26 \times 1.2 + 38 \times 24 \times 0.9 + 36 \times 22 \times 0.8 \\ = 2702.4 \text{ phương} : 3 = 900.8 \text{ công.}$$

Vậy số tiền phải trả là $900.8 \times 44 = 39635.2$ li, tức là 39 lạng 6 tiền 3 phân 5 li 2 hào.

Công thức tính thể tích hình lăng trụ lệch

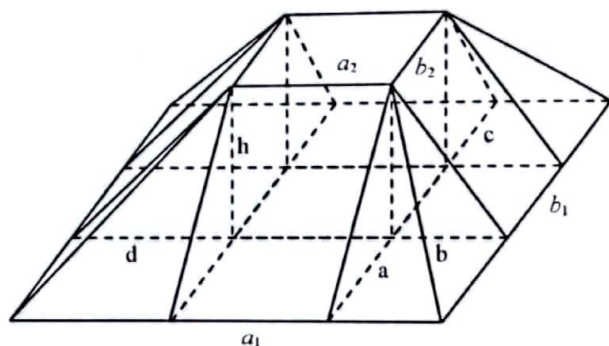
Lăng trụ lệch ở đây được hiểu là lăng trụ có hai mặt là các hình chữ nhật song song, bốn mặt còn lại (các mặt bên) là những hình thang. Gọi a_1, b_1, a_2, b_2 tương ứng là chiều dài, chiều rộng của mặt dưới và mặt trên, h là chiều cao hình lăng trụ lệch (xem hình dưới đây).

Ta có công thức tính thể tích hình lăng trụ lệch là:

$$V = [(2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2] \frac{h}{6}. \quad (1)$$

Có thể dùng phương pháp chia cắt để đưa công thức trên về các công thức đã biết đối

với hình lăng trụ đứng. Chúng tôi dành cho bạn đọc việc chứng minh công thức đó¹.



Bài 9 (trang 7a) Nay đắp đê một đoạn, trên rộng 6 thước, dài 1 trượng 5 thước; dưới rộng 1 trượng 4 thước, dài 2 trượng 7 thước, cao 1 trượng 4 thước. (Hỏi) tích đất ngần nào?

Giải: Đê có dạng lăng trụ lệch. Áp dụng công thức (1) với $a_2 = 15, b_2 = 6, a_1 = 27, b_1 = 14$ (thước) tương ứng là chiều dài, chiều rộng của mặt trên và mặt dưới, $h = 14$ là chiều cao (thước), ta được

$$V = [(2 \times 15 + 27) \times 6 + (2 \times 27 + 15) \times 14] \\ : 6 \times 14 \\ = 3052 \text{ thước khối.}$$

Bài 10 (trang 10b) Nay có hố trên dài 19 thước, dưới dài 21 thước; trên rộng 9 thước, dưới rộng 12 thước, cao 9 thước. Hỏi hố chứa được bao nhiêu thóc?

¹ Bạn đọc có thể tham khảo thêm [1] hoặc [6]

Giải: Áp dụng công thức (1) cho lăng trụ lệch với $a_2 = 19, b_2 = 9, a_1 = 21, b_1 = 12$ (thước) tương ứng là chiều dài, chiều rộng của mặt trên và mặt dưới, $h = 9$ (thước) là chiều cao, ta được

$$V = [(2 \times 19 + 21) \times 9 + (2 \times 21 + 19) \times 12] : 6 \times 9 \\ = 1894.5 \text{ thước khối.}$$

Vậy hồ chứa $1894.5 : 1.5 = 1263$ thạch thóc.

Dạng 2: Sử dụng các công thức tính thể tích khối trụ, nón, nón cụt

Chú ý: Số π trong Đại thành toán học chỉ mình được tính gần đúng bằng 3.

Bài 11 (trang 10b) Có kho tròn chu vi 42 thước, cao 12 thước. (Hỏi) tích được bao nhiêu thóc?

Giải: Diện tích hình tròn được tính theo công thức $S = \pi R^2 = \frac{p^2}{12}$ (với $\pi = 3, p$ là chu vi).

Thể tích hình trụ được tính theo công thức

$$V = \frac{p^2}{12} h.$$

Thể tích kho thóc (hình trụ) là:

$$V = \frac{42 \times 42}{12} \times 12 = 1764 \text{ thước khối.}$$

Số thóc tích được là: $1764 : 1,5 = 1176$ thạch.

Nhận xét. Sai số giữa π và 3 là khoảng 4,7%. Vì thế sai số của lời giải trên là khoảng

$$1176 \times 0,047 \approx 55 \text{ thạch.}$$

Bài 12 (trang 14a) Nay có một chiếc chiếu quây tròn, tích đầy 5 thạch 6 đấu. Hỏi một cặp chiếu quây tròn chứa được bao nhiêu?

Giải: Chiều dài của chiếu chính là chu vi đáy của hình trụ khi quây tròn chiếu, $p = 2\pi R$.

Thể tích hình trụ $V = \pi R^2 h = \frac{p^2}{4\pi} h$.

Khi có hai chiếu quây lại thì ta được

$$V' = \frac{(2p)^2}{4\pi} h = 4 \frac{p^2 h}{4\pi} = 4V.$$

Vậy một cặp chiếu quây được

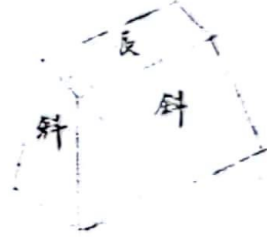
$$5,6 \times 4 = 22,4 \text{ thạch} = 22 \text{ thạch 4 đấu.}$$

Nhận xét: Trong bài toán này tác giả đã vận dụng mối liên hệ cơ bản giữa diện tích và chu vi đường tròn: khi chu vi tăng gấp đôi thì diện tích tăng gấp bốn lần, vì thế không cần sử dụng đến số π , kết quả nhận được là chính xác tuyệt đối. Bài toán tiếp theo là bài toán ngược của bài toán vừa nêu.

式二十



式二十



Bài 13 (trang 14b) Nay có thóc 22 thạch 4 đấu. Trước tiên dùng một chiếc chiếu quây tròn, tích đầy 5 thạch 6 đấu. Hỏi muốn hết số thóc thì cần mấy cái chiếu?

Giải: $\frac{V'}{V} = \frac{p'^2 h}{4\pi} : \frac{p^2 h}{4\pi} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \frac{22,4}{5,6} = 4$. Suy ra $p' = 2p$. Cần 2 chiếu để quây hết số thóc.

Bài 14 (trang 11a) Nay có thóc gom trên đất phẳng thành đồng nhọn, chu vi dưới 24 thước, cao 9 thước, (hỏi) tích được bao nhiêu thóc?

Giải: Thể tích đồng thóc (có dạng hình nón) là:

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{p^2}{36} h = \frac{24 \times 24}{36} \times 9 = 144 \text{ khối.}$$

Số thóc tích được là $144 : 1,5 = 96$ thạch.

Bài 15 (trang 11a) Nay có một đồng thóc dựa tường, chu vi dưới 12 thước, cao 6 thước, (hỏi) tích được bao nhiêu thóc?

Giải: Thể tích đồng thóc dựa tường bằng nửa thể tích hình nón, chu vi p' của đồng thóc là

$p' = \frac{p}{2}$, trong đó p là chu vi hình nón. Vậy thể tích hình nón bằng

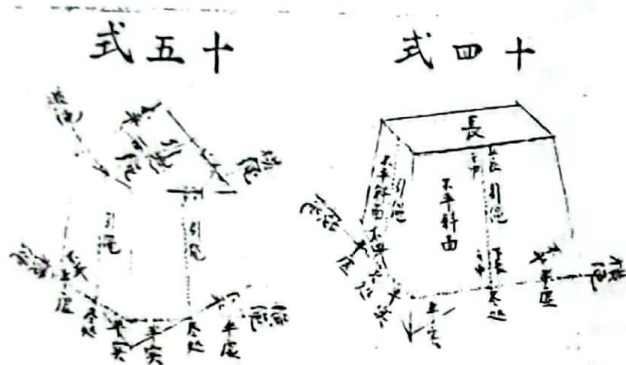
$$V = \frac{p^2}{36} \times h = \frac{p'^2}{9} h$$

và thể tích đồng thóc dựa tường bằng

$$V' = \frac{1}{2} V = \frac{p'^2}{18} h.$$

Áp dụng: $V' = \frac{12 \times 12}{18} \times 6 = 48$ thước khối.

Số thóc tích được là $48 : 1,5 = 32$ thạch.



Bài 16 (trang 11b) Nay có (đồng) thóc ở góc tường trong, chu vi dưới 9 thước, cao 7 thước, (hỏi) tích được bao nhiêu thóc?

Giải: Thể tích đồng thóc trong góc tường (góc vuông trong nhà) bằng một phần tư thể tích hình nón, còn chu vi p' của đồng thóc $p' = \frac{p}{4}$, trong đó p là chu vi hình nón. Vậy thể tích hình nón bằng

$$V = \frac{p^2}{36} \times h = \frac{(4p')^2 h}{36} = \frac{4p'^2 h}{9}$$

và thể tích đồng thóc trong góc tường bằng

$$V' = \frac{1}{4} V = \frac{p'^2 h}{9}.$$

Áp dụng: $V' = \frac{9 \times 9}{9} \times 7 = 63$ thước khối.

Số thóc tích được là $63 : 1,5 = 42$ thạch.

Bài 17 (trang 11b) Nay có (đồng) gạo ở góc tường ngoài, chu vi dưới 24 thước, cao 7 thước 5 thốn, (hỏi) tích được bao nhiêu gạo?

Giải: Thể tích V' của đồng gạo ở góc tường ngoài (bỏ đi một góc phần tư trong nhà) bằng $\frac{3}{4} V$, trong đó V là thể tích hình nón. Nhưng chu vi đáy p' của đồng gạo bằng $p' = \frac{3}{4} p$, hay $p = \frac{4}{3} p'$, trong đó p là chu vi đáy của hình nón. Vậy thể tích hình nón bằng

$$V = \frac{p^2}{36} \times h = \frac{\left(\frac{4}{3} p'\right)^2 h}{36} = \frac{4p'^2 h}{81}$$

và thể tích đồng thóc ở góc tường (ngoài) bằng

$$V' = \frac{3}{4} V = \frac{p'^2 h}{27}.$$

Áp dụng:

$$V' = \frac{24 \times 24}{27} \times 7,5 = 160 \text{ thước khối.}$$

Số thóc tích được là

$160 : 1,5 = 106,6666... = 106$ thạch 6 đấu 66...

Nhận xét. Trong ba bài toán trên tác giả đã vận dụng quy tắc mà ngày nay chúng ta gọi là mô hình hóa toán học, trong đó các đồng thóc trong từng trường hợp được mô hình như các hình nón hoặc một phần của chúng.

Bài 18 (trang 11a) Nay có hồ tròn trên chu vi 14 thước, dưới chu vi 18 thước, sâu 9 thước, (hỏi) tích được bao nhiêu thóc?

Giải: Theo công thức tính thể tích hình nón cụt

$$V = \frac{(B + B' + \sqrt{BB'})}{3} h = \frac{(p^2 + p'^2 + pp')}{36} h,$$

với $B = \frac{p^2}{12}$, $p = 14$, $p' = 18$, $h = 9$ (thước), ta được

$$V = \frac{(14^2 + 18^2 + 14 \times 18)}{36} \times 9 = 193 \text{ khối.}$$

Số thóc tích được:

$193 : 1,5 = 128,6666 = 128$ thạch 6 đấu 6 cáp 66 (1 thạch = 10 đấu = 100 cáp).

Bài 19 (trang 7b) *Nay có đất ruộng, đông dài 5 trượng 3 thước, tây dài 6 trượng 3 thước, nam dài 7 trượng, bắc dài 8 trượng, khơi sâu 2 thước. Tính đất bao nhiêu phương?*

Giải: Sử dụng công thức tính diện tích tứ giác lồi

$$S = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}, \quad (2)$$

trong đó a, b, c, d là các cạnh của tứ giác, ta được:

$$\begin{aligned} V = S \times h &= \frac{5,3 + 6,3}{2} \times \frac{7 + 8}{2} \times 2 \\ &= 43,5 \times 2 = 87 \text{ phương.} \end{aligned}$$

Nhận xét. Công thức (2) trong lời giải trên là một công thức từ kinh nghiệm thực tế. Có thể tìm thấy công thức này trong các văn bản viết trên giấy cói (rind papyrus) vào khoảng 1550 trước công nguyên và trên các hình vẽ trong ngôi đền Horus tại Edfu (Ai Cập) vào khoảng 100 năm trước công nguyên (xem [3], trang 54), trong các cuốn sách của Trung Hoa (xem [4], trang 325) và Việt Nam (xem [2]). Sai số của công thức này khá lớn. Chẳng hạn bạn đọc có thể thực hiện bài tập sau.

Bài tập. *Hãy chỉ ra ví dụ hình bình hành mà diện tích thực của nó so với diện tích tính theo công thức (2) có sai số lên tới 50%, 70%, 90%.*

Thay lời kết Trên thực tế, chu vi dễ đo hơn bán kính, do đó trong sách toán cổ diện tích hình tròn thường được tính qua chu vi. 19 bài toán tính thể tích trong *Đại thành toán học*

chỉ mình có lẽ đều được lấy từ những bài toán thực tế, với số liệu thực (đào ao, đào sông, đắp đê, ...). Sử dụng lâu dài và phổ biến một công thức sai (công thức (2)) cho thấy việc giải quyết mối quan hệ và tỉ lệ thời lượng giữa toán học kinh nghiệm (empirical mathematics) và toán học kinh viện trong giảng dạy toán học có lẽ cũng cần được quan tâm và giải quyết thỏa đáng.

Tài liệu trích dẫn

[1] Ngô Hân, *Công thức vạn năng*, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 37 (tháng 10, 1967), trang 13–16.

[2] Tạ Duy Phương, Mai Văn Thu, *Về sử dụng một công thức tính diện tích tứ giác trong các sách toán cổ*, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 4.2019.

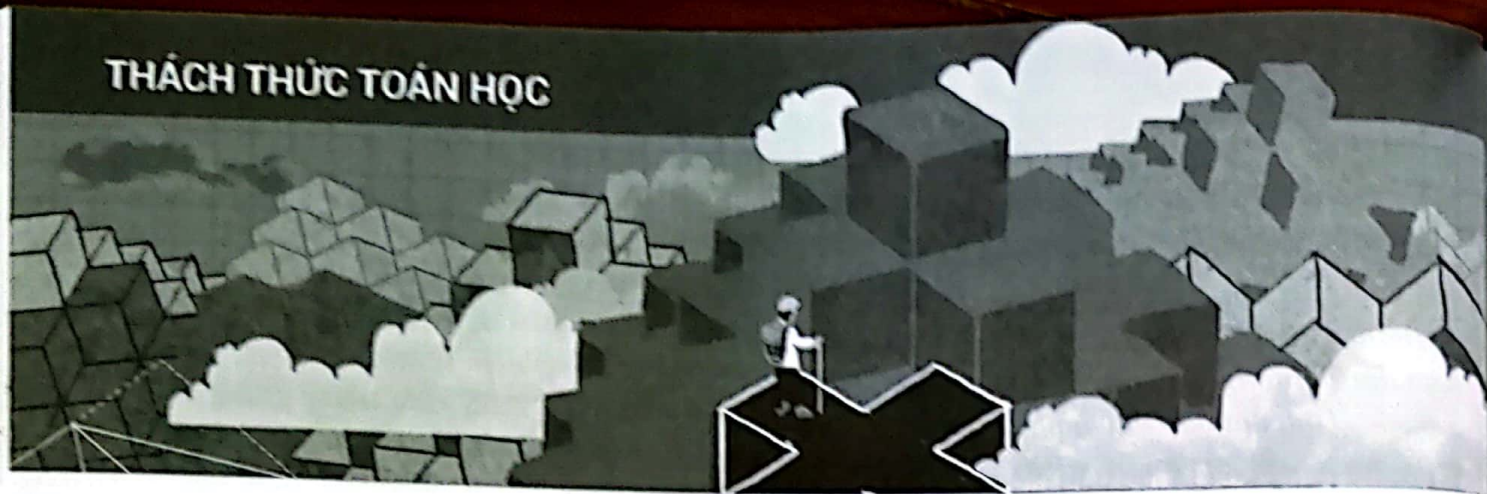
[3] David M. Burton, *The History of Mathematics: Introduction*, Seventh Edition, Mc Graw Hill, 2011.

[4] Jean – Claude Marzloff, *History of Chinese Mathematics*, Springer – Verlag, Berlin, 2007.

[5] A. Volkov, *History of Mathematics and Mathematics Education in Vietnam: The State of the Field* (Invited Plenary Lecture), International Conference on Mathematical Education Vietnam 2015 (ICME Vietnam 2015), Hanoi, December 19–20, 2015.

[6] E. I. Berezina, Bản dịch và Chú giải *Cửu chương toán thuật* của Liu Hui (chữ Hán, thế kỉ III), in trong Nghiên cứu lịch sử toán học, Tập 10, Nhà xuất bản sách Khoa học, Moscow, 1957, trang 425–586 (tiếng Nga).

[7] Phạm Gia Kỷ, *Đại thành toán học chỉ mình* (tiếng Hán), Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Kí hiệu: A.1555.



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.
- Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của “Thách thức kỳ này” chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

Dành cho cấp THCS

P271. Đường tròn (ω) đi qua các đỉnh B và C của tam giác ABC , tương ứng, cắt các cạnh AB và AC tại các điểm C_1 và B_1 . Gọi X là trung điểm cung B_1BC , và Y là trung điểm cung BCC_1 , của (ω) . Hãy xác định góc giữa đường thẳng XY và đường phân giác trong của góc CAB .

A. Voidelevich (CH Belarus)

P272. Cho a và b là các số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương m, n , số $am^2 + bn^2$ là một số chính phương. Chứng minh rằng $ab = 0$.

Lưu Thanh Hà (Kiên Giang) st.

P273. Cho a, b, c là các số thực khác $\frac{1}{2}$, và

thỏa mãn điều kiện:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2a-1)^2} + \frac{1}{(2b-1)^2} + \frac{1}{(2c-1)^2} \geq 2.$$

Nguyễn Việt Hùng (Hà Nội)

P274. Cho bảng ô vuông kích thước 3×3 (bảng gồm ba hàng và ba cột). Ta gọi cạnh của mỗi ô vuông con của bảng là một đoạn đơn vị. Hỏi phải xóa đi ít nhất bao nhiêu đoạn đơn vị để ở phần còn lại của bảng không có một hình vuông nào?

Phạm Việt Hùng (Hà Nội)

Dành cho cấp THPT

P275. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tương ứng, tiếp xúc với các cạnh AC và BC tại các điểm P và Q . Gọi N và M , tương ứng, là trung điểm của AC và BC . Gọi X là giao điểm của AM và BP ; Y là giao điểm của BN và AQ . Chứng minh rằng, nếu C, X, Y thẳng hàng thì CX là phân giác trong của góc ACB .

I. Gorodnin (CH Belarus)

P276. Cho phương trình:

$$x^3 + x + \frac{1}{x} = 6.$$

a) Chứng minh rằng, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt; gọi là α, β .

b) Hãy tính số trị của biểu thức:

$$P = \alpha + \beta + \alpha\beta.$$

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh)

P277. Cho đa thức $P(x)$ và cho các số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, thỏa mãn $a_1 a_2 a_3 \neq 0$. Chứng minh rằng, nếu với mọi số thực x , ta có

$$P(a_1 x + b_1) + P(a_2 x + b_2) = P(a_3 x + b_3),$$

thì $P(x)$ có ít nhất một nghiệm thực.

Lê Huy (Nam Định) st.

P278. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xf(y-x)) = f(yf(x)) - x^2,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Trần Văn Trí (Bình Dương)

P279. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu

$$S_n = 1! + 2! + \dots + n!.$$

Chứng minh rằng, tồn tại số nguyên dương k sao cho S_k có ít nhất một ước nguyên tố lớn hơn 3^{2019} .

Trần Song An (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P280. Có một hội gồm n cặp vợ chồng ($n \geq 3$) đôi một quen biết lẫn nhau. Hàng năm, vào ngày 8/3, mỗi ông chồng đều tặng một số bông hồng (ít nhất là một bông) cho mỗi bà vợ trong hội (kể cả vợ mình). Một bà vợ sẽ cảm thấy bức mình, nếu số bông hồng mà bà ấy được chồng mình tặng ít hơn tổng số bông hồng mà ông ấy đã tặng $n-1$ bà vợ khác trong hội.

Sau ngày 8/3 năm nay, người ta thấy rằng, có thể phân chia tất cả n ông chồng thành hai nhóm, sao cho với mỗi bà vợ, tổng số bông hồng mà bà ấy được các ông chồng thuộc nhóm này tặng đúng bằng tổng số bông hồng mà bà ấy được các ông chồng thuộc nhóm kia tặng. Chứng minh rằng, trong ngày 8/3 năm nay, đã có ít nhất một bà vợ trong hội cảm thấy bức mình.

Hà Thanh (Cần Thơ) st.

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P241. Cho M là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC . Gọi D là hình chiếu vuông góc của B trên phân giác trong của góc $\angle BMA$; gọi E là hình chiếu vuông góc của C trên phân giác trong của góc $\angle AMC$. Tia MA cắt đoạn DE tại điểm F . Hãy tính tỷ số $\frac{DF}{FE}$.

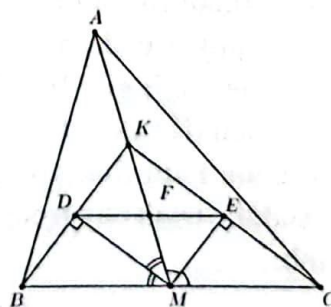
(Điểm Y được gọi là hình chiếu vuông góc của điểm X trên đường thẳng d , nếu Y nằm trên d và $XY \perp d$.)

Lời giải (của người chấm bài).

Gọi K là giao điểm của BD và AM .

Khi đó, theo giả thiết, tam giác BMK có MD vừa là phân giác trong, vừa là đường cao kẻ từ đỉnh M ; vì thế, tam giác đó cân tại M . Suy

ra, $MB = MK$; mà $MB = MC$ (theo giả thiết), nên $MK = MC = MB$. Vì thế, CMK là tam giác cân tại M , và BKC là tam giác vuông tại K .



Vì tam giác CMK cân tại M , và ME là phân giác trong xuất phát từ đỉnh đó (theo giả thiết), nên ME cũng đồng thời là đường cao xuất

phát từ đỉnh ấy. Nghĩa là, ta có $ME \perp CK$. Mà $ME \perp CE$ (theo giả thiết), nên suy ra ba điểm C, E, K thẳng hàng. Do đó, $\angle MEK = 90^\circ$ và $\angle DKE = 90^\circ$ (do tam giác BKC vuông tại K , theo chứng minh trên). Kết hợp điều này với giả thiết $MD \perp BK$, suy ra tứ giác $DMEK$ là tứ giác có ba góc vuông. Vì thế, tứ giác đó là một hình chữ nhật. Do đó, giao điểm F của hai đường chéo DE, MK là trung điểm của mỗi đường. Bởi thế, ta có:

$$\frac{DF}{FE} = 1.$$

Bình luận và Nhận xét.

1. Bài đã ra là một bài toán cơ bản; giúp các bạn học sinh THCS ôn lại các tính chất của một tam giác cân, các dấu hiệu nhận biết tam giác vuông, hình chữ nhật,

2. Như mọi bài toán hình học khác, đối với bài đã ra cũng có nhiều hướng tiếp cận để giải bài. Ngoài hướng giải đã nêu trên, còn có thể giải bài đã ra, chẳng hạn, bằng cách chứng minh $DE \parallel BC$, rồi sử dụng định lý Thales để tìm ra

$$\frac{DF}{FE} = \frac{BM}{MC} = 1;$$

hay như, chứng minh các tam giác BDM , MEC và EMD đôi một bằng nhau, từ đó chứng minh FDM và FEM là các tam giác cân tại F , rồi suy ra tỉ số cần tính; ...

3. Tòa soạn nhận được nhiều lời giải cho bài đã ra, từ các bạn học sinh THCS, cũng như THPT. Tất cả các lời giải đó đều là lời giải đúng, và đều có hướng giải như đã nêu ở mục 2 trên đây. Một nhược điểm chung của tất cả các lời giải là có phần rườm rà, dài dòng, do các bạn chưa tận dụng triệt để các giả thiết của bài toán, trong quá trình giải bài. Một trong những nguyên nhân dẫn đến điều này có thể là do các bạn chưa nắm thật vững các kiến thức cơ bản, đã được trình bày trong sách giáo khoa hiện hành.

Hạ Vũ Anh

P242. Tìm tất cả các số thực a sao cho phương trình (ẩn x)

$$2x^3 - 15x^2 - (4a - 25)x + 10a = 0$$

có ba nghiệm thực đôi một phân biệt x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), thỏa mãn điều kiện:

$$x_1^2 + 8x_2 + x_3^2 = 83.$$

Lời giải (của người chấm bài).

Với mọi số thực a , phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(2x - 5)(x^2 - 5x - 2a) = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ x^2 - 5x - 2a = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x^2 - 5x - 2a = 0. \end{cases}$$

Như vậy, với mọi số thực a , phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = \frac{5}{2}$. Vì thế, phương trình đó có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (ẩn x)

$$x^2 - 5x - 2a = 0 \quad (2)$$

có hai nghiệm phân biệt, khác $\frac{5}{2}$.

Theo định lý Vi-et, khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, thì hai nghiệm đó có tổng bằng 5; do đó, một trong hai nghiệm nhỏ hơn $\frac{5}{2}$, và nghiệm còn lại lớn hơn $\frac{5}{2}$.

Từ đó suy ra, phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), thỏa mãn điều kiện

$$x_1^2 + 8x_2 + x_3^2 = 83$$

khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_3 , thỏa mãn

$$x_1^2 + 8 \cdot \frac{5}{2} + x_3^2 = 83,$$

hay

$$x_1^2 + x_3^2 = 63. \quad (3)$$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_3 khi và chỉ khi:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2a) = 25 + 8a > 0.$$

Với x_1, x_3 là hai nghiệm của phương trình (2), theo định lý Vi-et, ta có

$$x_1^2 + x_3^2 = (x_1 + x_3)^2 - 2x_1x_3 = 5^2 - 2 \cdot (-2a) = 25 + 4a.$$

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_3 , thỏa mãn (3), khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 25 + 8a > 0 \\ 25 + 4a = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{25}{8} \\ a = \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{19}{2}.$$

Vậy, $a = \frac{19}{2}$ là giá trị a duy nhất thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. Trong lời giải trên, ta đã sử dụng kết quả đơn giản, quen thuộc sau, khi khẳng định, trong hai nghiệm của phương trình (2) có một nghiệm nhỏ hơn $\frac{5}{2}$, và nghiệm còn lại lớn hơn $\frac{5}{2}$:

“Nếu α, β là hai số phân biệt, và $\alpha + \beta = m$, thì một trong hai số đó nhỏ hơn $\frac{m}{2}$, và số còn lại lớn hơn $\frac{m}{2}$.”

Có thể dễ dàng chứng minh kết quả trên, bằng phương pháp phản chứng.

2. Tuy bài đã ra là một bài toán rất gần gũi với các bài toán mà các bạn học sinh lớp 9 thường luyện tập, về ứng dụng của định lý Viète trong việc tính số trị của các biểu thức nghiệm của một phương trình đa thức, số lời giải cho bài đã ra, mà Tòa soạn nhận được, khá ít. Đây thực sự là một tín hiệu không vui.

3. Các lời giải mà Tòa soạn nhận được đều có một nhược điểm chung là có phần rườm rà, dài dòng, luẩn quẩn. Điều đặc biệt là, chúng ta cần một điều kiện cần và đủ cho a , các kết quả mà chúng ta vận dụng để tìm ra điều kiện cần và đủ đó cũng là các điều kiện cần và đủ, thế nhưng, không một lời giải nào được trình bày theo mạch cần và đủ đồng thời. Nói cách khác, các lời giải đều được trình bày theo hướng tách riêng điều kiện cần và điều kiện đủ. Đây chính là nguyên nhân làm cho các lời giải mắc nhược điểm nêu trên. Phải chăng, do các bạn thiếu cái nhìn tổng quan khi giải bài toán, hoặc do các bạn chưa có thói quen tiết kiệm trong việc vận dụng các kiến thức

đã biết, trong giải toán?

4. Một số lời giải thiếu phần thử lại giá trị a tìm được, mặc dù mạch suy luận dẫn tới việc tìm ra giá trị đó là mạch “suy ra”. Những lời giải như thế, hiển nhiên, không được coi là lời giải đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

Lời bàn.

Bài toán P242 trên đây có thể được xem như một gợi ý cho các thầy, cô giáo cấp THCS trong việc tạo ra các tình huống toán học mới, từ các tình huống chuẩn mực, cơ bản về tính số trị của các biểu thức đối xứng của hai nghiệm của một phương trình bậc hai, nhờ sử dụng định lý Viète (như tính tổng bình phương, tổng lập phương của hai nghiệm, ...), nhằm giúp học sinh làm quen với các ứng dụng tế nhị hơn của định lý này.

Nhóm TTTH

P243. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho khi chia n cho 29, 41 và 59, ta sẽ được các số dư r_1, r_2 và r_3 thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$1/ r_1, r_2, r_3 > 0;$$

$$2/ r_1 + r_2 + r_3 = n.$$

Lời giải (dựa theo lời giải của người đề xuất bài toán).

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} n &= 29q_1 + r_1 = 41q_2 + r_2 = 59q_3 + r_3 \\ &= r_1 + r_2 + r_3; \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó, $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$, và r_1, r_2, r_3 là các số nguyên dương, thỏa mãn $r_1 \leq 28, r_2 \leq 40, r_3 \leq 58$.

Suy ra

$$0 < r_1 + r_2 = 59q_3 \leq 28 + 40 = 68;$$

$$0 < r_1 + r_3 = 41q_2 \leq 28 + 58 = 86.$$

Do đó, ta có:

+) $0 < q_3 \leq \frac{68}{59}$; mà $q_3 \in \mathbb{N}$, nên $q_3 = 1$. Vì thế

$$r_1 + r_2 = 59. \quad (2)$$

+) $0 < q_2 \leq \frac{86}{41}$; mà $q_2 \in \mathbb{N}$, nên $q_2 \in \{1; 2\}$.

Xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $q_2 = 1$. Khi đó, ta có:

$$r_1 + r_3 = 41q_2 = 41.$$

Kết hợp với (1) và (2), suy ra

$$\begin{aligned} 100 &= 59 + 41 = r_1 + r_2 + r_1 + r_3 \\ &= n + r_1 = 29q_1 + 2r_1 \leq 29q_1 + 56. \end{aligned}$$

Do đó, q_1 là số chẵn, và $44 \leq 29q_1 < 100$. Vì thế, $q_1 = 2$. Suy ra

$$r_1 = \frac{100 - 29 \cdot 2}{2} = 21.$$

Do đó, $n = 29q_1 + r_1 = 29 \cdot 2 + 21 = 79$.

- Trường hợp 2: $q_2 = 2$. Khi đó, ta có:

$$r_1 + r_3 = 41q_2 = 82.$$

Kết hợp với (1) và (2), suy ra

$$\begin{aligned} 141 &= 59 + 82 = r_1 + r_2 + r_1 + r_3 = n + r_1 \\ &= 29q_1 + 2r_1 \leq 29q_1 + 56. \end{aligned}$$

Do đó, q_1 là số lẻ, và $85 \leq 29q_1 < 141$. Vì thế, $q_1 = 3$. Suy ra

$$r_1 = \frac{141 - 29 \cdot 3}{2} = 27.$$

Do đó, $n = 29q_1 + r_1 = 29 \cdot 3 + 27 = 114$.

Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, cả hai số nguyên dương $n = 79$ và $n = 114$ đều thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Vì thế, đó là tất cả các số nguyên dương cần tìm.

Bình luận và Nhận xét.

1. Có thể nói, bài đã ra là một bài toán có dạng quen thuộc, về mối liên hệ giữa số bị chia, số chia, thương và số dư, trong một phép chia. Tuy nhiên, số lời giải mà Tòa soạn nhận được từ bạn đọc không nhiều như mong đợi.

2. Do thiếu khéo léo trong việc sử dụng các hệ thức, cũng như do một số đánh giá được tìm ra chưa chặt nên một số lời giải còn dài dòng, rườm rà.

Lưu Thị Thanh Hà

P244. Tìm tất cả các số nguyên dương $n < 24$, sao cho ta có thể phân chia tập hợp $\{n; n+1; \dots; 24\}$ thành một số tập hợp con thỏa mãn điều kiện: trong mỗi tập hợp con đều tồn tại một số bằng tổng của tất cả các số còn lại trong tập hợp con ấy.

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Trần Nguyễn Nam Hưng, lớp 10 Toán, trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh).

Giả sử ta có thể phân chia tập hợp $A = \{n; n+1; \dots; 24\}$ thành k tập hợp con ($k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$) $A_1, A_2, \dots, A_k$ thỏa mãn điều kiện đề bài; nghĩa là, trong mỗi tập hợp con $A_i, i = 1, 2, \dots, k$, đều tồn tại một số bằng tổng của tất cả các số còn lại trong tập hợp con ấy.

Vì trong mỗi tập hợp con $A_i, i = 1, 2, \dots, k$, đều không có hai số nào như nhau nên từ tính chất vừa nêu trên của A_i suy ra, mỗi tập hợp con A_i đều phải có ít nhất ba số. Mà số các số thuộc tập hợp A bằng $25 - n$, nên ta có:

$$3k \leq 25 - n, \text{ hay, } n \leq 25 - 3k. \quad (1)$$

Với mỗi $i = 1, 2, \dots, k$, kí hiệu a_i là số thuộc tập hợp con A_i , mà a_i bằng tổng của tất cả các số còn lại trong tập hợp con ấy.

Kí hiệu S_A là tổng tất cả các số thuộc tập hợp A , và với mỗi $i = 1, 2, \dots, k$, kí hiệu S_i là tổng tất cả các số thuộc tập hợp con A_i . Khi đó, ta có:

$$S_i = 2a_i, \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, k.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_A &= S_1 + S_2 + \dots + S_k \\ &= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k). \end{aligned} \quad (2)$$

Vì $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số thuộc tập hợp A nên hiển nhiên, tổng của k số đó không vượt quá tổng của k số lớn nhất thuộc tập hợp ấy; nghĩa là, ta có:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_k &\leq 24 + 23 + \dots + (24 - k + 1) \\ &= \frac{(49 - k)k}{2}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (2), ta được:

$$S_A \leq (49 - k)k. \quad (3)$$

Mặt khác, từ (1), với lưu ý

$$25 - 3k = 24 - 3k + 1 < 24,$$

suy ra, tổng tất cả các số nguyên liên tiếp từ n đến 24 lớn hơn hoặc bằng tổng tất cả các số nguyên liên tiếp từ $(25 - 3k)$ đến 24; nghĩa là, ta có:

$$\begin{aligned} S_A &\geq (24 - 3k + 1) + (24 - 3k + 2) + \dots + 24 \\ &= \frac{3k(49 - 3k)}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được:

$$\frac{3k(49-3k)}{2} \leq (49-k)k. \quad (5)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (5) &\Leftrightarrow 3(49-3k) \leq 2(49-k) \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot 49 - 9k \leq 2 \cdot 49 - 2k \\ &\Leftrightarrow k \geq 7. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (1) và (6), suy ra, $n \leq 4$.

- Với $n = 2$, ta có:

$$S_A = 2 + 3 + \dots + 24 = \frac{(2+24) \cdot 23}{2} = 13 \cdot 23,$$

là một số lẻ; điều này mâu thuẫn với (2). Vì thế, $n \neq 2$.

- Với $n = 3$, ta có:

$$S_A = 3 + 4 + \dots + 24 = \frac{(3+24) \cdot 22}{2} = 27 \cdot 11$$

là một số lẻ; điều này mâu thuẫn với (2). Vì thế, $n \neq 3$.

- Với $n = 1$ và $n = 4$, ta có thể phân chia các tập A tương ứng, mỗi tập thành các tập hợp con thỏa mãn yêu cầu đề bài, như mô tả trong các bảng sau (trong mỗi bảng, mỗi cột thể hiện một tập hợp con, và số in đậm trong mỗi cột là số bằng tổng của tất cả các số còn lại trong cột ấy):

24	23	22	21	20	19	18	3
17	15	13	11	16	14	12	2
7	8	9	10	4	5	6	1

$n = 1$

24	23	22	21	20	19	18
17	15	13	11	16	14	12
7	8	9	10	4	5	6

$n = 4$

Vậy, tóm lại, tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = 1$, và $n = 4$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Có thể thấy, hướng giải bài đã ra khá rõ và tự nhiên: Cần khoanh hẹp vùng tìm kiếm n , hoặc tìm cách xác định dạng của n .

Từ giả thiết của bài toán, có thể thấy ngay tổng tất cả các số thuộc tập A (theo kí hiệu trong lời giải trên) là một số chẵn, mỗi tập con, trong

trường hợp phân chia được tập A , phải có ít nhất ba phần tử. Từ đó, dễ dàng có được các đánh giá (1) và (3). Vấn đề tiếp theo, rõ ràng là, tìm một đánh giá dạng

$$S_A \geq g(k), \quad (*)$$

với $g(k)$ là một biểu thức của k , để kết nối với (3), tạo ra chỗ dựa cho việc tìm ra đánh giá cho k , làm căn cứ cho việc tìm ra đánh giá cho n (bằng cách sử dụng (1)). Rất có thể, đây chính là một trong hai điểm khó trong việc giải bài đã ra (điểm khó có thể thứ hai là, chỉ ra cách phân chia tập A , trong trường hợp $n = 4$).

Từ những điều nêu trên, có thể nói, bài đã ra ở mức độ trung bình khó, nếu xét về độ khó - dễ.

2. Theo đánh giá của người chấm bài này, việc dựa vào (1) để tìm ra đánh giá dạng (*) cho S_A (xem (4), trong lời giải trên) là một khám phá hay của bạn Trần Nguyễn Nam Hưng.

3. Nếu bạn đã được học về hàm số bậc hai, theo chương trình môn Toán lớp 10 cấp THPT hiện hành, thì sau khi thu được (3), để có được đánh giá cho n , bạn sẽ không cần tìm thêm đánh giá dạng (*) cho S_A .

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = (49-x)x$. Theo lí thuyết bạn đã được học, hàm số này đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{49}{2}\right)$. Mà

$$k \leq \frac{25-n}{3} < \frac{49}{2},$$

nên $f(k) \leq f\left(\frac{25-n}{3}\right)$; nghĩa là, ta có:

$$\begin{aligned} (49-k)k &\leq \left(49 - \frac{25-n}{3}\right) \cdot \frac{25-n}{3} \\ &= \frac{(122+n)(25-n)}{9}. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên và (3) (trong lời giải trên đây), bạn sẽ được:

$$\begin{aligned} S_A &\leq \frac{(122+n)(25-n)}{9} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+24)(25-n)}{2} \leq \frac{(122+n)(25-n)}{9} \\ &\Leftrightarrow 9(n+24) \leq 2(122+n) \Leftrightarrow n \leq 4. \end{aligned}$$

Như thế, có thể nói, với các bạn học sinh THPT, bài đã ra chỉ ở mức độ trung bình (thậm chí, trung bình dễ), nếu các bạn không bị ám ảnh bởi nỗi sợ Tổ hợp, hơn cả sợ ma.

4. Rất tiếc rằng, với một bài toán như trên, mà Tòa soạn chỉ nhận được vắn vắn có 4 lời giải, từ các bạn học sinh, trên phạm vi toàn quốc; gồm 01 lời giải của một bạn học sinh cấp THCS, và 03 lời giải của ba bạn học sinh cấp THPT. Cả bốn lời giải đều là lời giải đúng; trong đó, có hai lời giải đi theo hướng tìm cách xác định dạng của n . Cụ thể, từ tính chẵn của

$$S_A = \frac{(24+n)(25-n)}{2},$$

hiển nhiên suy ra

$$(24+n)(25-n) \equiv 0 \pmod{4};$$

từ đó, ta được $n \equiv 0 \pmod{4}$, hoặc $n \equiv 1 \pmod{4}$. Hơn nữa, dễ dàng chứng minh được rằng, $n \leq 11$ (gợi ý: xét tập con chứa số 24). Vì thế, ta có $n \in \{1; 4; 5; 8; 9\}$. Tiếp theo, xét từng giá trị của n .

5. Để củng cố những điều đã trao đổi trên đây, bạn hãy giải các bài toán, nhận được từ bài đã ra bằng cách lần lượt thay 24 bởi 20, 30, 60, chẳng hạn. Từ đó, bạn có thể xem xét việc tìm lời giải cho bài toán sau:

Bài toán. Với những số nguyên dương m nào, sẽ tồn tại số nguyên dương $n < m$, sao cho có thể phân chia tập hợp $\{n; n+1; \dots; m\}$ thành một số tập con, mà trong mỗi tập con đều tồn tại một số bằng tổng của tất cả các số còn lại trong tập con ấy?

Nguyễn Khắc Minh

P245. Trên mặt phẳng, cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d . Với mỗi điểm M thuộc d , lấy điểm N trên mặt phẳng, sao cho AMN là một tam giác đều (thứ tự các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ). Hãy tìm tập hợp gồm tất cả các điểm N lấy được.

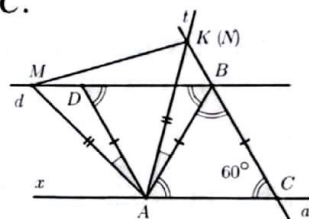
Lời giải 1 (dựa theo lời giải của tác giả bài toán).

Không mất tính tổng quát, giả sử điểm A nằm bên dưới đường thẳng d .

Qua A , kẻ đường thẳng $a \parallel d$. Trên d và a ,

tương ứng, lấy các điểm B và C , sao cho ABC là tam giác đều và điểm C nằm ở bên phải tia AB . Hiển nhiên, có duy nhất điểm B và duy nhất điểm C thỏa mãn các điều kiện vừa nêu. Hơn nữa, do điểm A và đường thẳng d cố định nên B và C là các điểm cố định. Vì thế, BC là đường thẳng cố định. Ta sẽ chứng minh, đường thẳng BC là tập hợp các điểm N thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trên đường thẳng d , lấy điểm D nằm bên trái điểm B , sao cho ABD là một tam giác đều. Ta có, $AD \parallel BC$.



Hình 1.1

• Phần thuận

Trong phần này, ta cần chứng minh, với M là điểm tùy ý thuộc đường thẳng d , điểm N thỏa mãn điều kiện của đề bài sẽ thuộc đường thẳng BC .

Dễ thấy, nếu $M \equiv B$ thì $N \equiv C$, và nếu $M \equiv D$ thì $N \equiv B$.

Xét điểm M tùy ý trên d và $M \neq B, D$. Dựng điểm N thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Kẻ tia At nằm bên phải tia AM và tạo với tia AM góc 60° . Gọi K là giao điểm của tia At và đường thẳng BC .

Từ cách dựng điểm K suy ra AMK là tam giác có ba đỉnh được đặt tên theo chiều kim đồng hồ. Vì thế, nếu bây giờ chứng minh được AMK là tam giác đều thì ta sẽ có $K \equiv N$, và do đó, $N \in BC$.

Xét ba trường hợp sau:

– Trường hợp 1. M thuộc tia đối của tia DB (xem Hình 1.1).

Trong trường này, tia AM nằm bên trái tia AD . Từ đó, do

$$\angle xAD = \angle MAK = \angle DAB = 60^\circ,$$

nên tia AK nằm giữa tia AD và tia AB . Vì thế, ta có:

$$\begin{aligned} \angle MAD &= \angle MAK - \angle DAK = 60^\circ - \angle DAK \\ &= \angle DAB - \angle DAK = \angle KAB, \quad (1.1) \end{aligned}$$

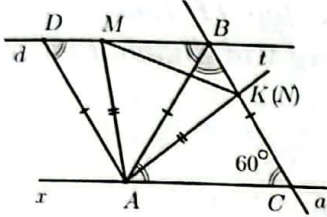
$$\begin{aligned} \text{và } \angle MDA &= 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ = 180^\circ - \angle ABC \\ &= \angle KBA. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Kết hợp (1.1), (1.2), với $AD = AB$ (do tam giác ADB là tam giác đều, theo cách dựng điểm D), suy ra

$$\triangle MDA = \triangle KBA.$$

Do đó, $AM = AK$. Mà $\angle MAK = 60^\circ$ nên AMK là tam giác đều.

– Trường hợp 2. M nằm giữa D và B (xem Hình 1.2).



Hình 1.2

Trong trường này, tia AM nằm giữa tia AD và tia AB . Từ đó, do

$$\angle DAB = \angle MAK = \angle BAC = 60^\circ,$$

nên tia AK nằm giữa tia AB và tia AC . Vì thế, ta có:

$$\begin{aligned} \angle DAM &= \angle DAB - \angle MAB = 60^\circ - \angle MAB \\ &= \angle MAK - \angle MAB \\ &= \angle BAK, \end{aligned} \quad (1.3)$$

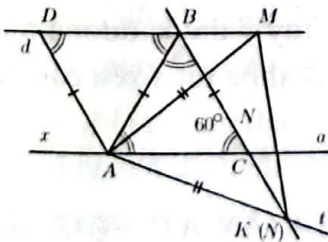
và $\angle ADM = \angle ABK$ (vì cùng bằng 60°). (1.4)

Kết hợp (1.3), (1.4), với $AD = AB$, suy ra

$$\triangle ADM = \triangle ABK.$$

Do đó, $AM = AK$. Mà $\angle MAK = 60^\circ$ nên AMK là tam giác đều.

– Trường hợp 3. M thuộc tia đối của tia BD (xem Hình 1.3).



Hình 1.3

Trong trường này, vì $a \parallel d$ nên tia AM nằm giữa tia AB và tia AC . Từ đó, do

$$\angle BAC = \angle MAK = 60^\circ,$$

nên tia AK nằm bên phải tia AC . Vì thế, ta có:

$$\begin{aligned} \angle BAM &= \angle BAC - \angle MAC = 60^\circ - \angle MAC \\ &= \angle MAK - \angle MAC \\ &= \angle CAK, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{và } \angle ABM &= 180^\circ - \angle DBA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \\ &= 180^\circ - \angle BCA = \angle ACK. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Kết hợp (1.5), (1.6), với $AB = AC$ (do tam giác ABC là tam giác đều, theo cách dựng các điểm B, C), suy ra

$$\triangle ABM = \triangle ACK.$$

Do đó, $AM = AK$. Mà $\angle MAK = 60^\circ$ nên AMK là tam giác đều.

Vậy, tóm lại, với $M \in d$, ta luôn có $N \in BC$.

• Phần đảo

Trong phần này, ta cần chứng minh, với N là điểm tùy ý thuộc đường thẳng BC , luôn tồn tại điểm $M \in d$, sao cho AMN là một tam giác đều (thứ tự các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ).

Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng BC .

Nếu $N \equiv B$ thì chọn $M \equiv D$, và nếu $N \equiv C$ thì chọn $M \equiv B$, ta sẽ được điểm M thỏa mãn các yêu cầu mong muốn.

Xét $N \neq B, C$.

Kẻ tia Au nằm bên trái tia AN và tạo với tia AN góc 60° . Gọi M là giao điểm của tia Au và đường thẳng BC . Ta sẽ chứng minh M là điểm thỏa mãn các yêu cầu mong muốn.

Thật vậy, do cách dựng điểm M nên AMN là tam giác có ba đỉnh được đặt tên theo chiều kim đồng hồ.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh AMN là tam giác đều.

Xét ba trường hợp sau:

– Trường hợp 1. N thuộc tia đối của tia BC (xem Hình 1.1).

Trong trường hợp này, do $AD \parallel BC$ nên tia AN nằm giữa tia AB và tia AD . Vì thế, từ

$$\angle BAD = \angle NAM = 60^\circ,$$

suy ra tia AM nằm bên trái tia AD . Do đó, ta

có:

$$\begin{aligned}\angle BAN &= \angle BAD - \angle NAD = 60^\circ - \angle NAD \\ &= \angle NAM - \angle NAD \\ &= \angle DAM,\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}\text{và } \angle NBA &= 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \\ &= 180^\circ - \angle ADB = \angle MDA.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Kết hợp (1.7), (1.8), với $AD = AB$, suy ra

$$\triangle NBA = \triangle MDA.$$

Do đó, $AN = AM$. Mà $\angle NAM = 60^\circ$ nên AMN là tam giác đều.

– Trường hợp 2. N nằm giữa B và C (xem Hình 1.2).

Trong trường hợp này, tia AN nằm giữa tia AC và tia AB . Vì thế, từ

$$\angle CAB = \angle NAM = \angle BAD = 60^\circ,$$

suy ra tia AM nằm giữa tia AB và tia AD . Do đó, ta có:

$$\begin{aligned}\angle NAB &= \angle NAM - \angle BAM = 60^\circ - \angle BAM \\ &= \angle BAD - \angle BAM \\ &= \angle MAD,\end{aligned}\quad (1.9)$$

và $\angle ABN = \angle ADM$ (vì cùng bằng 60°). (1.10)

Kết hợp (1.9), (1.10), với $AB = AD$, suy ra

$$\triangle NAB = \triangle MAD.$$

Do đó, $AN = AM$. Mà $\angle NAM = 60^\circ$ nên AMN là tam giác đều.

– Trường hợp 3. N thuộc tia đối của tia CB (xem Hình 1.3).

Trong trường hợp này, tia AN nằm bên phải tia AC . Vì thế, từ

$$\angle NAM = \angle CAB = 60^\circ,$$

suy ra tia AM nằm giữa tia AC và tia AB . Do đó, ta có:

$$\begin{aligned}\angle NAC &= \angle NAM - \angle CAM = 60^\circ - \angle CAM \\ &= \angle CAB - \angle CAM \\ &= \angle MAB,\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}\text{và } \angle ACN &= 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ = 180^\circ - \angle ABD \\ &= \angle ABM.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Kết hợp (1.11), (1.12), với $AC = AB$, suy ra

$$\triangle NAC = \triangle MAD.$$

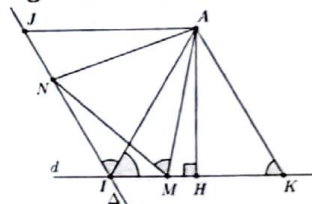
Do đó, $AN = AM$. Mà $\angle NAM = 60^\circ$ nên AMN là tam giác đều.

Vậy, tóm lại, với $N \in BC$, luôn tồn tại điểm $M \in d$, sao cho AMN là một tam giác đều (thứ tự các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ).

• Kết luận

Tập hợp các điểm N thỏa mãn điều kiện đề bài là đường thẳng BC , được dựng ở phần đầu của lời giải này.

Lời giải 2 (phỏng theo lời giải của bạn Lê Khánh Huy, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên).



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Do A là điểm cố định và d là đường thẳng cố định nên H là điểm cố định.

Trên d , lấy hai điểm I, K sao cho

$$HI = HK = \frac{HA}{\sqrt{3}},$$

và các điểm A, K, I , theo thứ tự đó, nằm theo chiều kim đồng hồ. Ta có, AKI là tam giác đều và K, I là các điểm cố định.

Dựng đường thẳng Δ đi qua I và song song với AK . Ta có Δ là đường thẳng cố định và

$$(\Delta, d) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}.$$

Trên Δ , lấy điểm J sao cho AIJ (các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ) là tam giác đều. Do A là điểm cố định và Δ là đường thẳng cố định nên J là điểm cố định.

Xét điểm M tùy ý thuộc đường thẳng d .

Dựng điểm N thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có:

$$\begin{aligned}& (AM, AI) \\ & \equiv (AM, AN) + (AN, AJ) + (AJ, AI) \pmod{\pi} \\ & \equiv -\frac{\pi}{3} + (AN, AJ) + \frac{\pi}{3} \equiv (AN, AJ) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Mà $AI = AJ$ (do AIJ là tam giác đều) và $AM = AN$ (do AMN là tam giác đều) nên

$$\triangle AMI = \triangle ANJ \text{ (c.g.c.)}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & (NJ, d) \\ & \equiv (NJ, IM) \equiv (NJ, NA) + (NA, MA) + \\ & \quad + (MA, MI) \pmod{\pi} \\ & \equiv (MI, MA) + (NA, MA) + (MA, MI) \pmod{\pi} \\ & \equiv (NA, MA) \equiv \frac{\pi}{3} \equiv (\Delta, d) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Vì thế, $N \in \Delta$.

Đảo lại, xét điểm N tùy ý thuộc Δ .

Trên d , lấy điểm M sao cho

$$(AN, AM) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}. \quad (2.1)$$

Khi đó

$$(AN, AM) \equiv \frac{\pi}{3} \equiv (\Delta, d) \equiv (IN, IM) \pmod{\pi}.$$

Suy ra, bốn điểm A, I, M, N cùng nằm trên một đường tròn. Do đó

$$\begin{aligned} (NM, NA) & \equiv (IM, IA) \equiv (d, IA) \\ & \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Từ (2.1) và (2.2) suy ra, AMN là tam giác đều, và các đỉnh A, M, N , theo thứ tự đó, nằm theo chiều kim đồng hồ.

Vậy, tóm lại, tập hợp các điểm N thỏa mãn điều kiện đề bài là đường thẳng Δ , được dựng trên đây.

Bình luận và Nhận xét.

1. Từ giả thiết AMN là tam giác đều và các đỉnh A, M, N , theo thứ tự đó, nằm theo chiều kim đồng hồ, suy ra N là ảnh của M qua phép quay tâm A , góc quay $-\frac{\pi}{3}$, và ngược lại, M là ảnh của N qua phép quay tâm A , góc quay $+\frac{\pi}{3}$. Vì thế, khi M di động trên đường thẳng d , không đi qua A , thì quỹ tích của N sẽ là ảnh của d qua phép quay tâm A , góc quay $-\frac{\pi}{3}$. Về lý thuyết, với d là đường thẳng cố định cho trước, và A là điểm cố định cho trước, thì ảnh của d qua phép quay tâm A , góc quay $-\frac{\pi}{3}$, là một đường thẳng hoàn toàn xác định. Tuy nhiên, trên thực tế, do việc giảng dạy và học tập môn Toán trong nhà trường phổ thông có những qui định và yêu cầu riêng của mình, nên trong trường hợp này, việc kết luận tập

hợp điểm N thỏa mãn yêu cầu đề bài là đường thẳng ảnh của d qua phép quay tâm A , góc quay $-\frac{\pi}{3}$ chưa phải là một câu trả lời được chấp nhận là hoàn chỉnh. Người giải bài được yêu cầu mô tả tập hợp điểm N sao cho một người chưa biết gì về phép quay có thể thể hiện được tập hợp điểm ấy trên hình vẽ.

Như thế, có thể nói, bài đã ra là một bài toán nhằm kiểm tra các kiến thức lý thuyết cơ bản về phép quay quanh tâm (định nghĩa, tính chất cơ bản, cách dựng ảnh của một đường thẳng) của người giải bài, hoặc giúp người giải bài ôn tập các kiến thức đó.

2. Để nhiều đối tượng bạn đọc có thể hiểu lời giải của bài đã ra, trong phần Lời giải trên đây, chúng tôi đã trình bày hai lời giải (có cùng ý tưởng), một lời giải không sử dụng góc định hướng, và một lời giải sử dụng góc định hướng. Qua hai lời giải đó, bạn đã thấy tính ưu việt của góc định hướng trong các tình huống cần xét nhiều khả năng có thể xảy ra đối với vị trí tương đối của các yếu tố trong hình. Lời giải không sử dụng góc định hướng, tuy dài dòng hơn hẳn so với lời giải sử dụng góc định hướng, nhưng nó lại giúp bạn ôn tập các kiến thức liên quan đến vị trí tương đối của các yếu tố hình học cơ bản trong mặt phẳng. Điều này sẽ rất có ích cho bạn, khi bạn cần quyết định có hay không sử dụng góc định hướng trong các tình huống hình học cụ thể.

3. Một điều rất không vui là, tuy bài đã ra thuộc loại bài “kiểm tra lý thuyết cơ bản” (như đã nêu ở mục 1 trên đây), nhưng Tòa soạn chỉ nhận được 6 lời giải, từ các bạn học sinh phổ thông; trong đó, có tới 4 lời giải là lời giải chưa đúng, do người giải bài đã “quên” làm phần đảo, hoặc “quên” xét vị trí tương đối giữa các yếu tố trong hình, hoặc “phán” rất hồn nhiên “các trường hợp khác làm tương tự”, trong khi sự tương tự không hề có.

Hạ Vũ Anh – Nguyễn Khắc Minh

P246. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng, sao cho tại mỗi thời điểm, giá trị tuyệt đối của gia tốc của chất điểm không vượt quá 1m/s^2 . Biết rằng, trong quá trình

chuyển động, chất điểm có thể thay đổi chiều chuyển động, và một giây sau thời điểm bắt đầu chuyển động, chất điểm quay trở về vị trí ban đầu. Chứng minh rằng, vận tốc của chất điểm ở nửa giây sau thời điểm bắt đầu chuyển động không vượt quá 0,25m/s.

Lời giải (dựa theo lời giải của người đề xuất bài toán).

Giả sử đơn vị đo thời gian là giây và đơn vị đo khoảng cách là mét.

Kí hiệu $v(t)$ và $a(t)$ tương ứng là vận tốc và gia tốc của chất điểm. Theo định nghĩa của vận tốc và gia tốc, ta có:

$$a(t) = v'(t).$$

Do đó, theo bài ra, với mọi $t \in [0; 1]$, ta có

$$|a(t)| = |v'(t)| \leq 1. \quad (1)$$

Gọi A là vị trí xuất phát của chất điểm, và B là vị trí chất điểm tới được sau t giây (kể từ khi xuất phát), với vận tốc $v(t)$. Khi đó, do chuyển động của chất điểm là chuyển động thẳng (theo bài ra), khoảng cách s giữa A và B sẽ được tính theo công thức:

$$s = \int_0^t v(t) dt.$$

Theo bài ra, sau một giây (kể từ lúc xuất phát), với vận tốc $v(t)$, chất điểm chuyển động tới được vị trí ban đầu (tức, vị trí xuất phát). Vì thế, theo công thức trên, ta có:

$$\int_0^1 v(t) dt = 0. \quad (2)$$

Theo yêu cầu của bài ra, với các giả thiết (1) và (2), ta phải chứng minh $v(0,5) \leq 0,25$.

Theo (2), ta có:

$$\begin{aligned} & |v(0,5)| \\ &= |v(0,5) - 0| = \left| v(0,5) \cdot \int_0^1 dt - \int_0^1 v(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 (v(0,5) - v(t)) dt \right|. \end{aligned} \quad (3)$$

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm số liên tục $v(t)$ trên đoạn $[0, 5; t]$, ta được:

$$v(0,5) - v(t) = v'(t_0) \cdot (0,5 - t), \quad (4)$$

trong đó, $t_0 \in (0, 5; t)$.

Từ (3) và (4), ta được:

$$\begin{aligned} |v(0,5)| &= \left| \int_0^1 (v'(t_0) \cdot (0,5 - t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |(v'(t_0) \cdot (0,5 - t))| dt = \int_0^1 |v'(t_0)| \cdot |0,5 - t| dt. \end{aligned}$$

Từ đó, do (1), ta có:

$$\begin{aligned} |v(0,5)| &\leq \int_0^1 |0,5 - t| dt \\ &= \int_0^{0,5} (0,5 - t) dt + \int_{0,5}^1 (t - 0,5) dt = 0,25. \end{aligned}$$

Vì thế, $v(0,5) \leq |v(0,5)| \leq 0,25$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

Qua lời giải trên đây, có thể thấy, để giải được bài đã ra, chỉ cần hiểu ý nghĩa cơ học của khái niệm tích phân (xác định) và các tính chất cơ bản của tích phân (xác định), cùng định lí Lagrange về giá trị trung bình của hàm liên tục, khả vi trên một đoạn. Việc vận dụng các kiến thức vừa nêu để giải bài đã ra chỉ ở mức “sách giáo khoa”. Tuy nhiên, Tòa soạn không nhận được một lời giải nào cho bài toán, từ bạn đọc. Người chấm bài xin nhường việc bình luận sự kiện này cho bạn đọc.

Lê Huy

P247. Cho a là số thực sao cho phương trình

$$x^3 + ax^2 + (a-3)x - 1 = 0$$

có ba nghiệm thực (không nhất thiết đôi một khác nhau). Gọi ba nghiệm đó là x_1, x_2, x_3 . Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3} = \sqrt[3]{6-a-3\sqrt{a^2-3a+9}}.$$

Lời giải (dựa theo lời giải của các bạn Đào Trọng Toàn, lớp 9/3, trường THCS TP. Bến Tre, tỉnh Bến Tre, Thiếu Đình Minh Hùng, lớp

10T2, trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; và hai bạn Nguyễn Thanh Phúc, lớp 10 Toán 1, Lê Khánh Huy, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên).

Đặt $P = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}$.

Ta biết rằng, với u, v, w là ba số thực tùy ý, luôn có:

$$(u+v+w)^3 = u^3 + v^3 + w^3 + 3[(u+v+w) \times (uv+vw+wu) - uvw]. \quad (1)$$

Đặt $Q = \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2x_3} + \sqrt[3]{x_3x_1}$, và áp dụng (1) cho $u = \sqrt[3]{x_1}$, $v = \sqrt[3]{x_2}$, $w = \sqrt[3]{x_3}$, ta được:

$$P^3 = x_1 + x_2 + x_3 + 3(PQ - \sqrt[3]{x_1x_2x_3}). \quad (2)$$

Từ định nghĩa của x_1, x_2, x_3 trong đề bài, theo định lý Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a;$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a - 3; \quad (3)$$

$$x_1x_2x_3 = 1. \quad (4)$$

Vì thế, theo (2), ta có:

$$P^3 = -a + 3(PQ - 1) = -a - 3 + 3PQ.$$

$$\text{Suy ra, } PQ = \frac{P^3 + a + 3}{3}. \quad (5)$$

Tiếp theo, áp dụng (1) cho $u = \sqrt[3]{x_1x_2}$, $v = \sqrt[3]{x_2x_3}$, $w = \sqrt[3]{x_3x_1}$, với lưu ý tới (3) và (4), ta được:

$$Q^3 = a - 3 + 3(PQ - 1) = a - 6 + 3PQ. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra

$$\left(\frac{R}{3}\right)^3 = (a - 6 + R) \cdot P^3, \quad (7)$$

với $R = P^3 + a + 3$.

Ta có:

$$(7) \Leftrightarrow R^3 = 27(a - 6 + R)(R - (a + 3))$$

$$\Leftrightarrow R^3 - 27R^2 + 243R = -27(a - 6)(a + 3)$$

$$\Leftrightarrow (R - 9)^3 = -729 - 27(a - 6)(a + 3)$$

$$\Leftrightarrow (P^3 + a - 6)^3 = -27(a^2 - 3a + 9)$$

$$\Leftrightarrow P^3 + a - 6 = -3\sqrt[3]{a^2 - 3a + 9}$$

$$\Leftrightarrow P^3 = 6 - a - 3\sqrt[3]{a^2 - 3a + 9}$$

$$\Leftrightarrow P = \sqrt[3]{6 - a - 3\sqrt[3]{a^2 - 3a + 9}}.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. Có nhiều cách chứng minh hằng đẳng thức (1) (trong lời giải trên đây). Chẳng hạn, bạn có thể chứng minh bằng cách khai triển biểu thức nằm ở vế bên trái, rồi biến đổi về biểu thức nằm ở vế bên phải; hoặc, biến đổi cả hai biểu thức nằm ở hai vế về cùng một biểu thức trung gian;... Theo người chấm bài, cách chứng minh dưới đây không chỉ giúp bạn thấy được tính đúng của hằng đẳng thức (1), mà còn giúp bạn hiểu được cách thiết lập hằng đẳng thức đó.

Chứng minh hằng đẳng thức (1). Từ việc khai triển biểu thức

$$(x - u)(x - v)(x - w),$$

thì nhóm các số hạng đồng dạng, ta có:

$$(x - u)(x - v)(x - w)$$

$$= x^3 - (u + v + w)x^2 + (uv + vw + wu)x - uvw. \quad (*)$$

Trong (*), lần lượt cho $x = u$, $x = v$, $x = w$, ta được:

$$u^3 - (u + v + w)u^2 + (uv + vw + wu)u - uvw = 0;$$

$$v^3 - (u + v + w)v^2 + (uv + vw + wu)v - uvw = 0;$$

$$w^3 - (u + v + w)w^2 + (uv + vw + wu)w - uvw = 0.$$

Cộng, vế với vế, ba đẳng thức trên, ta được:

$$u^3 + v^3 + w^3 - (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2) + (uv + vw + wu)(u + v + w) - 3uvw = 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw \\ &= (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) \\ &= (u + v + w)((u + v + w)^2 - 3(uv + vw + wu)) \\ &= (u + v + w)^3 - 3(u + v + w)(uv + vw + wu). \end{aligned}$$

Từ đó, hiển nhiên, suy ra (1).

2. Bằng cách gán cho a các giá trị cụ thể, từ kết quả của bài đã ra, bạn có thể thu được một số kết quả lượng giác, như:

$$\sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{7\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos \frac{13\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{6 - 3\sqrt[3]{9}}{2}};$$

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}; \dots$$

Nguyễn Duy Thái Sơn

P248. Tìm tất cả các hàm số $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau, với mọi số thực $x \in [0; 1]$:

$$1/ \{f(x)\} \cdot \sin^2 x + \{x\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos x = f(x);$$

$$2/ f(f(x)) = f(x).$$

($\{\alpha\}$ ký hiệu phần lẻ của số thực α .)

Lời giải 1 (dựa theo đa số lời giải Tòa soạn nhận được).

Giả sử $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ là hàm số thỏa mãn các yêu cầu đề bài; nghĩa là, với mọi $x \in [0; 1]$, ta có:

$$\begin{aligned} \{f(x)\} \cdot \sin^2 x + \{x\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos x \\ = f(x); \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$f(f(x)) = f(x). \quad (1.2)$$

Trong (1.1), thay x bởi $f(x)$, ta được:

$$\begin{aligned} \{f(f(x))\} \cdot \sin^2 f(x) + \{f(x)\} \cdot \cos f(f(x)) \cdot \cos f(x) \\ = f(f(x)). \end{aligned}$$

Kết hợp với (1.2), suy ra

$$\begin{aligned} \{f(x)\} \cdot \sin^2 f(x) + \{f(x)\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos f(x) \\ = f(x), \end{aligned}$$

$$\text{hay } \{f(x)\} \cdot (\sin^2 f(x) + \cos^2 f(x)) = f(x).$$

Do đó, với mọi $x \in [0; 1]$, ta có:

$$\{f(x)\} = f(x). \quad (1.3)$$

Nghĩa là, $f(x) \in [0; 1]$ với mọi $x \in [0; 1]$. (1.4)

Thế (1.3) vào (1.1), ta được:

$$f(x) \cdot \sin^2 x + \{x\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos x = f(x);$$

suy ra

$$\{x\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos x = f(x) \cdot (1 - \sin^2 x),$$

$$\text{hay } \{x\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos x = f(x) \cdot \cos^2 x. \quad (1.5)$$

Với mọi $x \in [0; 1]$, ta có $\cos x > 0$, và $\{x\} = x$.

Vì thế, từ (1.5) ta có:

$$x \cdot \cos f(x) = f(x) \cdot \cos x;$$

$$\text{suy ra } \frac{x}{\cos x} = \frac{f(x)}{\cos f(x)}. \quad (1.6)$$

Xét hàm số $g(t)$ xác định trên $[0; 1]$, được cho

bởi công thức:

$$g(t) = \frac{t}{\cos t}.$$

Khi đó, do (1.4) nên theo (1.5), ta có $g(x) = g(f(x))$ với mọi $x \in [0; 1]$. (1.7)

Vì trên $[0; 1]$, $u(t) = t$ là hàm tăng, và $\cos t$ là hàm giảm, chỉ nhận giá trị dương, nên $g(t)$ là hàm tăng trên $[0; 1]$. Vì thế, từ (1.7) suy ra $x = f(x)$ với mọi $x \in [0; 1]$. (1.8)

Trong (1.1), cho $x = 1$, ta được:

$$f(1) \cdot \sin^2 1 = f(1);$$

$$\text{suy ra } f(1) \cdot (\sin^2 1 - 1) = 0;$$

$$\text{do đó, } f(1) = 0 \text{ (vì } \sin^2 1 \neq 1). \quad (1.9)$$

Từ (1.8) và (1.9), ta được $f(x) = \{x\}$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Bằng cách thử trực tiếp, dễ thấy hàm số vừa tìm được ở trên thỏa mãn mọi yêu cầu của đề bài.

Vậy, có duy nhất hàm cần tìm là $f(x) = \{x\}$ với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải 2 (dựa theo lời giải của hai bạn Thiều Đình Minh Hùng, lớp 10T2, trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, và Nguyễn Thanh Phúc, lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên).

Giả sử $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ là hàm số thỏa mãn điều kiện 1/ của đề bài; nghĩa là, với mọi $x \in [0; 1]$, ta có:

$$\begin{aligned} \{f(x)\} \cdot \sin^2 x + \{x\} \cdot \cos f(x) \cdot \cos x \\ = f(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) \neq 1 \quad \forall x \in [0; 1]. \quad (2.2)$$

Thật vậy, giả sử phản chứng rằng, tồn tại $x_0 \in [0; 1]$ sao cho $f(x_0) = 1$.

Trong (2.1), cho $x = x_0$ ta được:

$$\{x_0\} \cdot \cos 1 \cdot \cos x_0 = 1,$$

là điều vô lý, vì

$$|\{x_0\} \cdot \cos 1 \cdot \cos x_0| \leq \{x_0\} < 1.$$

Điều vô lý nhận được cho thấy giả sử phản chứng là sai; và vì thế, (2.2) được chứng minh. Từ (2.2) suy ra, $f(x) \in [0; 1)$ $\forall x \in [0; 1]$.

Do đó

$$\{f(x)\} = f(x) \quad \forall x \in [0; 1].$$

Tiếp theo, giải hoàn toàn giống như phần ngay sau (1.4) ở Lời giải 1, ta được $f(x) = \{x\}$, $x \in [0; 1]$, là hàm số duy nhất thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. Theo đánh giá chủ quan của người chấm bài, bài đã ra là một bài toán hay và cơ bản, không khó, trong phương trình hàm.

2. Từ lời giải 2 trên đây, bạn đã thấy, nếu hàm số $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ thỏa mãn điều kiện 1/ thì nó cũng sẽ thỏa mãn điều kiện 2/, đã nêu trong đề bài. *Rất đáng khen hai bạn Thiệu Đình Minh Hùng và Nguyễn Thanh Phúc đã phát hiện ra điều này.*

Nguyễn Duy Thái Sơn

Lời bàn.

Ta có thể chứng minh được rằng, *không tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện 1/ và 2/ của bài đã ra, với mọi số thực x .*

Thật vậy, bằng cách đúng như cách chứng minh (1.4) ở Lời giải 1, ta chứng minh được:

$$f(x) \in [0; 1] \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Tiếp theo, ở điều kiện 1/ của đề bài, cho $x = \pi$ ta được:

$$-\{\pi\} \cdot \cos f(\pi) = f(\pi).$$

Theo (*), $f(\pi) \in [0; 1]$; do đó, $\cos f(\pi) > 0$. Vì thế, do $\{\pi\} \in (0; 1)$, suy ra, ở vế trái của đẳng thức trên là một số âm, trong khi ở vế phải của đẳng thức đó là một số không âm. Điều vô lí vừa nhận được cho ta điều muốn chứng minh.

Nhóm TTTH

P249. Với mỗi số nguyên dương a , ký hiệu $S(a)$ là tổng các chữ số trong biểu diễn thập phân của a . Tìm tất cả các số nguyên dương n , sao cho hệ thức sau được thỏa mãn:

$$2(S(n))^3 + 7(S(n))^2 + 16 = 3n.$$

Lời giải (dựa theo lời giải của tác giả bài toán).

Với n là số nguyên dương, ta có $S(n) \equiv n \pmod{9}$.

Giả sử n là số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, từ hệ thức của đề bài, ta được:

$$\begin{aligned} 2(S(n))^3 + 7(S(n))^2 + 16 \\ \equiv 3S(n) \pmod{9}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (1) \\ \Leftrightarrow 2(S(n))^3 + 7(S(n))^2 - 3S(n) + 16 &\equiv 0 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow 2(S(n))^3 - 2(S(n))^2 - 3S(n) - 2 &\equiv 0 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow (S(n) - 2) \left(2(S(n))^2 + 2(S(n)) + 1 \right) \\ &\equiv 0 \pmod{9} \\ \Leftrightarrow (S(n) - 2) \left((S(n))^2 + ((S(n)) + 1)^2 \right) \\ &\equiv 0 \pmod{9}. \end{aligned} \quad (2)$$

Vì

$$(S(n))^2 + ((S(n)) + 1)^2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

nên

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (S(n) - 2) \equiv 0 \pmod{9} \\ &\Leftrightarrow S(n) \equiv 2 \pmod{9}. \end{aligned} \quad (3)$$

Giả sử biểu diễn thập phân của n có k chữ số ($k \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, $S(n) \leq 9k$, và $n \geq 10^{k-1}$. Vì thế, từ hệ thức của đề bài, suy ra

$$3 \cdot 10^{k-1} \leq 2(9k)^3 + 7(9k)^2 + 16.$$

Do đó

$$3 \cdot 10^{k-1} \leq 2 \cdot 9^3 \cdot k^3 + 7 \cdot 9^2 \cdot k^2 + 16k^3 = 2041k^3.$$

$$\text{Suy ra, } \frac{10^{k-1}}{k^3} \leq \frac{2041}{3}. \quad (4)$$

Với mỗi số nguyên dương m , đặt $u_m = \frac{10^{m-1}}{m^3}$.

Với mọi $m \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{u_{m+1}}{u_m} &= \frac{10m^3}{(m+1)^3} > \frac{8m^3}{(m+1)^3} \\ &\geq \frac{m^3 + 3m^2 + 3m + 1}{(m+1)^3} = 1. \end{aligned}$$

Do đó, $(u_m)_{m \geq 1}$ là một dãy số tăng thực sự. Mà

$$u_7 = \frac{10^6}{7^3} > \frac{2041}{3}$$

nên $u_m > \frac{2041}{3}$ với mọi $m \geq 7$.

Vì thế, từ (4) ta được $k \leq 6$. Do đó, $S(n) \leq 54$.
Kết hợp với (3), suy ra

$$S(n) \in \{2; 11; 20; 29; 38; 47\}.$$

Thay $S(n) = 2$ vào hệ thức của đề bài, ta được:

$$3n = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 + 16 = 60.$$

Do đó, $n = 20$. Rõ ràng, $S(20) = 2$. Vì thế, $n = 20$ là một số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Thay $S(n) = 11$ vào hệ thức của đề bài, ta được:

$$3n = 2 \cdot 11^3 + 7 \cdot 11^2 + 16 = 3525.$$

Do đó, $n = 1175$. Tuy nhiên, $S(1175) = 14 \neq 11$. Vì thế, $S(n) \neq 11$.

Bằng cách xét hoàn toàn tương tự trên cho từng giá trị $S(n) \in \{20; 29; 38; 47\}$, ta thấy, không một giá trị nào trong các giá trị đó thỏa mãn hệ thức của đề bài.

Vậy, tóm lại, $n = 20$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. “Với mọi số nguyên dương n , $S(n) \equiv n \pmod{9}$ ” là một kết quả rất quen biết với các bạn học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông (bao gồm cả THCS và THPT). Việc nghĩ đến sử dụng kết quả đó để khai thác hệ thức đã cho trong đề ra, nhằm xác định dạng của n (hoặc $S(n)$) là một điều rất tự nhiên.

2. Sau khi sử dụng kết quả nêu trong mục 1 trên đây, để từ hệ thức của bài ra đi đến (1) (trong lời giải trên), nếu là người “ngại” suy nghĩ, bạn có thể tìm ra (3) bằng cách thử lần lượt từng giá trị của $S(n)$, theo modulo 9. Chúng tôi không cổ súy cho cách xử lý đó, mà nêu ra như vậy chỉ để bạn thấy rằng, điểm mấu chốt để giải được bài đã ra là phát hiện ra đánh giá (4) và cách xử lý đánh giá đó để tìm ra một chặn trên cho $S(n)$.

3. Những điều đã nêu trên đây cho thấy, bài đã ra không phải là một bài toán khó, cũng như không phải là bài toán có dạng xa lạ đối với các bạn học sinh khá, giỏi Toán, bậc phổ thông. Tuy thế, số lời giải cho bài toán, mà Tòa soạn nhận được từ bạn đọc, chưa vượt quá được số ngón tay của một người bình thường.

Đây thực sự không phải là một tin vui cho những người tâm huyết với phong trào và chất lượng dạy và học toán hiện nay, trong nhà trường phổ thông.

4. Tất cả các lời giải Tòa soạn nhận được đều là lời giải đúng; tuy nhiên, có một số lời giải còn mắc nhược điểm rườm rà, dài dòng.

Lê Huy – Đào Mạnh Thắng

P250. Bạn Pi có n^2 chiếc kẹo ($n \in \mathbb{N}^*, n > 2$), được đựng trong n chiếc hộp. Pi chọn ngẫu nhiên ba hộp và nếu tổng số kẹo trong ba hộp ấy là một số chia hết cho 3 thì Pi chuyển kẹo từ hộp nọ sang hộp kia (nếu cần), sao cho ba hộp đó có số kẹo bằng nhau; trường hợp ngược lại (tức, tổng số kẹo có trong ba hộp là một số không chia hết cho 3), Pi chọn ba hộp khác, và lại thực hiện quy trình vừa nêu.

Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 2$, sao cho không phụ thuộc vào số kẹo có trong n hộp ở thời điểm ban đầu, nhờ việc thực hiện một số hữu hạn lần liên tiếp quy trình nêu trên, bạn Pi có thể làm cho số kẹo trong tất cả n hộp đều bằng nhau.

Lời giải (dựa theo lời giải của người đề xuất bài toán).

Vì có tổng cộng n^2 chiếc kẹo, được đựng trong n hộp nên khi Pi đã làm cho số kẹo trong tất cả các hộp đều bằng nhau (nếu có thể) thì trong mỗi hộp sẽ có n chiếc kẹo.

Với một chiếc hộp, trong có đựng m chiếc kẹo, ta gọi $m - n$ là *độ lệch kẹo* của chiếc hộp đó, tại thời điểm nó đựng m chiếc kẹo.

Do tổng số kẹo trong n hộp luôn bằng n^2 nên tại bất cứ thời điểm nào, tổng độ lệch kẹo của cả n chiếc hộp đều bằng 0; và tại thời điểm mà Pi đã hoàn thành việc san đều kẹo trong n hộp (nếu có thể) thì mỗi độ lệch kẹo đều bằng 0. Vì thế, Pi chỉ có thể san đều kẹo trong n hộp khi tồn tại những thời điểm, mà sau khi Pi thực hiện được việc chuyển kẹo thì có những độ lệch kẹo có trị tuyệt đối giảm thực sự. Ta có nhận xét sau:

Nhận xét. Pi có thể làm giảm trị tuyệt đối của các độ lệch kẹo nào đó khi và chỉ khi trong n chiếc hộp tồn tại ba hộp với độ lệch kẹo

d_1, d_2, d_3 , thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$1/ d_1 + d_2 + d_3 \equiv 0 \pmod{3};$$

$$2/ |d_1 - d_2| + |d_2 - d_3| + |d_3 - d_1| \neq 0.$$

Chúng minh.

Rõ ràng, điều kiện 1/ tương đương với việc tồn tại ba hộp có tổng số kẹo đựng trong đó là một số chia hết cho 3, và điều kiện 2/ tương đương với việc có ít nhất hai trong ba hộp đó có số kẹo không bằng nhau.

Vì thế, điều kiện cần ("chỉ khi") là hiển nhiên. Xét điều kiện đủ ("khi").

Giả sử vào một thời điểm nào đó, trong n chiếc hộp tồn tại ba hộp với độ lệch kẹo d_1, d_2, d_3 , thỏa mãn đồng thời các điều kiện 1/ và 2/, nêu trong Nhận xét. Khi đó, với việc chọn được ba hộp ấy, Pi sẽ thực hiện được việc chuyển kẹo từ hộp nọ sang hộp kia, sao cho sau khi chuyển, độ lệch kẹo của mỗi hộp sẽ là $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$.

Không mất tổng quát, giả sử $|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3|$. Nếu trong dãy sắp xếp trên có ít nhất một dấu "<" thì

$$\frac{|d_1 + d_2 + d_3|}{3} \leq \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3|}{3}$$

$$< \frac{|d_3| + |d_3| + |d_3|}{3} = |d_3|;$$

và điều này cho thấy, ít nhất, Pi đã làm giảm được $|d_3|$.

Nếu $|d_1| = |d_2| = |d_3|$ thì do điều kiện 2/, phải có ít nhất một trong ba tổng $d_1 + d_2, d_2 + d_3$, và $d_3 + d_1$, bằng 0. Vì thế, tồn tại $i \in \{1; 2; 3\}$ mà

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_i.$$

Do đó

$$\frac{|d_1 + d_2 + d_3|}{3} = \frac{|d_i|}{3} = \frac{|d_1|}{3} = \frac{|d_2|}{3} = \frac{|d_3|}{3},$$

và điều này cho thấy, Pi đã làm giảm được $|d_1|, |d_2|, |d_3|$.

Điều kiện đủ được chứng minh. Và vì thế, Nhận xét được chứng minh.

Dễ thấy, điều kiện 1/ nêu trong Nhận xét xảy ra khi và chỉ khi hoặc $d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \pmod{3}$,

hoặc $d_1 \not\equiv d_2 \pmod{3}, d_2 \not\equiv d_3 \pmod{3}$, và $d_3 \not\equiv d_1 \pmod{3}$.

Từ đó, với lưu ý rằng, tổng tất cả n độ lệch kẹo tại bất kỳ thời điểm nào cũng bằng 0, suy ra, Pi sẽ không thực hiện được việc chuyển kẹo giữa các hộp khi và chỉ khi:

– hoặc độ lệch kẹo của tất cả n hộp đều bằng 0; (1)

– hoặc tồn tại k độ lệch kẹo ($k \in \mathbb{N}^*, k < n$) cùng bằng nhau và bằng một số d nào đó, $n - k$ độ lệch kẹo còn lại cũng cùng bằng nhau và bằng một số d' nào đó, với $d \not\equiv d' \pmod{3}$. (2)

Vì trị tuyệt đối của mỗi độ lệch kẹo là một số tự nhiên, và sau mỗi lần Pi thực hiện được việc chuyển kẹo giữa các hộp, theo Nhận xét trên, trong n trị tuyệt đối của n độ lệch kẹo, phải có những trị tuyệt đối giảm thực sự, nên suy ra Pi không thể thực hiện được mãi việc chuyển kẹo giữa các hộp; nghĩa là, phải có một thời điểm, mà Pi không thể thực hiện được việc chuyển kẹo giữa các hộp, cho dù có chọn ba hộp nào đi chăng nữa. Theo chứng minh trên, tình trạng kẹo trong n hộp, tại thời điểm này, phải hoặc là (1), hoặc là (2).

• Trường hợp 1. $n = 3^m, m \in \mathbb{N}^*$

Giả sử tình trạng kẹo trong n hộp, tại thời điểm Pi không thể thực hiện được việc chuyển kẹo theo qui trình, là (2). Khi đó, tại thời điểm ấy, ta có:

$$d \cdot k + d' (3^m - k) = 0,$$

$$\text{hay} \quad (d - d') k + d' \cdot 3^m = 0.$$

Suy ra,

$$(d - d') k \equiv 0 \pmod{3^m},$$

là điều vô lí, vì $d \not\equiv d' \pmod{3}$ và $k < 3^m$.

Điều vô lí nhận được trên đây chứng tỏ thực trạng kẹo trong n hộp, tại thời điểm Pi không thể thực hiện được việc chuyển kẹo theo qui trình, phải là (1); nghĩa là, Pi đã san đều được số kẹo trong n hộp, sau một số hữu hạn lần thực hiện liên tiếp qui trình chuyển kẹo.

• Trường hợp 2. $n = 3^m(3q + 1), m \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$.

Xét phân bố sau của n^2 chiếc kẹo trong n hộp, ở thời điểm ban đầu: có $k = 3^m$ hộp, mà độ lệch kẹo của mỗi hộp bằng $3q$; và ở $n - k$ hộp còn lại, độ lệch kẹo của mỗi hộp bằng (-1) .

Phân bố kẹo nêu trên là có thể, vì

$$(3q) \cdot 3^m + (-1) \cdot (3^m(3q+1) - 3^m) = 0.$$

Vì $3q \not\equiv (-1) \pmod{3}$ nên phân bố trên thuộc loại (2). Vì thế, Pi không thể thực hiện được việc chuyển kẹo, ngay từ thời điểm ban đầu, cho dù có chọn ba hộp nào đi chăng nữa. Do đó, Pi không thể san đều số kẹo trong n hộp, ở trường hợp này.

• Trường hợp 3. $n = 3^m(3q+2)$, $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Xét phân bố sau của n^2 chiếc kẹo trong n hộp, ở thời điểm ban đầu: có $k = 2 \cdot 3^m$ hộp, mà độ lệch kẹo của mỗi hộp bằng $3q$; và ở $n - k$ hộp còn lại, độ lệch kẹo của mỗi hộp bằng (-2) .

Phân bố kẹo nêu trên là có thể, vì

$$(3q) \cdot (2 \cdot 3^m) + (-2) \cdot (3^m(3q+2) - 2 \cdot 3^m) = 0.$$

Vì $3q \not\equiv (-2) \pmod{3}$ nên phân bố trên thuộc loại (2). Vì thế, Pi không thể thực hiện được việc chuyển kẹo, ngay từ thời điểm ban đầu, cho dù có chọn ba hộp nào đi chăng nữa. Do đó, Pi không thể san đều số kẹo trong n hộp, ở trường hợp này.

Vậy, tóm lại, từ kết quả xét các trường hợp nêu trên, ta được tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu đề bài là tất cả các số có dạng $n = 3^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Để biết, từ trạng thái kẹo tùy ý ban đầu của n chiếc hộp, có thể đạt được hay không trạng thái kẹo theo yêu cầu đề bài, nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển kẹo đã cho trong đề bài, ta cần dựa vào đâu? Câu trả lời hiển nhiên là “dựa vào diễn biến của số kẹo trong n hộp, trong quá trình thực hiện phép chuyển kẹo đó”. Nói một cách khác, cần dựa vào diễn biến của sự sai khác giữa số kẹo ban đầu và số kẹo ở trạng thái cần đạt được, trong mỗi hộp. Đây chính là lí do khiến chúng ta đã đưa ra và xét sự thay đổi của độ lệch kẹo ở mỗi hộp, trong lời giải trên.

Cần dựa vào đâu để quan sát sự thay đổi của các độ lệch kẹo ở mỗi hộp, sau mỗi lần thực hiện phép chuyển kẹo đã cho trong đề bài? Khó có thể nói rằng, bạn sẽ cố vắt óc để tìm ra câu trả lời, khác câu trả lời đương nhiên “dựa vào nội dung của phép chuyển kẹo đó”. Các điều kiện 1/ và 2/ nêu trong Nhận xét (ở lời giải trên) là một sự diễn đạt lại nội dung của phép chuyển kẹo đã cho trong đề bài, bằng ngôn ngữ “độ lệch kẹo”, và kết luận của Nhận xét thể hiện diễn biến của các độ lệch kẹo, sau mỗi lần thực hiện được việc chuyển kẹo. Diễn biến đó không hề khó thấy, nếu bạn đã biết “trị tuyệt đối của một tổng không vượt quá tổng các trị tuyệt đối”. Từ diễn biến ấy, chỉ có “cố tình nhắm mắt làm ngơ” bạn mới không thấy quá trình thực hiện việc chuyển kẹo phải là một quá trình dừng; nghĩa là, phải tồn tại một thời điểm, mà bạn không thể luân chuyển được kẹo giữa các hộp, dù có muốn luân chuyển đến đâu đi chăng nữa. Hay, nói một cách khác, trong quá trình thực hiện phép chuyển kẹo, sớm hay muộn, ta sẽ gặp một trạng thái kẹo trong n hộp, mà đối với trạng thái ấy, ta không thể luân chuyển kẹo giữa các hộp được nữa. Trạng thái ấy nó như thế nào? Dĩ nhiên, nó phải không thỏa mãn các điều kiện mà đề bài đã qui định. Bạn có thể phủ định một mệnh đề đã cho, để mô tả được trạng thái ấy không? Tất nhiên là có, và khi đó, bạn sẽ nhận được (1) và (2) trong lời giải trên. Tới đây, việc tiếp theo bạn cần làm, sẽ là tìm hiểu xem khi nào thì trạng thái dừng là (1) và khi nào là (2).

2. Những điều nêu trong mục 1 trên đây nhằm minh chứng cho độ tự nhiên của lời giải đã trình bày ở phần Lời giải, cũng như mức độ “huyền bí” của các thông tin cần khai thác được từ các giả thiết của bài ra, để giải được bài toán ấy. Tuy độ tự nhiên và mức “huyền bí” là như vậy, nhưng Tòa soạn chỉ nhận được đúng ba lời giải từ các bạn học sinh, gồm một bạn là học sinh cấp THCS, và hai bạn là học sinh cấp THPT. Cả ba lời giải mà Tòa soạn nhận được đều đúng ở phần xét các số nguyên dương n không có dạng 3^m , $m \in \mathbb{N}^*$; và đều

không đúng ở phần xét các số nguyên dương n có dạng đó. Hai bạn cấp THPT đã giải sai phần ấy do chưa hiểu đúng đề bài; những điều các bạn đó đã trình bày là lời giải đúng cho bài toán với giả thiết, ở mỗi lần chọn ba chiếc hộp, ta được quyền chọn ba hộp có số kẹo theo ý muốn, trong khi, bài đã ra không cho phép làm điều ấy, mà yêu cầu phải chọn “hú họa” (tức, chọn mà không được phép biết số kẹo trong các hộp được chọn bằng bao nhiêu, có tính chất gì).

Nguyễn Khắc Minh

DÍNH CHÍNH:

Tạp chí Pi tập 3 – số 1, tháng 1.2019, trang 29, dòng 15, 16↓:

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHỐI THCS

- Trường THCS Tp. Bến Tre, tỉnh Bến Tre: Đào Trọng Toàn (lớp 9/3; P241, P242, P243, P244, P247, P248, P249).
- Trường THCS Nguyễn Trực, Huyện Thanh Oai, Hà Nội: Lê Ngọc Tùng (lớp 9A; P241, P243, P247).
- Trường THCS Giảng Võ, Quận Ba Đình, Hà Nội: Bùi Nhật Minh (lớp 8A1; P241).
- Archimedes Academy, Quận Thanh Xuân, Hà Nội: Dương Hồng Sơn (lớp 8C1; P241, P243).

KHỐI THPT

- Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh: Phạm Công Tài (lớp 11 Toán 1; P241, P242, P243, P244, P247).
- Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên: Trần Nguyễn Thái Bình (lớp 10 Toán 1; P249), Lê Khánh Huy (lớp 11 Toán 1; P241, P242, P243, P245, P247, P248, P249), Nguyễn Thanh Phúc (lớp 10 Toán 1; P242, P243, P247, P248, P249).
- Trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa: Thiều Đình Minh Hùng (lớp 10T2; P247, P248, P249).
- Trường THPT chuyên Quốc học, Thừa Thiên – Huế: Nguyễn Hòa Phan (lớp 10 Toán 1; P249).
- Trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang: Nhóm Pi Group CTG (P247, P249).
- Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc: Chu Thị Thanh (lớp 11A1; P244, P248, P249).
- Trường THPT chuyên Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: Ngô Quỳnh Anh (lớp 10A1; P248), Hoàng Tùng (lớp 12T; P249).
- Trường Phổ thông Năng khiếu – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh: Trần Nguyễn Nam Hưng (lớp 10 Toán; P241, P243, P244, P245, P249).
- St. Joseph's Institution, Singapore: Nguyễn Quang Minh (P247).

• Đã in:

$$|P(1)| = |P(2)| = |P(3)| = |P(4)| = |P(5)| \\ = |P(6)| = |P(7)| = 12.$$

• Nay sửa thành:

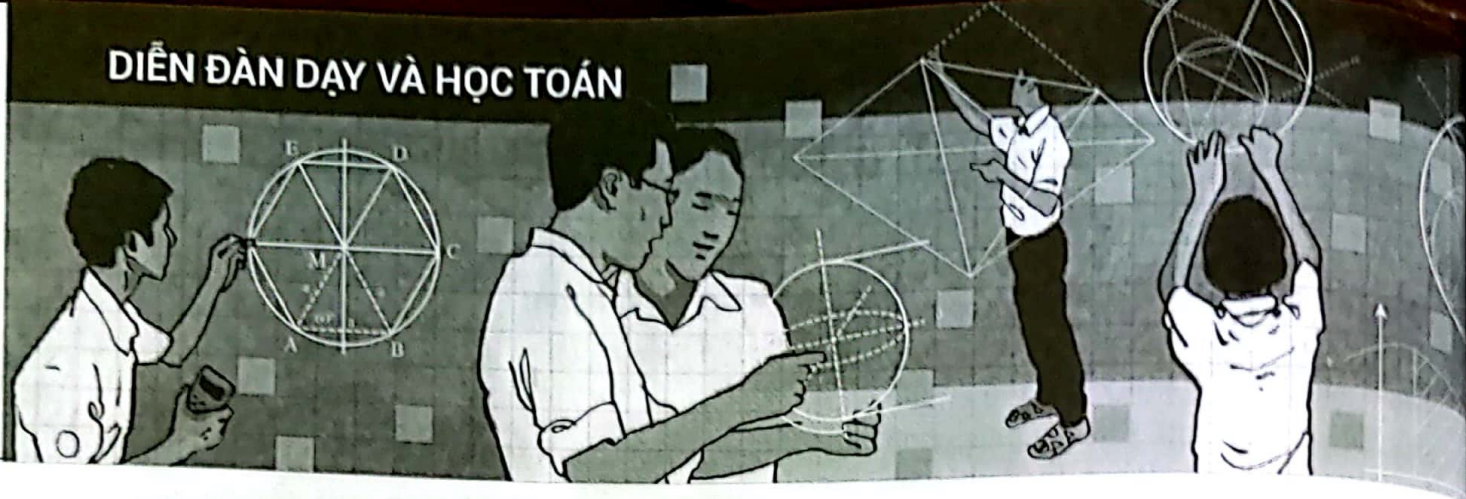
$$|P(1)| = |P(2)| = |P(3)| = |P(5)| = |P(6)| \\ = |P(7)| = 12.$$

Thành thật cáo lỗi cùng bạn đọc.

THÔNG BÁO:

1. Vì lỗi in ấn nêu trên, thời hạn chót nhận lời giải cho bài P257 được gia hạn tới ngày 05.7.2019.

2. Thời hạn chót nhận lời giải cho các bài toán trong Mục Thách thức kì này của số Tạp chí này là ngày 05.7.2019.



LTS. Tạp chí Pi nhiệt liệt hoan nghênh bạn Lê Đức Hiếu, học sinh lớp 11T1, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Thành phố Hà Nội, đã đăng đàn, để trao đổi, chia sẻ một số kết quả thu được trong quá trình học tập theo phương pháp chủ động, tích cực, sáng tạo. Do khuôn khổ của Tạp chí có hạn, chúng tôi đăng tải những chia sẻ của bạn Hiếu trong hai số Tạp chí, số này và số liền sau của số này. Dưới đây là phần đầu bài viết của bạn Lê Đức Hiếu.

TÌM TÒI XUNG QUANH MỘT BÀI TOÁN THI OLYMPIC TOÁN HỌC BRAZIL NĂM 2005

Lê Đức Hiếu¹

Trước hết, tôi xin phép nhắc lại, không chứng minh, một kết quả quen thuộc về số mũ trong phân tích chuẩn của số nguyên dương $n > 1$, sẽ được sử dụng trong bài viết này. Đó là **Bổ đề LTE** (Lifting The Exponent Lemma; tiếng Việt: Bổ đề nâng – BBT).

Bổ đề LTE.

Với n là một số nguyên dương, và p là một ước nguyên tố của n , ta kí hiệu $v_p(n)$ là số mũ của p trong phân tích chuẩn của n .

1/ Cho a, b là các số nguyên dương, $a > b$. Khi đó, với p là một số nguyên tố lẻ, thỏa mãn $p \mid a - b$ và $p \nmid ab$, ta có:

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n),$$

với mọi số nguyên dương n .

2/ Cho a, b là hai số nguyên dương lẻ, $a > b$. Khi đó:

– Với mọi số nguyên dương chẵn n , ta có:

$$v_2(a^n - b^n) = v_2\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) + v_2(n);$$

– Với mọi số nguyên dương lẻ n , ta có:

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b).$$

Trong phần dưới đây, tôi sẽ trình bày những tìm tòi của mình xung quanh bài toán số 6 trong Đề thi Olympic Toán học Brazil, năm 2005. Bài toán đó như sau:

Bài toán 1 (Bài 6, Đề thi Brazil MO, 2005).

Cho $a, c \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng, với mọi $b \in \mathbb{Z}$, tồn tại $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

Trước Olympic Toán học năm 2005 của Brazil, bài toán trên đã được đề cập trong bài báo “An Interesting Problem in Number Theory” của tác giả Gergely Záradi, công bố trên Tạp chí Komal, năm 1998. Một trong các lời giải có thể của Bài toán 1, như sau:

Lời giải. Trong lời giải này, ta kí hiệu ước số chung lớn nhất của hai số nguyên dương m, n bởi $\gcd(m, n)$.

¹ Học sinh lớp 11T1, trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội.

Ta chứng minh mệnh đề sau đây, bằng phương pháp quy nạp theo $c \in \mathbb{N}^*$:

Mệnh đề. Với mọi $a, c \in \mathbb{N}^*$, và với mọi $b \in \mathbb{Z}$, tồn tại vô hạn số $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

Chứng minh. Xét số $a \in \mathbb{N}^*$, và số $b \in \mathbb{Z}$, tùy ý. Khi đó, bằng quy nạp theo $c \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh khẳng định sau:

Khẳng định. Tồn tại vô hạn số $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

Để thấy, khẳng định đúng với $c = 1$.

Giả sử khẳng định đã đúng đến $c = k - 1$ ($k \geq 2$), ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $c = k$.

Do $\varphi(k) < k$ nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại $x_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a^{x_0} + x_0 \equiv b \pmod{\varphi(k)}, \quad (1)$$

$$\text{và } x_0 \geq \max \left\{ b, \max_{p|k} v_p(k) \right\}. \quad (2)$$

Do (2) nên với mọi số nguyên tố q là ước của $\gcd(a, k)$, ta có:

$$v_q(k) \leq v_q(a^{x_0}).$$

Mặt khác, theo định lý Euler, với d là một ước bất kì của k , mà $\gcd(d, a) = 1$, ta có:

$$d \mid (a^{m \cdot \varphi(k)} - 1), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó, ta có

$$k \mid a^{x_0} (a^{m \cdot \varphi(k)} - 1), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*;$$

điều này tương đương với

$$a^{m \cdot \varphi(k) + x_0} \equiv a^{x_0} \pmod{k}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Từ (1) suy ra tồn tại số nguyên dương N sao cho:

$$a^{x_0} + x_0 - b = N \cdot \varphi(k).$$

Với mỗi $n > N$, đặt

$$x_n = x_0 + (nk - N) \cdot \varphi(k).$$

Khi đó, từ (3) ta có:

$$\begin{aligned} a^{x_n} + x_n &\equiv a^{x_0} + x_n \equiv a^{x_0} + x_0 - N \cdot \varphi(k) \\ &\equiv b \pmod{k}, \end{aligned}$$

với mọi $n > N$.

Mà $x_n < x_{n+1}$, với mọi $n > N$, nên từ đó suy ra tồn tại vô hạn số $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a^x + x \equiv b \pmod{k}.$$

Vì thế, theo nguyên lý quy nạp, tồn tại vô hạn số $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a^x + x \equiv b \pmod{c},$$

với mọi $c \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định được chứng minh. Từ đây, vì a là số nguyên dương tùy ý, và b là số nguyên tùy ý, nên mệnh đề được chứng minh.

Hiển nhiên, từ mệnh đề ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu của bài toán 1.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được kết quả sau, có thể xem như một mở rộng của bài toán 1.

Kết quả 1. Cho s, a, c là các số nguyên dương. Khi đó, với mọi số nguyên dương b , tồn tại vô hạn số $x \in \mathbb{N}^*$ sao cho:

$$sa^x + x \equiv b \pmod{c}.$$

Dưới đây, ta sẽ xem xét việc sử dụng bài toán 1 và kết quả 1 để giải một số bài toán khó.

Bài toán 2 (IMO 2005 Short List).

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn

$$(a^n + n) \mid (b^n + n),$$

với mọi số nguyên dương n .

Chứng minh rằng $a = b$.

Lời giải. Từ giả thiết của bài ra, hiển nhiên suy ra $b \geq a$.

Giả sử $b > a$.

Áp dụng giả thiết của bài ra cho $n = 1$, ta được $(a + 1) \mid (b + 1)$. Do đó

$$(a + 1) \mid (b - a). \quad (1)$$

Xét ước nguyên tố p của $a+1$ (số này tồn tại vì $a+1 \geq 2$). Rõ ràng, $p \nmid a$, và từ (1), ta có

$$p \mid (b-a). \quad (2)$$

Theo kết quả bài toán 1, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$p^{v_p(b-a)+1} \mid (a^{n_0} + n_0). \quad (3)$$

Do $p \nmid a$ nên $p \nmid n_0$.

Áp dụng giả thiết của bài ra cho $n = n_0$, ta được:

$$(a^{n_0} + n_0) \mid (b^{n_0} + n_0). \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra

$$p^{v_p(b-a)+1} \mid (b^{n_0} - a^{n_0}).$$

Do đó, $v_p(b^{n_0} - a^{n_0}) \geq v_p(b-a) + 1$. (5)

Vì $p \mid (a+1)$, và $(a+1) \mid (b+1)$, nên $p \mid (b+1)$; do đó, $p \nmid b$. Suy ra, $p \nmid ab$. (6)

Từ (2) và (6), theo bổ đề LTE, ta có:

$$\begin{aligned} v_p(b^{n_0} - a^{n_0}) &= v_p(b-a) + v_p(n_0) \\ &= v_p(b-a) \quad (\text{do } p \nmid n_0), \end{aligned}$$

mâu thuẫn với (5).

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ điều giả sử ở trên là sai; nghĩa là, ta có $a = b$.

Bài toán 3. Cho a, b, k là các số nguyên dương thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- 1) $k > 1$;
- 2) Với mọi số nguyên dương n , tích $(a^n + n)(b^n + n)$ là một lũy thừa bậc k .

Chứng minh rằng $a = b$ và $k = 2$.

Lời giải. Xét:

• Trường hợp 1. $\gcd(a+1, b+1) = 1$.

Áp dụng giả thiết của bài ra cho $n = 1$, ta được $(a+1)(b+1)$ là một lũy thừa bậc k . Từ đây, do $\gcd(a+1, b+1) = 1$ nên tồn tại các số nguyên dương $x, y > 1$, nguyên tố cùng nhau, và sao cho

$$a+1 = x^k \text{ và } b+1 = y^k,$$

hay, $a = x^k - 1$ và $b = y^k - 1$. Vì thế, theo giả thiết của bài ra, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $z_n \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\left((x^k - 1)^n + n \right) \left((y^k - 1)^n + n \right) = z_n^k.$$

Giả sử x có ước nguyên tố $p > 2$.

Vì $p \mid x$ nên $p^k \mid x^k$. Do đó

$$x^k - 1 \equiv -1 \pmod{p^k}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \left(x^k - 1 \right)^{2p^{k-1}+1} + 2p^{k-1} + 1 \\ & \equiv -1 + 2p^{k-1} + 1 = 2p^{k-1} \pmod{p^k}. \end{aligned}$$

Từ đó, vì $p^{k-1} \nmid p^k$ và p là số lẻ, nên ta có:

$$v_p \left((x^k - 1)^{2p^{k-1}+1} + 2p^{k-1} + 1 \right) = k-1. \quad (1)$$

Suy ra, $p \mid z_{2p^{k-1}+1}^k$. Do đó

$$v_p \left(z_{2p^{k-1}+1}^k \right) \geq k.$$

Kết hợp với (1), suy ra

$$\left(y^k - 1 \right)^{2p^{k-1}+1} + 2p^{k-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Vì thế

$$\left(y^k - 1 \right)^{2p^{k-1}+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\left(y^k - 1 \right)^{4p^{k-1}+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Từ đây và (2), suy ra

$$\begin{aligned} & \left(y^k - 1 \right)^{4p^{k-1}+1} - \left(y^k - 1 \right)^{2p^{k-1}+1} \\ & = \left(\left(y^k - 1 \right)^{4p^{k-1}+1} + 1 \right) - \left(\left(y^k - 1 \right)^{2p^{k-1}+1} + 1 \right) \\ & \equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

hay

$$(y^k - 1)^{2p^{k-1}+1} \cdot ((y^k - 1)^{2p^{k-1}} - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Mà $(y^k - 1)^{2p^{k-1}+1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ (do (2)), nên suy ra

$$(y^k - 1)^{2p^{k-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Từ đó, vì p là số lẻ nên ta được:

$$(y^k - 1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

điều này tương đương với

$$y^k (y^k - 2) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3)$$

Vì $p \mid x$ và $\gcd(x, y) = 1$, nên $p \nmid y$; và do đó, $p \nmid y^k$. Vì thế, từ (3) suy ra

$$y^k - 2 \equiv 0 \pmod{p},$$

hay $y^k - 1 \equiv 1 \pmod{p}$. Kết hợp với (2), suy ra $p \mid 2$, là điều vô lý (do p là số lẻ lớn hơn 1).

Điều vô lý nhận được chứng tỏ giả sử “ x có ước nguyên tố $p > 2$ ” ở trên là sai; vì thế, do $x > 1$ nên ta có:

$$x = 2^s, s \in \mathbb{N}^*.$$

Một cách hoàn toàn tương tự trên, ta cũng chứng minh được:

$$y = 2^t, t \in \mathbb{N}^*.$$

Vì thế, ta có $\gcd(2^s, 2^t) = 1$, là điều vô lý (do $s, t \in \mathbb{N}^*$).

Điều vô lý nhận được chứng tỏ trường hợp 1 không thể xảy ra. Vì thế, phải xảy ra:

• Trường hợp 2. $\gcd(a+1, b+1) > 1$.

Xét ước nguyên tố p của $\gcd(a+1, b+1)$. Dễ thấy, ta có

$$p \nmid a, p \nmid b \text{ và } p \mid (b-a). \quad (4)$$

Giả sử phản chứng $a \neq b$. Khi đó, vì vai trò của a và b trong bài toán là như nhau nên không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a > b$.

Theo kết quả bài toán 1, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$

sao cho

$$a^{n_0} + n_0 \equiv p^{(k-1)v_p(a-b)+1} \pmod{p^{(k-1)v_p(a-b)+2}}.$$

Vì $p^{(k-1)v_p(a-b)+1} \mid p^{(k-1)v_p(a-b)+2}$, nên ta có:

$$v_p(a^{n_0} + n_0) = (k-1)v_p(a-b) + 1. \quad (5)$$

Suy ra, $p \mid a^{n_0} + n_0$; mà $p \nmid a^{n_0}$ (do $p \nmid a$), nên $p \nmid n_0$. (6)

Từ (4) và (6), theo bổ đề LTE, suy ra

$$\begin{aligned} v_p((a^{n_0} + n_0) - (b^{n_0} + n_0)) \\ = v_p(a^{n_0} - b^{n_0}) = v_p(a-b). \end{aligned}$$

Kết hợp với (5), ta được:

$$v_p(b^{n_0} + n_0) = v_p(a-b). \quad (7)$$

Từ (5) và (7), suy ra

$$\begin{aligned} v_p((a^{n_0} + n_0)(b^{n_0} + n_0)) \\ = (k-1)v_p(a-b) + 1 + v_p(a-b) \\ = k \cdot v_p(a-b) + 1. \end{aligned}$$

Vì thế, $v_p((a^{n_0} + n_0)(b^{n_0} + n_0))$ không là một bội của k ; và do đó, $(a^{n_0} + n_0)(b^{n_0} + n_0)$ không là một lũy thừa bậc k , mâu thuẫn với giả thiết.

Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng ở trên là sai; nghĩa là, ta có $a = b$.

Xét số nguyên tố p tùy ý.

Theo kết quả của bài toán 1, tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$a^{n_1} + n_1 \equiv p \pmod{p^2}.$$

Vì $p \mid p^2$, nên ta có:

$$v_p(a^{n_1} + n_1) = 1. \quad (8)$$

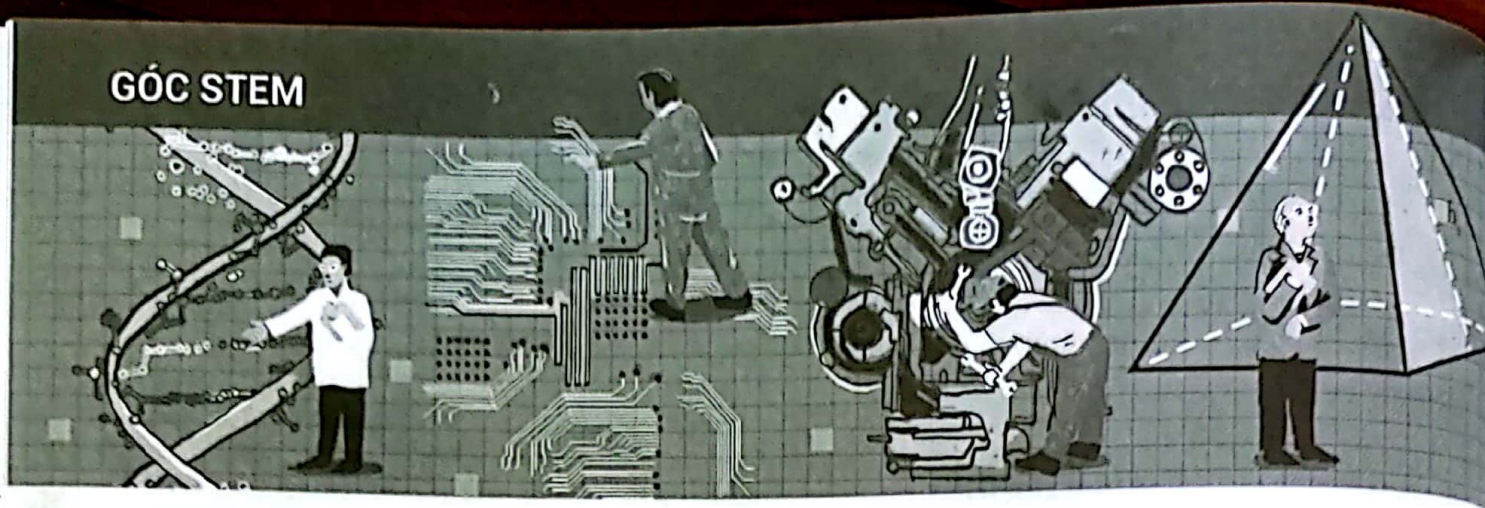
Áp dụng giả thiết của bài ra cho $n = n_1$, với lưu ý $b = a$, ta có số $c = (a^{n_1} + n_1)^2$ là một lũy thừa bậc k . Vì thế, từ (8) suy ra

$$k = v_p(c) = v_p((a^{n_1} + n_1)^2) = 2.$$

Vậy, $a = b$ và $k = 2$.

Bài toán 3 được giải trọn vẹn.

(còn tiếp)



Nước và những điều chưa biết

Kì 3: Giải thích các tính chất của nước

Nguyễn Hoàng Hải¹

Chúng ta đã biết có ba loại liên kết hoá học, đó là liên kết kim loại (xuất hiện trong các kim loại, hợp kim), liên kết ion (NaCl , CuO , ...) và liên kết cộng hoá trị (N_2 , O_2 , ...). Ba liên kết này có đặc điểm là các nguyên tử có trao đổi/chia sẻ điện tử với nhau. Với các phân tử và nguyên tử còn tồn tại bốn loại tương tác vật lý, sắp xếp theo mức độ từ mạnh đến yếu là tương tác ion-lưỡng cực (ion của muối ăn và nước), lưỡng cực-lưỡng cực (giữa phân tử nước với nhau), lưỡng cực-lưỡng cực cảm ứng (phân tử nước với phân tử O_2 , N_2), lưỡng cực cảm ứng-lưỡng cực cảm ứng (oxy ở trạng thái lỏng, ...). Các tương tác vật lý không có trao đổi hoặc chia sẻ điện tử mà đó là lực hút tĩnh điện.

Chúng ta biết rằng độ âm điện của một nguyên tử là xu hướng hút điện tử về nguyên tử. Các phân tử tạo thành từ cùng một nguyên tố như O_2 , N_2 , ... thì không có sự khác biệt về độ âm điện giữa các nguyên tử nên không tạo thành các lưỡng cực điện. Các phân tử tạo thành từ các nguyên tố khác nhau sẽ có độ âm điện khác nhau nhưng lúc này hình dạng của phân tử sẽ quyết định đến độ phân cực của phân tử. Phân tử gồm hai nguyên tử tạo thành từ hai nguyên tố (HCl , NO , ...) thì luôn là các lưỡng cực điện. Các phân tử gồm nhiều nguyên tử tạo thành từ nhiều nguyên tố thì độ phân cực phụ thuộc vào tính đối xứng của

phân tử. Phân tử có tính đối xứng cao như CO_2 không bị phân cực là do mặc dù C=O bị phân cực nhưng hai cặp C=O đối xứng qua nguyên tử C cân bằng với nhau. Trở lại phân tử nước, độ âm điện của oxy là 3,44 (theo thang đo Pauling) lớn hơn nhiều so với hydro là 2,2 nên khi chia sẻ điện tử thì điện tử đó có xu hướng lại gần nguyên tử oxy hơn là nguyên tử hydro. Kết hợp với hình dạng của phân tử nước với góc liên kết H-O-H bằng $104,5^\circ$ làm cho phân tử này bị phân cực. Hai đỉnh của hydro có điện tích dương hơn so với đỉnh của oxy. Do hydro có độ âm điện thấp nên hydro là cực dương của phân tử nước. Oxy có độ âm điện cao nên oxy là cực âm của phân tử nước. Khi các phân tử nước ở gần nhau, giữa chúng xuất hiện tương tác lưỡng cực-lưỡng cực. Cực âm (oxy) của phân tử này sẽ hút cực dương (hydro) của phân tử khác làm xuất hiện một liên kết giữa hydro và oxy. Liên kết này được gọi là liên kết hydro. Liên kết hydro còn là liên kết để chỉ lực hút giữa H và ba nguyên tử là N, O, F. Đây là một Liên kết mạnh trong các liên kết lưỡng cực-lưỡng cực do đây là liên kết của các nguyên tử có kích thước nhỏ nhất (kích thước của nguyên tử giảm dần từ trái qua phải trong một chu kì của Bảng tuần hoàn, ba nguyên tố N, O, F nằm cuối cùng của chu kì thứ hai). Liên kết hydro giữa các phân tử nước mạnh làm cho nước ở trạng thái lỏng

¹Đại học Quốc gia Hà Nội.

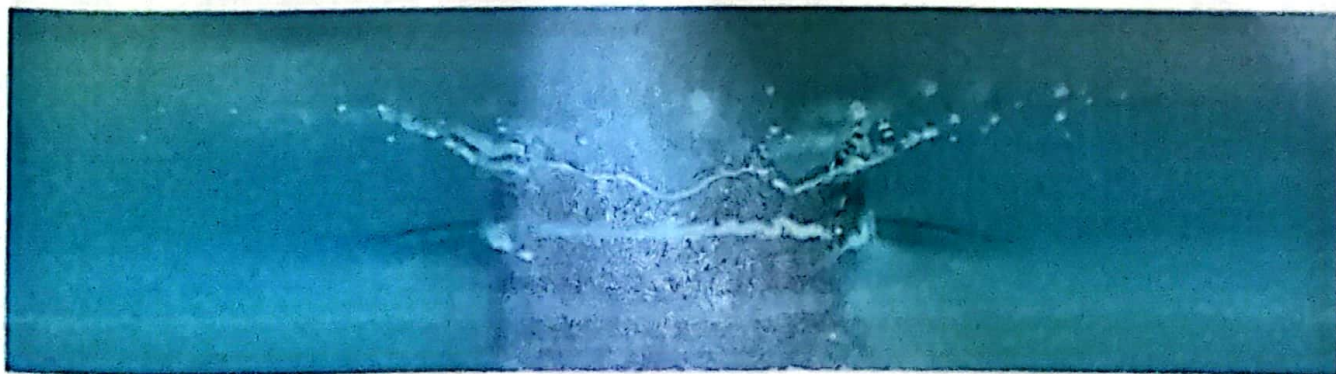
ở điều kiện bình thường. Năng lượng liên kết giữa các phân tử được đo bằng nhiệt độ sôi của nước. Nhiệt độ sôi là nhiệt độ ở đó chuyển động nhiệt đủ lớn để phá vỡ liên kết giữa các phân tử. Nhiệt độ sôi của nước là 100° là khá cao thể hiện độ liên kết lớn giữa phân tử nước.

Khi truyền nhiệt năng vào nước, nhiệt năng đó sẽ làm gia tăng động năng của toàn bộ phân tử. Phân tử có khối lượng lớn thì cần nhiều năng lượng, phân tử có khối lượng nhỏ thì cần ít năng lượng. Phân tử nước không có khối lượng lớn nên năng lượng để làm tăng động năng do khối lượng không đáng kể, nên đáng nhẽ nhiệt dung của nước sẽ nhỏ. Tuy nhiên do các phân tử có liên kết hydro với nhau nên để tăng động năng của phân tử thì năng lượng cần phải thắng liên kết hydro giữa các phân tử. Liên kết hydro này là một liên kết mạnh nên phải cần một lượng nhiệt năng lớn mới có thể thắng được. Ngoài ra phân tử nước có cấu trúc hình học bất đối xứng nên có nhiều mode dao động của các nguyên tử trong phân tử. Nhiệt năng cung cho nước khi làm nóng nước còn cần phải cung cấp thêm cho các mode dao động này. Như vậy, liên kết cộng hoá trị giữa các nguyên tử trong phân tử nước, sự bất đối xứng của phân tử nước và liên kết hydro giữa các phân tử làm cho nước có nhiệt dung lớn.

Liên kết kim loại có tính đẳng hướng nên các nguyên tử có thể xếp chặt làm cho mật độ của kim loại rất cao. Liên kết cộng hoá trị có tính dị hướng phụ thuộc vào góc liên kết. Liên kết lưỡng cực-lưỡng cực cũng vậy. Do góc liên kết giữa hydro và oxy trong phân tử nước là $104,5^{\circ}$ nên phân tử nước không xếp chặt. Ở dạng lỏng, phân tử nước chịu tác dụng của hai năng lượng, đó là năng lượng tĩnh điện có xu

hướng làm giảm độ linh động của các phân tử và năng lượng nhiệt có xu hướng làm tăng độ linh động của các phân tử. Khi nhiệt độ giảm đến nhiệt độ đông đặc, năng lượng tĩnh điện thắng thế làm cho cực dương của phân tử này lại gần cực âm của phân tử kia. Do phân tử nước không đối xứng nên quá trình các điện cực trái dấu lại gần nhau làm chiếm khoảng không gian lớn hơn. Các phân tử nước sẽ cần nhiều không gian ở trạng thái rắn so với trạng thái lỏng. Kết quả của quá trình này là khi giảm nhiệt độ để nước thành nước đá thì thể tích của nước đá lại lớn hơn thể tích của nước lỏng. Điều này làm cho nước đá nhẹ hơn nước lỏng.

Do mỗi phân tử là một lưỡng cực điện nên nước là dung môi tốt, có thể hoà tan các chất rắn tại điều kiện thường. Ví dụ nước có thể hoà tan muối ăn NaCl . Liên kết giữa Na và Cl trong tinh thể muối ăn là liên kết ion, đây là một liên kết mạnh làm cho muối ăn là chất rắn ở điều kiện bình thường. Tuy nhiên khi hoà trong nước, các lưỡng cực điện của phân tử nước sẽ tương tác với các ion Na^{+} và Cl^{-} và thắng liên kết ion giữa Na và Cl làm cho muối bị tan trong nước (tương tác ion-lưỡng cực). Nước cũng có thể hoà tan các hợp chất không tồn tại trong nước dưới dạng ion, ví dụ phân tử khí carbonic CO_2 nhờ vào tương tác lưỡng cực-lưỡng cực cảm ứng. Phân tử CO_2 khác với phân tử nước ở đặc điểm hình học góc liên kết $\text{O}=\text{C}=\text{O}$ là 180° làm cho phân tử này không bị phân cực. Tuy nhiên phân tử CO_2 có thể bị phân cực tức thời, tức là phân cực trong một khoảng thời gian ngắn. Khả năng phân cực tức thời phụ thuộc vào kích thước phân tử, phân tử càng lớn thì khả năng phân cực tức



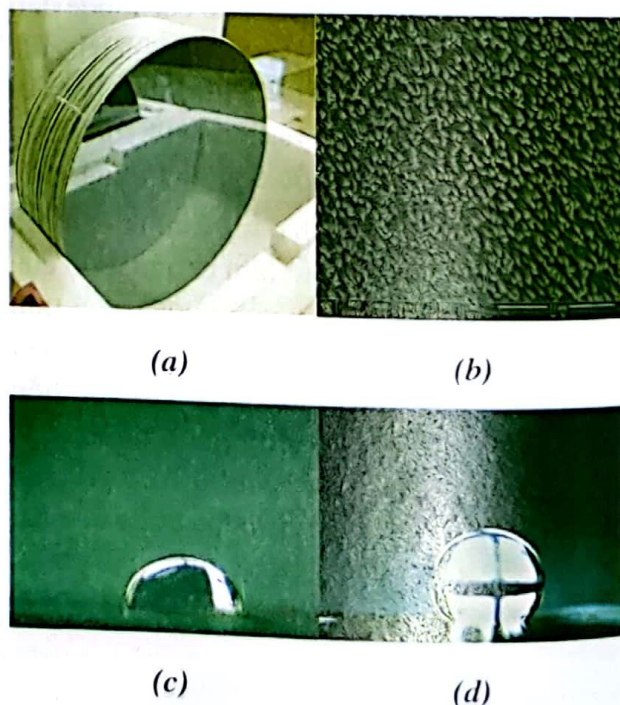
thời càng cao và ngược lại. Sự phân cực tức thời của phân tử có thể bền vững khi gần nó một lưỡng cực điện. Lưỡng cực điện của nước khi ở gần một phân tử CO_2 làm cho phân tử CO_2 bị phân cực cảm ứng. Sự phân cực cảm ứng sẽ làm cho phân tử CO_2 liên kết với phân tử nước và hệ quả là phân tử CO_2 có thể hoà tan vào trong nước. Phân tử oxy cũng có thể hoà tan trong nước nhưng do kích thước của phân tử oxy nhỏ hơn phân tử CO_2 nên khả năng bị phân cực cảm ứng của O_2 nhỏ hơn làm cho khả năng của oxy bị hoà tan trong nước ít hơn so với CO_2 .

Không khí bao gồm phần lớn các phân tử N_2 , O_2 và một số nhỏ các loại khí khác. Các phân tử này không bị phân cực. Khi nước ở trong không khí sẽ có một sự chênh lệch tương tác giữa các phân tử nước tại bề mặt (tương tác lưỡng cực–lưỡng cực cảm ứng) và các phân tử nước với nhau (tương tác hydro). Sự chênh lệch này tạo ra năng lượng bề mặt tại ranh giới tiếp giáp giữa nước và không khí. Diện tích tiếp giáp càng lớn thì năng lượng bề mặt càng lớn. Do đó, để làm giảm năng lượng bề mặt, giọt nước sẽ có dạng cầu là hình dạng có diện tích bề mặt nhỏ nhất với cùng một thể tích.

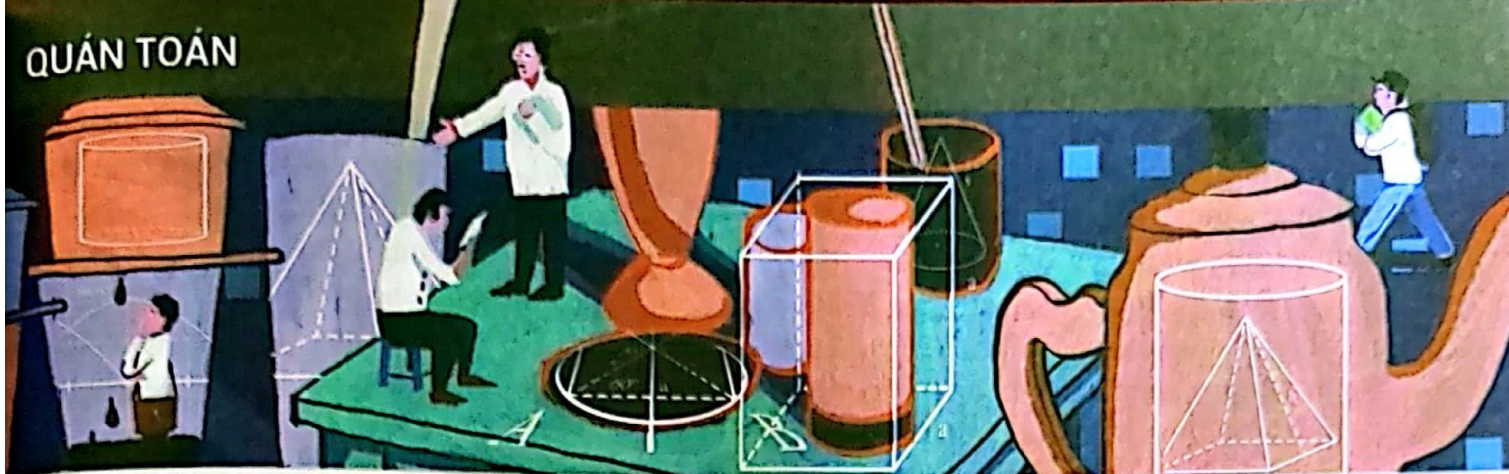
Bây giờ nếu ta nhỏ một giọt nước lên trên một bề mặt chất rắn thì tùy thuộc vào tương tác giữa nước với chất rắn mà giọt nước thể hiện các tính chất khác nhau. Nếu tương tác giữa phân tử nước với phân tử bề mặt chất rắn mà mạnh hơn tương tác giữa các phân tử nước với nhau thì có hiện tượng dính ướt của nước trên bề mặt vật rắn (hydrophilic). Ngược lại nếu tương tác giữa phân tử nước với phân tử trên bề mặt chất rắn yếu hơn tương tác giữa phân tử nước với nước thì có hiện tượng kị nước (hydrophobic) hay còn gọi là không dính ướt. Giọt nước trên bề mặt chảo chống dính sẽ co lại là một ví dụ về bề mặt kị nước. Giọt nước trên bề mặt kính cửa sổ là một ví dụ về bề mặt dính ướt. Mức độ dính ướt hoặc kị nước được xác định từ góc tiếp xúc, là góc tạo bởi mặt nước và mặt chất rắn tại điểm chung giữa phần không khí phần lỏng và phần rắn, của giọt nước trên bề mặt chất rắn. Dính ướt hoàn

toàn khi góc tiếp xúc bằng 0° , dính ướt một phần khi góc tiếp xúc nhỏ hơn 90° , không dính ướt khi góc tiếp xúc lớn hơn 90° . Trong một số tình huống khi ta nhỏ giọt nước trên một bề mặt, như bề mặt lá sen hay bề mặt một số loại cánh hoa, ta có thể thu được góc tiếp xúc rất lớn, thậm chí lớn hơn 135° . Trường hợp này ta nói có hiện tượng siêu kị nước tại bề mặt chất rắn. Hiện tượng siêu kị nước là một hiện tượng vô cùng hấp dẫn tại tiếp giáp lỏng rắn trong Vật lý, tại đó bề mặt chất rắn thường không phẳng mà có cấu trúc nano dạng tơ sợi, hoặc có cấu trúc phân tầng micro rồi tới nano, đồng thời sự dính giữa nước và chất rắn là dính khô.

Các tính chất của nước đã được các sinh vật sử dụng một cách triệt để cho sự sinh tồn của mình. Các tính chất đặc biệt đó đến từ liên kết giữa oxy và hydro trong phân tử. Đặc biệt là sự lai hoá của các điện tử để tạo ra orbital sp^3 làm nên hình dạng đặc biệt của nước. Sau đây, chúng ta tính góc giữa hai góc tạo bởi hai đỉnh của hình tứ diện đều và tâm của hình tứ diện.



Hình 3: Bề mặt "gần" kị nước trên một đế silic phẳng (a) với góc tiếp xúc $82,3^\circ$ (c) được xử lý bằng công nghệ nano trở thành bề mặt có cấu trúc các cột kích thước nano (b) với góc tiếp xúc được cải thiện đáng kể $147,6^\circ$ (d). (Ảnh do Hồ Đức Quân cung cấp)



LTS. Trong bài viết “Ứng dụng toán học trong mật mã và những giải pháp bất ngờ”, đăng trên Tạp chí Pi tập 1, số 1, tháng 1.2017, trang 10 – 14, tác giả Phạm Huy Điển (Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam) đã giới thiệu với bạn đọc, một cách tổng quan, về Hệ mã khóa công khai RSA. Bài viết nhỏ dưới đây của tác giả Hà Minh Thơ, thành viên Bút Sắt của CLB “100 π ngòi bút”, sẽ cung cấp thêm cho bạn đọc một đôi thông tin liên quan đến hệ mã vừa nêu, nhằm giúp bạn đọc hiểu rõ thêm về hệ mã này.

THÊM ĐÔI ĐIỀU VỀ HỆ MẬT MÃ KHÓA CÔNG KHAI RSA

Hà Minh Thơ

Một trong những mô tả đầu tiên của Hệ mật mã khóa công khai RSA (Rivest – Shamir – Adleman) là một lời thách đố của ba nhà khoa học R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman, thuộc Học viện Công nghệ Massachusetts (Hoa Kỳ), được nhà toán học Mỹ Martin Gardner cho công bố trên Tạp chí Người Mỹ khoa học (Scientific American), số tháng 8 năm 1977. Ba nhà khoa học vừa nêu đã thách thiên hạ giải mã được dòng tin đã được mã hóa dưới đây:

$y = 968696137546220614771409222543558$
 $829057599112457431987469512093081$
 $629822514570835693147662288398962$
 $8013391990551829945157815154.$

Cùng với lời thách đố là lời hứa thưởng 100 đô la Mỹ cho người đầu tiên giải mã thành công. Điều đặc biệt đáng nói là, những người thách đố không hề giấu diếm người được thách đố toàn bộ quá trình mã hóa thông tin: Họ đã lấy một câu tiếng Anh; rồi trong câu đó, bằng

cách thay $a = 01, b = 02, c = 03, \dots, z = 26$, dấu cách = 00, họ thu được một số x có 78 chữ số. Tiếp theo, họ lấy một số nguyên tố có 64 chữ số (gọi là p) nhân với một số nguyên tố có 65 chữ số (gọi là q) và được kết quả là:

$n = pq = 114381625757888867669325779$
 $976146612010218296721242362$
 $562561842935706935245733897$
 $830597123563958705058989075$
 $147599290026879543541.$

Cuối cùng, lấy $y \equiv x^{907} \pmod{n}$.

Bạn đã hình dung được bài toán đặt ra ở lời thách đố?

Nếu bạn chưa hình dung được, thì bài toán là như thế này: Cho biết số y , cho biết số n (và thậm chí, cho biết n là tích của hai số nguyên tố, trong đó, một số có 64 chữ số, và số còn lại có 65 chữ số). Hãy tìm số nguyên dương x sao cho $y \equiv x^{907} \pmod{n}$.

Trong bài báo khoa học “A Method for Obtaining Digital Signatures and Public – Key Cryptosystems”, công bố trên Tạp chí Communications of the ACM¹ (Hoa Kỳ), tập 21, số 2 (tháng 2 năm 1978), ba tác giả R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman đã trình bày rất tường minh ý tưởng toán học của họ trong việc tạo ra thuật toán mã hóa, được mô tả ở lời thách đố nêu trên. Một ý tưởng rất đẹp.

Ta biết rằng, với e, f, k, n là các số nguyên dương, thỏa mãn

$$ef = 1 + k \cdot \varphi(n),$$

theo định lý Euler, ta có:

$$x^{ef} = x \cdot (x^k)^{\varphi(n)} \equiv x \cdot 1 = x \pmod{n},$$

với mọi số nguyên dương x , nguyên tố cùng nhau với n .

Do đó, với y là số nguyên dương sao cho $y \equiv x^e \pmod{n}$, ta sẽ có:

$$y^f \equiv x^{ef} \equiv x \pmod{n}.$$

Những điều vừa trình bày trên đây, và quan niệm cho rằng việc phân tích một số nguyên dương có đủ nhiều chữ số thành các số nguyên tố là một việc rất khó, đã dẫn R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman tới ý nghĩ mã hóa x thành y , bằng cách:

– Chọn n, e sao cho n là tích của hai số nguyên tố (đủ lớn), $x < n$, và $(x, n) = (e, \varphi(n)) = 1$ (trong lời thách đố trên đây, e đã được chọn bằng 907);

– Lấy y là số nguyên dương sao cho $y \equiv x^e \pmod{n}$ (tức, lấy y là số dư trong phép chia x^e cho n).

Khi đó, với giả thiết đã biết e và n , để giải mã y , người giải mã cần xác định số nguyên dương f , thỏa mãn $ef \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$, và sau đó, tìm số dư trong phép chia y^f cho n .

Như các bạn đã biết, qua bài viết “Ứng dụng Toán học trong mật mã và những giải pháp

bất ngờ” của GS. Phạm Huy Điển, trên Tạp chí Pi tập 1, số 1, tháng 1.2017, thuật toán mã hóa nêu trên có tên gọi là *phương pháp mã hóa RSA* (hình thành từ ba chữ cái đầu trong họ của ba nhà khoa học đã phát minh ra thuật toán đó). Hệ gồm các quy trình mã hóa, giải mã, theo phương pháp RSA, được gọi là hệ mật mã khóa công khai RSA (sau đây, trong bài viết này, ta sẽ gọi tắt là *hệ mật mã RSA*). Trong hệ mật mã này, cặp số nguyên dương (e, n) là *chìa khóa mã hóa*, và cặp số nguyên dương (f, n) là *chìa khóa giải mã*. Việc mã hóa và giải mã được thực hiện bởi hai chìa khóa khác nhau chính là điểm khác biệt cơ bản giữa hệ mật mã RSA và các hệ mật mã thông thường trước đây, khi việc mã hóa và giải mã được thực hiện bởi cùng một chìa khóa. Điểm khác biệt này tạo ra một ưu thế lớn, không thể phủ nhận, của hệ mật mã RSA. Chẳng hạn, để đảm bảo sự bình an cho người tố giác tội phạm, hoặc tố giác đồng chí X, đồng chí Y tham cái nọ, những cái kia, các cơ quan phòng chống tội phạm, hoặc các ban chống tham nhũng chỉ cần trang bị cho mỗi người dân một chiếc máy tính, trong đó đã cài đặt một chương trình mã hóa văn bản, được viết theo thuật toán RSA.

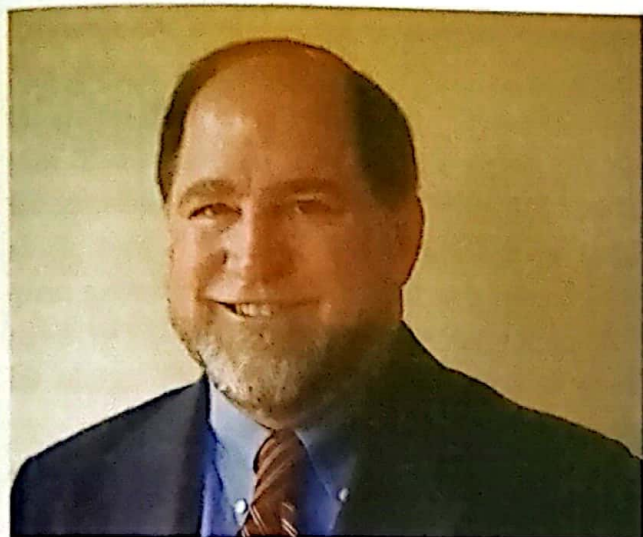


Adleman

Câu hỏi đặt ra: Hệ mật mã RSA có thật sự an toàn tới mức làm người ta có thể hoàn toàn

¹ACM: Association for Computing Machinery

yên tâm phát huy ưu thế nói trên của nó, trong các hoạt động xã hội? Nói cách khác, việc tìm ra chìa khóa giải mã có thật sự khó tới mức làm người ta có thể hoàn toàn yên tâm công khai chìa khóa và toàn bộ quy trình mã hóa, khi triển khai ứng dụng hệ mật mã RSA vào thực tiễn cuộc sống xã hội?



R. Rivest

Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một số thông tin, liên quan đến câu trả lời cho câu hỏi trên đây.

Ta biết rằng, để tìm chìa khóa giải mã, cần giải phương trình đồng dư (ẩn f):

$$e \cdot f \equiv 1 \pmod{\varphi(n)},$$

trong đó, e, n là các số đã biết, thỏa mãn $(e, \varphi(n)) = 1$.

Phương trình nêu trên là một phương trình đồng dư tuyến tính. Tất cả những ai đã học Số học trong nhà trường phổ thông nước ta, ở mức độ quy định cho học sinh chuyên Toán cấp THPT, đều biết rằng, phương trình đó có thể giải được nhờ thuật toán Euclid, nếu biết giá trị của $\varphi(n)$. Với các bạn chưa biết điều vừa nêu, các bạn có thể tìm hiểu trong cuốn sách “Số học” (xem §1 Chương 2, và §1 Chương 5), do GS. Hà Huy Khoái biên soạn, và do NXB Giáo dục tổ chức in ấn, phát hành. Tất cả những ai đã học Số học trong nhà trường phổ thông nước ta, ở mức độ vừa nêu trên, cũng đều biết rằng, ta có thể tính được giá trị cụ thể của $\varphi(n)$, khi biết tất cả các ước

nguyên tố của số nguyên dương $n > 1$, nhờ công thức Euler. Với các bạn chưa biết điều này, các bạn có thể tìm hiểu trong bài viết “Định lý Fermat nhỏ. Phần 2”, của các tác giả V. Senderov và A. Spivak (Lê Huy phỏng dịch từ nguyên bản tiếng Nga), đăng tải trên Tạp chí Pi tập 2, số 10, tháng 10.2018, trang 20 – 25.

Như thế, một cách rất tự nhiên để tìm chìa khóa giải mã là phân tích số nguyên dương $n > 1$ thành thừa số nguyên tố. Bạn đọc có thể tìm hiểu về độ phức tạp, sự khó khăn của việc phân tích một số nguyên dương thành thừa số nguyên tố, trong bài viết trên Tạp chí Pi, đã được trích dẫn ở trên, của GS. Phạm Huy Điển.

Cứ cho rằng, ta còn có thể tính giá trị của $\varphi(n)$ bằng một cách khác, không thông qua việc phân tích n thành thừa số nguyên tố. R. Rivest, A. Shamir, và L. Adleman, trong bài viết đã được trích dẫn ở trên, đã chứng minh rằng, cách tính đó (nếu có) cũng không đơn giản hơn việc phân tích n thành thừa số nguyên tố, bởi vì khi biết giá trị của $\varphi(n)$, ta sẽ dễ dàng tìm được hai ước nguyên tố p, q của n . Cụ thể, với $n = pq$, trong đó, p, q là hai số nguyên tố, $p > q$, ta có:

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(pq) = (p-1)(q-1) \\ &= n - (p+q) + 1.\end{aligned}$$

Do đó

$$p+q = n - \varphi(n) + 1,$$

$$\begin{aligned}p-q &= \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} \\ &= \sqrt{(n - \varphi(n) + 1)^2 - 4n}.\end{aligned}$$

Hiển nhiên, từ đó dễ dàng tìm được p, q .

Cứ cho rằng, ta còn có thể tìm được f bằng một cách khác, không dựa gì vào việc phân tích n thành thừa số nguyên tố, hay việc tính giá trị của $\varphi(n)$. Khi đó, bằng phép tính đơn giản $e \cdot f - 1$, ta sẽ tính được một bội của $\varphi(n)$. Miller G. L., trong bài báo khoa học

“Riemann’s hypothesis and test for primality”, công bố trong Kỷ yếu của Hội thảo về Lý thuyết tính toán hàng năm lần thứ 7 của ACM, tháng Năm 1975 (Proc. Seventh Annual ACM Symp. on the Theory of Comptng. Albuquerque, New Mex., May 1975), đã chứng minh rằng, sử dụng một bội tùy ý của $\varphi(n)$, ta có thể phân tích được n thành thừa số nguyên tố. Và điều này cho thấy, với n là một số lớn, không thể có một cách xác định f dễ dàng hơn việc phân tích n thành thừa số nguyên tố.

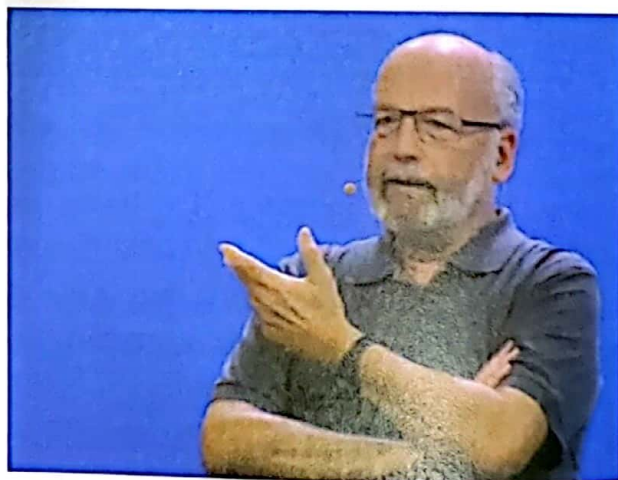
Tóm lại, từ những điều vừa trình bày trên đây, có thể nói rằng, phân tích n thành thừa số nguyên tố là giải pháp duy nhất, giúp tìm ra chìa khóa giải mã trong hệ mật mã RSA. Do đó, độ an toàn của hệ mật mã này được đặt cược hoàn toàn vào độ khó của việc phân tích một số nguyên dương đủ lớn thành thừa số nguyên tố. Câu thách đố ở phần đầu của bài viết này được xem như một ví dụ, mà các tác giả của hệ mật mã RSA đưa ra nhằm minh họa cho “bức tường lửa” “phân tích một số nguyên dương đủ lớn thành thừa số nguyên tố”; và qua đó, chứng minh cho độ an toàn, có thể được coi là tuyệt đối, của hệ mật mã đó.

Dựa trên những suy xét về độ khó của việc phân tích một số nguyên dương đủ lớn thành thừa số nguyên tố, các chủ nhân của lời thách đố nói trên tin tưởng rằng, nhiều trăm năm sau nhân loại mới có thể phân tích được số n , đã cho trong lời thách đố, thành thừa số nguyên tố. Tuy nhiên, chỉ 17 năm sau thời điểm lời thách đố được công bố, vào tháng 4 năm 1994, bốn nhà khoa học Derek Atkins (Học viện Công nghệ Massachusetts, Hoa Kỳ), Michael Graff (cựu sinh viên trường ĐH Tổng hợp bang Iowa, Hoa Kỳ), Arjen K. Lenstra (Viện Công nghệ Lausanne, Thụy Sĩ) và Paul Leyland (Đại học Tổng hợp Oxford, Vương quốc Anh), với sự trợ giúp cật lực của khoảng 600 tình nguyện viên và khoảng 1600 chiếc máy tính điện tử được kết nối bởi mạng Internet, trong khoảng 220 ngày làm việc liên tục, đã thành công trong việc giải mã đồng tin

của lời thách đố. Các số p và q được tìm ra là:

$$p = 34905295108476509491478496199038 \\ 98133417764638493387843990820577, \\ q = 32769132993266709549961988190834 \\ 461413177642967992942539798288533;$$

và câu tiếng Anh đã được mã hóa là: “*The Magic Words are Squeamish Ossifrage*”. Trong cuốn sách “Nhập môn lý thuyết mật mã” (Moscow, 1998), có viết: “Kết quả tuyệt vời đó (phân tích ra thừa số nguyên tố một số có 129 chữ số) đã đạt được nhờ việc sử dụng một thuật toán phân tích một số ra thừa số nguyên tố, có tên gọi là phương pháp sàng toàn phương (quadratic sieve). Việc hoàn thành các tính toán đòi hỏi một nguồn tài nguyên vô cùng lớn.”



Shamir Adi

Thành công tuyệt vời nêu trên, tuy thế, chưa thể nói lên điều gì về độ an toàn của hệ mật mã RSA, bởi nếu p và q không phải là các số nguyên tố có 64 chữ số và 65 chữ số, mà là các số có 300 chữ số chẳng hạn, thì nguồn tài nguyên của mạng Internet đã không thể đủ cho việc phân tích số $n = pq$ thành thừa số nguyên tố. Tuy nhiên, cho đến nay, cũng chưa ai chứng minh được rằng, không tồn tại một ngày đẹp trời, mà vào ngày đó, nhân loại ta, hành tinh ta sẽ sinh ra một người con ưu tú, có khả năng thực hiện nhanh (nói theo con nhà toán là, trong thời gian đa thức) việc phân tích một số có nhiều chữ số tùy ý thành thừa số nguyên tố.

DÒ TÌM MẬT KHẨU

Phan Thanh Hồng – Nguyễn Thị Nhung

Vừa thấy Vinh, Phong đã chạy đến hỏi:

– Cậu đã đọc xong truyện chưa? Hay lắm đúng không?

Vinh buồn bã:

– Hic, tớ đang đọc thì bị chị tớ tịch thu rồi.

– Sao lại thế?

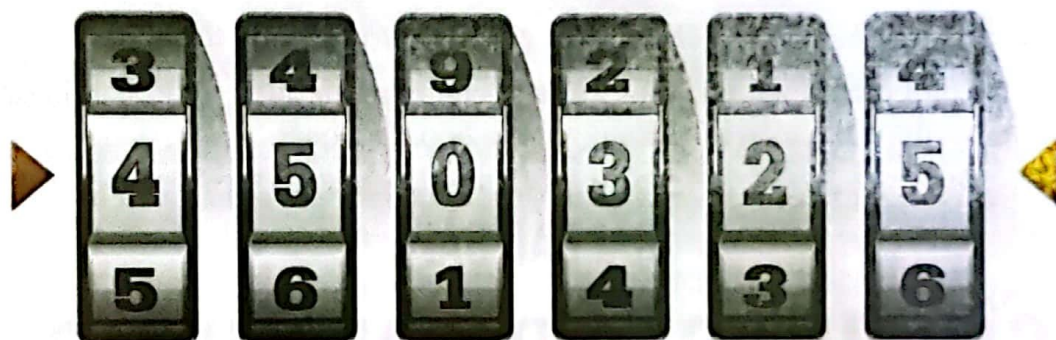
– Tại tớ trêu chị ấy nên chị ấy tức, lấy truyện

cho vào vali của chị ấy và khóa lại. Vali có mật khẩu nên vẫn chưa lấy lại được.

– Thế có cách nào mò được mật khẩu không?

– Mật khẩu gồm những sáu chữ số, làm sao mà mò được!

– Uh, thử lần lượt thì biết đến bao giờ mới ra! Thế không dò chị ấy được à? Ví dụ, hỏi những câu liên quan đến mật khẩu ấy.



– Tớ cũng thỉnh thoảng giả vờ hỏi, nhưng chị ấy cảnh giác lắm. Ngày đầu, hỏi gì cũng không nói; đến ngày hôm sau, chắc nguôi nguôi nên bảo tớ: “Thôi, cho một đặc ân nhé. *Chị cho hỏi một lần duy nhất, thích hỏi gì cũng được, nhưng không được quá 20 câu; với mỗi câu hỏi chị chỉ trả lời Đúng hoặc Sai.* Đây nghĩ đi, với những câu trả lời của chị mà ra được mật khẩu thì trả truyện cho mà đọc. Thế thôi, không được ý kiến ý cò gì thêm; lèo nhèo nữa là cáit luôn.”

– Hic, đặc ân thế thì khác gì không cho; một triệu phương án, mà chỉ cho hỏi tối đa 20 câu, với câu trả lời kiểu Đúng/Sai thì thấm vào đâu. Nhưng thôi, để tớ về nghĩ xem có cách nào không nhé.

Ngày hôm sau đến lớp, vừa thấy Vinh, Phong đã chạy ngay lại, đưa cho Vinh một tờ giấy:

– Tớ đã tìm được một cách hỏi rồi. Cậu về hỏi chị cậu 20 câu được ghi trong tờ giấy này, và ghi lại cho tớ câu trả lời nhé. Tớ sẽ tìm ra được mật khẩu.

Mấy hôm sau, giờ ra chơi, thấy Vinh mặt hớn hớn, cầm cuốn truyện đưa cho Phong:

– Nó đây rồi! Hi hi

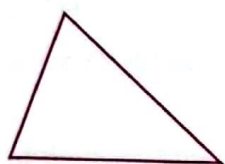
Thế nghĩa là các bạn ấy đã tìm được mật khẩu. Không biết Vinh đã bày cho Phong những câu hỏi gì, và cậu ta đã làm thế nào để tìm ra mật khẩu, nhờ những câu trả lời, nhỉ? Tờ mò quá! Các bạn biết thì nói ngay cho Pi với nhé!

CÓ BAO NHIÊU TAM GIÁC?

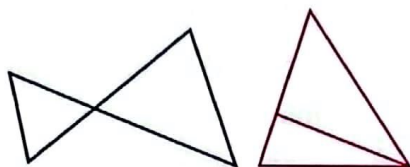
Hà Thanh

Bài toán. Cho n là một số nguyên dương. Hỏi, n đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng sẽ tạo ra tối đa bao nhiêu tam giác, đôi một không có điểm chung trong?

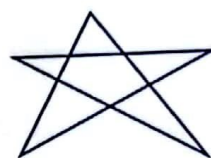
Với $n = 3, 4, 5, 6$, bằng cách xét tất cả các thể hình có thể, người ta đã tìm ra số tối đa các tam giác như vậy, trong mỗi trường hợp, tương ứng là 1, 2, 5, 7 (xem các hình dưới đây).



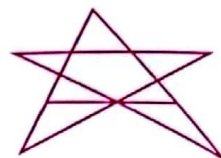
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$

Bạn hãy thử giải bài toán, trong các trường hợp $n = 7, 8$, và gửi lời giải về cho Pi nhé.

Cho tới thời điểm này, bài toán vẫn chưa có lời giải trong trường hợp tổng quát.

Hơn thế, cho tới thời điểm hiện tại, cũng chưa ai chứng minh được rằng, bạn không phải là người đầu tiên giải được bài toán trên, trong trường hợp tổng quát.

GIẢI ĐÁP BÀI

CẦU THANG CÓ BAO NHIÊU BẬC

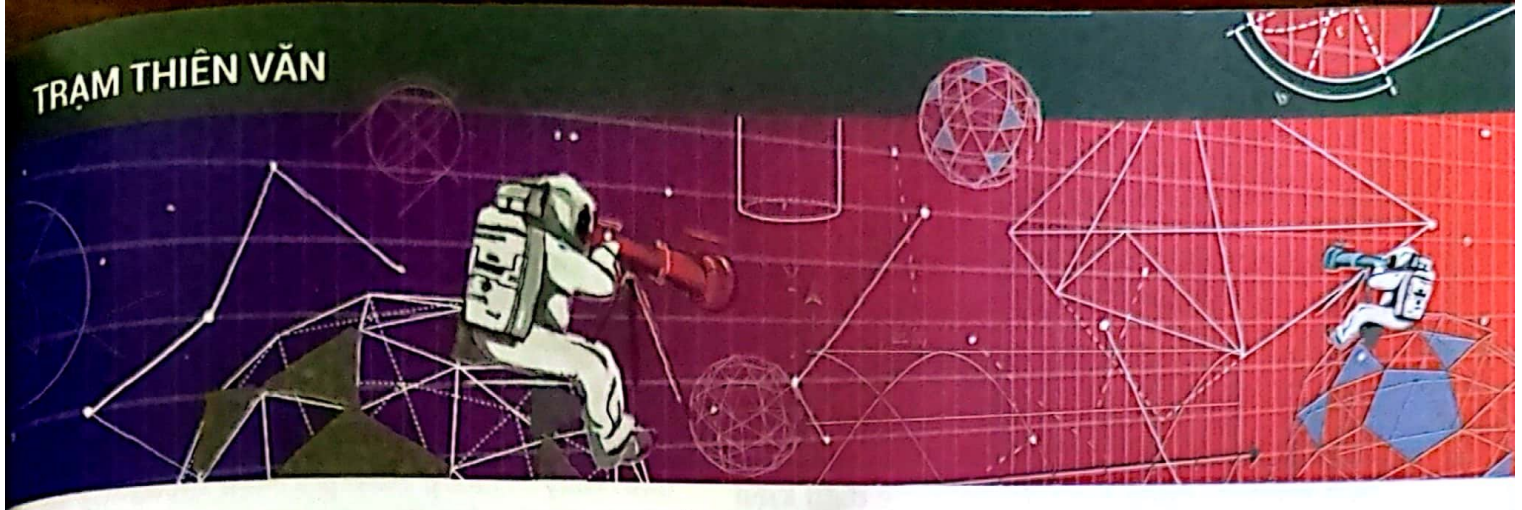
(Xem Tạp chí Pi tập 2, số 9 tháng 9.2018, trang 45)

Bằng cách đếm số bậc cầu thang trong bức ảnh Nhài chụp, Điệp thấy rằng: khi người thứ nhất (bước mỗi lần ba bậc) còn cách đích 1 bậc, thì người thứ hai (bước mỗi lần bốn bậc) còn cách đích 7 bậc, và người thứ ba (bước mỗi lần năm bậc) còn cách đích 14 bậc.

Từ đó suy ra, để bước hết các bậc của cầu thang, nếu bước mỗi lần ba bậc thì ở lần bước cuối cùng cần bước 1 bậc; nếu bước mỗi lần bốn bậc thì ở lần bước cuối cùng cần bước 3 bậc; và nếu bước mỗi lần năm bậc thì ở lần bước cuối cùng cần bước 4 bậc. Do đó, số bậc của cầu thang là một số chia 3 dư 1, chia 4 dư 3, và chia 5 dư 4. Dễ dàng tính được số nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện vừa nêu là 19. Vậy cầu thang trong trò chơi phải có ít nhất 19 bậc.

Làm 19 bậc thang cũng không nhiều lắm. Vậy là nhóm bạn Điệp – Nhài đã có thể giúp các em nhỏ trong xóm có những trò chơi bổ ích vào dịp hè này rồi.





“Trăng quầng thì hạn, trăng tán thì mưa”

Nguyễn Anh Tuấn¹

Trước khi có ngành khí tượng thuỷ văn thì có lẽ mỗi người dân đều là những nhà khí tượng tuyệt vời với nhiều kinh nghiệm được lưu truyền trong dân gian. Các hiện tượng thay đổi của bầu trời, của sự vật thiên nhiên đều có thể ít nhiều mang lại thông tin để dự báo thời tiết, giúp người nông dân chủ động cho việc đồng áng, mùa vụ của mình. Quan sát thiên văn để dự báo thời tiết trong dân gian được ông bà ta đúc kết trong nhiều câu tục ngữ như “Nhiều sao thì nắng, vắng sao thì mưa”, “Ráng mỡ gà thì gió, ráng mỡ chó thì mưa”, “Trăng quầng thì hạn, trăng tán thì mưa”. ... Tuy nhiên, theo thời gian, con người chúng ta càng ít phụ thuộc vào các kinh nghiệm trực quan từ thiên nhiên đó hơn, nên một số câu tục ngữ đúc kết kinh nghiệm dự báo thời tiết do ít được sử dụng đã trở nên khó hiểu và không còn được lý giải chính xác với bản chất mô tả hiện tượng của nó.

Tiêu biểu là câu tục ngữ “Trăng quầng thì hạn, trăng tán thì mưa”, mà hiện nay có rất nhiều định nghĩa chưa thống nhất, thậm chí lẫn lộn giữa hai hiện tượng Quầng và Tán, nhất là khi báo chí đưa tin về hiện tượng Mặt Trời ở Quảng Nam xuất hiện một vòng sáng bao quanh vào ngày 26-04-2019 vừa qua.

Từ điển tiếng Việt (Hoàng Phê) định nghĩa Quầng là: “Quầng của Mặt Trời hay Mặt Trăng, thường xuất hiện khi có đám mây mỏng bay qua, những hạt nước nhỏ của đám mây gây ra nhiễu xạ ánh sáng”. Hiện tượng này tương đương với khái niệm “Corona” trong tiếng Anh. Lúc đó, chúng ta sẽ nhìn thấy những vòng sáng nhiều màu như cầu vồng và không tách bạch nhau bao quanh Mặt Trăng. Vòng sáng ngoài cùng có thể mở rộng đường kính đến 15 độ và thường mở rộng hay thu hẹp mỗi khi các đám mây khác nhau đi ngang qua dưới Mặt Trăng (xem ảnh 1).

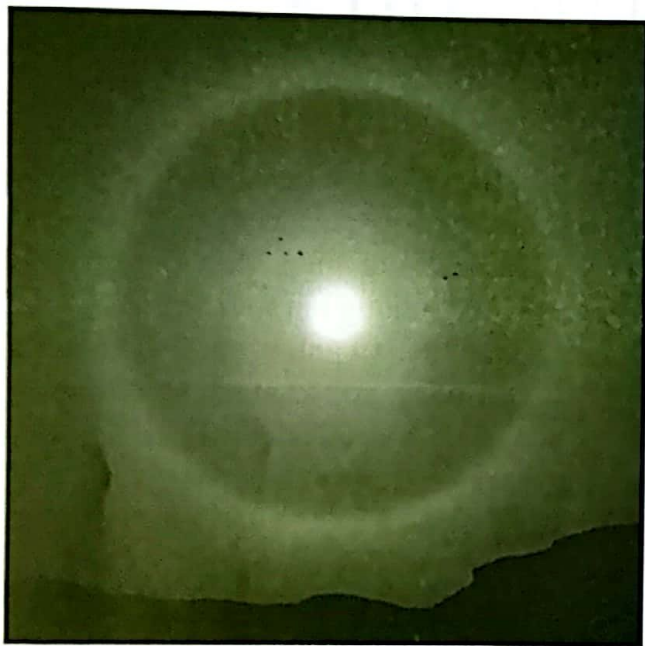


Ảnh 1

¹ CLB Thiên văn học nghiệp dư TP.HCM (HAAC)

Quầng xảy ra khi ánh sáng bị nhiễu xạ bởi các hạt nước hoặc băng nhỏ. Mỗi điểm trên bề mặt hạt được chiếu sáng lại trở thành một nguồn sáng tỏa cầu ra ngoài. Những sóng này giao thoa với nhau để tạo ra các vùng sáng tăng cường và triệt tiêu.

Hiện tượng trăng quầng thường gặp nhất khi Mặt Trăng bị che phủ bởi một lớp mây cao tích mỏng², được hình thành trong điều kiện khí quyển ổn định. Do đó, quầng trăng có thể xảy ra trong một chu kỳ thời tiết ít mây và không nhiều biến động, nên báo hiệu một thời kỳ ít mưa kéo dài.



Ảnh 2



Ảnh 3

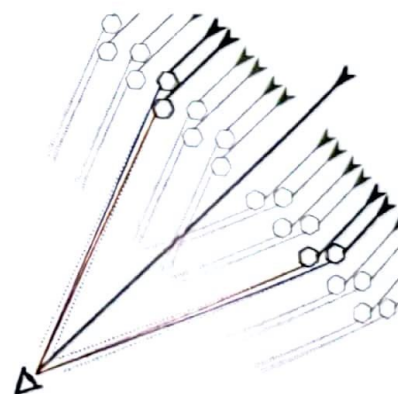
² Mây cao tích hình thành khi có một luồng khí nóng ẩm ổn định bốc lên và đóng thành sương ở độ cao khoảng 2000–5000m.

³ Mây ti tầng thường mỏng, trong suốt, bao phủ một vùng rộng trên bầu trời, ở độ cao trên 6000m.

Khác với quầng, tán là hiện tượng gây ấn tượng hơn với một hào quang sáng lớn bao quanh Mặt Trăng hoặc Mặt Trời, thường có kích thước 22 độ với màu cầu vồng nhạt hoặc không màu. Từ điển tiếng Việt (Hoàng Phê) định nghĩa Tán là: “Vòng sáng mờ nhạt nhiều màu sắc bao quanh Mặt Trời hay Mặt Trăng do sự khúc xạ và phản chiếu ánh sáng qua màn mây”. Tiếng Anh gọi hiện tượng này là “Halo” (xem ảnh 2 – tán Mặt Trăng và ảnh 3 – tán Mặt Trời).

Tán hình thành khi ánh sáng từ Mặt Trời hoặc Mặt Trăng bị khúc xạ qua các tinh thể băng trong mây. Vòng sáng này chỉ xảy ra khi mà các tinh thể băng có sự định hướng và vị trí góc phù hợp để hướng các tia sáng bị khúc xạ về mắt người quan sát. Các tinh thể băng hình lăng trụ có trục gần như vuông góc với các tia sáng Mặt Trời sẽ khúc xạ các tia này qua góc 22 độ hay lớn hơn. Tập hợp các ánh sáng được phản chiếu này sẽ tạo ra vòng sáng bao xung quanh Mặt Trăng hay Mặt Trời (xem ảnh 4).

Hiện tượng tán thường xảy ra khi ánh sáng khúc xạ qua các tinh thể băng của lớp mây ti tầng³. Thường khi mây ti tầng xuất hiện sẽ là dấu hiệu



Ảnh 4

cho thấy rằng một khối khí ẩm có khí áp thấp đang chuẩn bị đến gần, đi vào khu vực lạnh và khô hơn. Khi đó, dòng khí nóng sẽ trượt từ từ lên phía trên và tạo ra các đám mây. Quá trình ngưng tụ hạt nước trong đám mây sẽ diễn ra liên tục dọc theo đường biên của khối khí và tạo ra mây ti tầng. Các đám mây này lớn dần lên và sớm gây ra giáng thủy. Vì thế, tán càng rực rỡ thì khả năng có mưa càng cao.



Hướng dẫn giải các **SUDOKU** phiên bản hình ảnh

(Xem Tạp chí Pi tập 2, số 10, tháng 10.2018)

Lê Huy – Vũ Thị Hà

Qua Tạp chí Pi tập 2, số 10, tháng 10.2018, Bì đã cùng các bé tìm hiểu và trải nghiệm việc giải các Sudoku hình ảnh. Để củng cố và ôn luyện những điều đã thu được ở buổi tìm hiểu và trải nghiệm ấy, chúng mình đã ôm về nhà sáu Sudoku để tự giải. Không biết các bé đã giải hết chưa ấy nhỉ? Bì đã giải xong hết rồi đấy. Trong bài này, Bì sẽ trao đổi với các bé về những suy nghĩ của mình, khi giải sáu Sudoku ấy nha. Để chúng mình học tập lẫn nhau í mà.

Trước khi trao đổi, chúng mình cùng nhắc lại những điều chính yếu đã học được ở buổi tìm hiểu và trải nghiệm hôm trước nha.

1. Với mỗi ô còn trống, phải cân nhắc các khả năng điền, rồi lựa chọn hình thích hợp để điền. Ô trống nằm ở hàng hay cột nào đã có nhiều hình được điền sẽ có số khả năng điền cần cân nhắc ít hơn cả.

2. Sẽ xác định được hình nằm ở một ô bất kỳ, nếu biết hình nằm trong hàng và trong cột chứa ô đó.

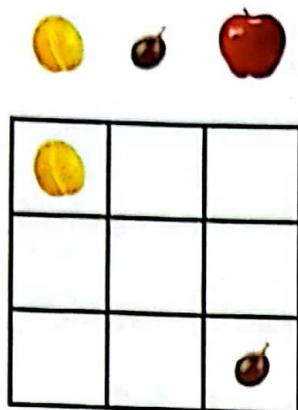
Theo hai điều trên đây, khi điền hình, chúng mình cần:

– Trước hết, quan sát bảng, để tìm ra những hàng, những cột đã có nhiều hình được điền nhất, cũng như để tìm ra những ô, mà ở hàng và cột chứa ô đó đã có nhiều hình được điền nhất;

– Sau đó, căn cứ vào những hình đã có ở các hàng, các cột mà chúng mình đã phát hiện ra ở bước trên, để tìm ra hình thích hợp điền vào ô còn trống ở các hàng, các cột ấy.

Bì đã áp dụng quy trình trên để giải các Sudoku dưới đây đây.

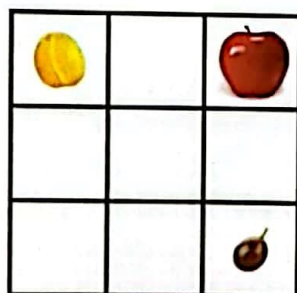
Bài 1. Vẽ thêm quả đào, quả nho hoặc quả táo vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 1, sao cho mỗi loại quả chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.



Hình 1

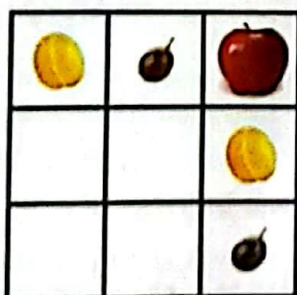
Mình cùng suy luận:

– Quan sát bảng ở Hình 1, các bé sẽ thấy ô nằm ở góc trên cùng bên phải là ô mà chúng mình đã biết loại quả nằm ở hàng, cũng như ở cột chứa ô đó. Vì ở mỗi hàng, mỗi cột chỉ được phép có một loại quả nên loại quả ở ô ấy không thể là đào, cũng chẳng thể là nho. Vậy nên, quả ở ô đó phải là táo rồi.



Hình 1.1

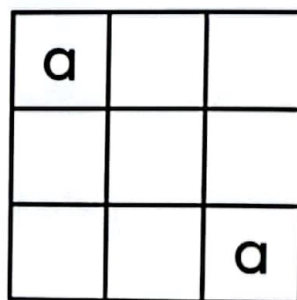
– Bảng ở Hình 1.1 đã có hàng trên cùng, và cột ngoài cùng bên phải, là hàng và cột, mà ở đó đã có hai loại quả được điền. Vì thế, các bé sẽ tìm ra ngay loại quả cần vẽ vào hai ô trống ở hàng và cột ấy, là quả nho (ở ô trống của hàng trên cùng) và quả đào (ở ô trống của cột ngoài cùng bên phải).



Hình 1.2

– Quan sát bảng ở Hình 1.2, các bé sẽ thấy ô nằm ở chính giữa bảng là ô mà chúng mình đã biết loại quả nằm ở hàng, cũng như ở cột chứa ô đó. Vì thế, tương tự trên, các bé sẽ xác định được loại quả cần vẽ ở ô đó. Vẽ được quả vào ô đó rồi, việc vẽ tiếp các loại quả thích hợp vào các ô còn trống chẳng còn gì là khó nữa. Các bé tự làm tiếp nha.

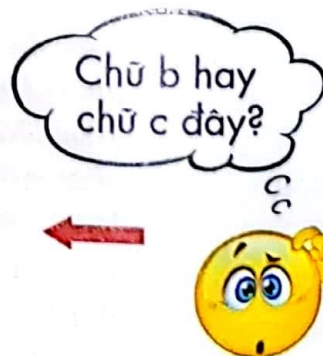
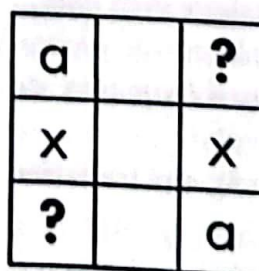
Bài 2. Viết thêm chữ *a*, chữ *b* hoặc chữ *c* vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 2, sao cho mỗi chữ cái chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.



Hình 2

Mình cùng suy luận:

– Tương tự bảng ở Hình 1, các bé sẽ thấy ô nằm ở góc trên cùng bên phải, cũng như ô nằm ở góc dưới cùng bên trái, của bảng ở Hình 2, là các ô mà chúng mình đã biết các chữ cái nằm ở hàng, cũng như ở cột chứa các ô đó. Tuy nhiên, chắc các bé cũng đã nhận ra ngay, sự thể không còn đơn giản như ở Bài 1, bởi vì các chữ cái ở hàng và ở cột chứa mỗi ô, trong hai ô đó, chẳng khác gì nhau, cùng là chữ *a* cả. Thế nên, chúng mình không xác định ngay được chữ cái nằm ở mỗi ô ấy là chữ nào, chỉ biết rằng không phải là *a* (vì ở mỗi hàng, cũng như mỗi cột chỉ được phép có một chữ *a*)!



Hình 2.1

– Không có căn cứ để biết chữ ở mỗi ô có dấu “?” là **b** hay **c**, nhưng nếu chịu khó nghĩ một chút thôi, các bé sẽ thấy, chữ ở hai ô đó không thể giống nhau. Vì sao á? Hi hi, vì rằng, nếu chữ ở hai ô đó giống nhau thì chữ ở hai ô có dấu “×” cũng phải giống nhau (xem Hình 2.1); mà điều này là không được phép, vì khi đó ở hàng giữa sẽ có hai chữ giống nhau! Vậy nên, chỉ có thể có hai phương án điền như sau:

Phương án 1

a		b
c		a

Hình 2.2

Phương án 2

a		c
b		a

Hình 2.3

– Bảng ở Hình 2.2, cũng như bảng ở Hình 2.3, đã có những hàng, những cột, mà ở mỗi hàng, hay mỗi cột ấy, đã có hai chữ cái được điền. Vì thế, việc thử điền tiếp các chữ cái vào các ô trống trong mỗi bảng đó không còn gì là khó khăn với chúng mình nữa, phải không nào? Các bé hãy tự mình làm tiếp, để xem trong hai phương án điền nêu trên, phương án nào sẽ cho chúng mình một bảng chữ thỏa mãn các yêu cầu của bài nha.

Ngoài cách suy luận trên, chúng mình còn có thể suy luận theo một cách khác để giải được Sudoku ở bài này đây. Cách ấy là thế này:

– Vì ở mỗi hàng phải có đầy đủ cả ba chữ cái **a, b, c**, nên ở hai ô trống của hàng trên cùng phải là hai chữ **b, c**; ở hai ô trống của hàng dưới cùng cũng như vậy. Tuy nhiên, ở ô nào là chữ **b**, ở ô nào là chữ **c**, thì chúng mình lại chẳng có cơ sở nào để suy luận cả. Hic hic Ấy thế nhưng, thay cho “hic hic ...” mà nghĩ một tí thôi, thì các bé sẽ thấy rằng, vì ở cột giữa không thể có hai chữ giống nhau, nên chúng mình sẽ chỉ có thể có hai phương án sau đây, để điền các chữ **b, c** vào bốn ô trống ấy:

Phương án 1

a	b	c
b	c	a

Hình 2.4

Phương án 2

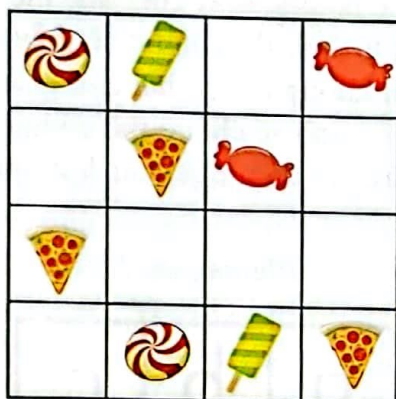
a	c	b
c	b	a

Hình 2.5

– Bảng ở Hình 2.4, cũng như bảng ở Hình 2.5, đã có những hàng, những cột được điền đầy đủ; lại cũng có những hàng, những cột, mà ở mỗi hàng, hay mỗi cột ấy, đã có hai chữ cái được điền. Vì thế, chẳng còn khó khăn nào có

thể ngăn cản các bé tự mình làm tiếp, để xem trong hai phương án điền nêu trên, phương án nào sẽ cho chúng mình một bảng chữ thỏa mãn các yêu cầu của bài nữa rồi.

Bài 3. Vẽ thêm que kem, miếng bánh, kẹo sữa hoặc kẹo ngọt vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 3, sao cho mỗi hình chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

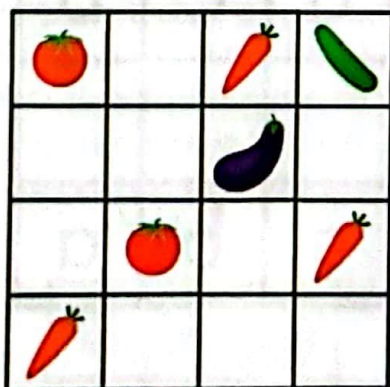


Hình 3

Mình cùng suy luận:

Bài này dễ ợt, các bé nhỉ? Vì cứ đúng theo quy trình đã nêu ở phần đầu bài viết này mà làm thì ra ngay, chẳng cần suy nghĩ gì.

Bài 4. Vẽ thêm quả cà chua, quả dưa chuột, củ cà rốt hoặc quả cà tím vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 4, sao cho mỗi loại củ, quả chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

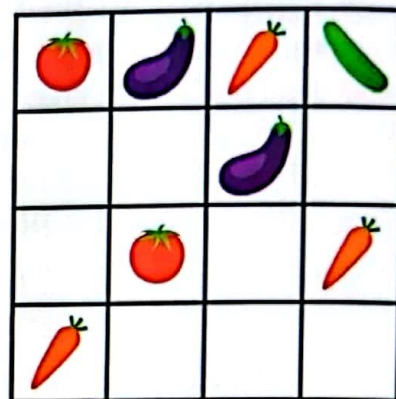


Hình 4

Mình cùng suy luận:

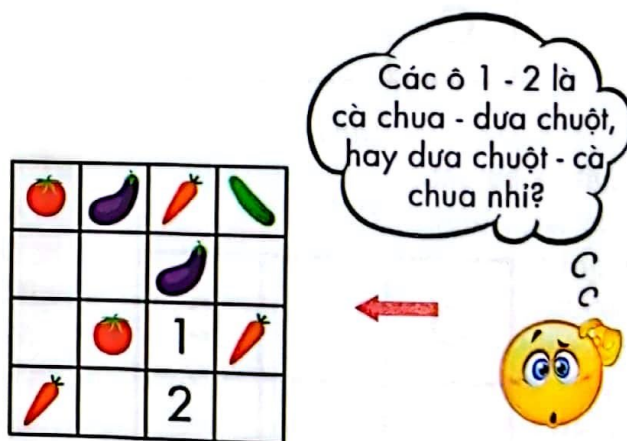
– Quan sát bảng ở Hình 4, các bé sẽ thấy ngay loại quả cần vẽ vào ô trống ở hàng trên cùng

là quả cà tím, vì trong hàng đó đã có ba loại củ quả là cà chua, cà rốt và dưa chuột.

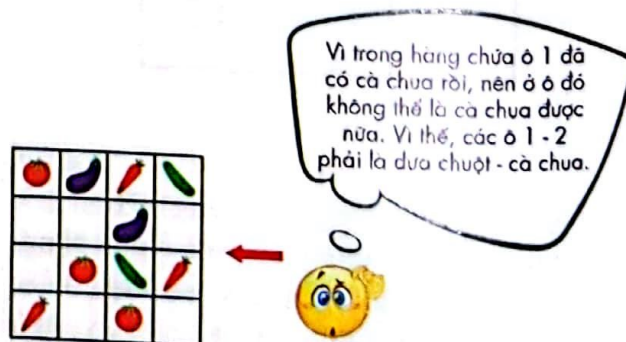


Hình 4.1

– Tiếp theo, tương tự cách suy luận ở hai bài 1 và 2 trên đây, chúng mình sẽ tìm ra những hình cần vẽ vào hai ô trống ở cột thứ ba, tính từ trái qua phải, như thể hiện ở các Hình 4.2 và 4.3 dưới đây.

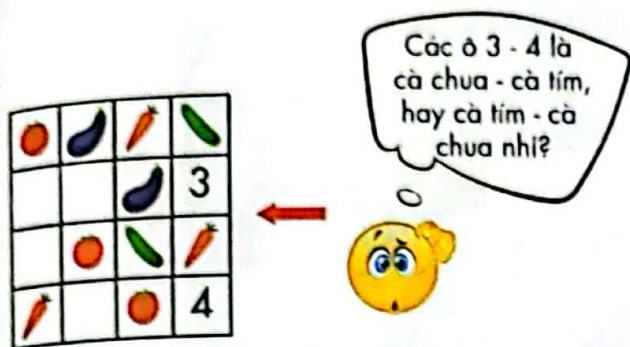


Hình 4.2

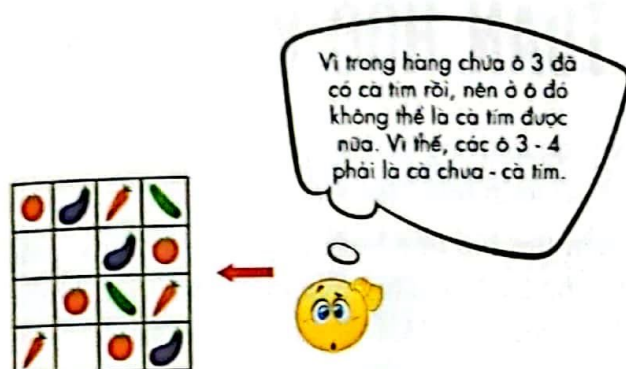


Hình 4.3

– Bằng cách suy luận tương tự trên, chúng mình sẽ tìm ra được những hình cần vẽ vào các ô trống ở cột cuối cùng bên phải của bảng ở Hình 4.3.



Hình 4.4



Hình 4.5

– Việc vẽ tiếp các hình thích hợp vào các ô trống trong bảng ở Hình 4.5 không còn gì là khó nữa. Các bé tự mình làm tiếp nha.

Bài 5. Viết thêm chữ *a*, chữ *b*, chữ *c* hoặc chữ *d* vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 5, sao cho mỗi chữ cái chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

<i>b</i>			<i>d</i>
		<i>c</i>	
	<i>b</i>		
<i>a</i>			<i>c</i>

Hình 5

Hướng dẫn giải:

– Bằng cách suy luận hoàn toàn tương tự như ở bài 4, các bé sẽ viết được các chữ cái thích hợp vào hai ô trống ở cột ngoài cùng bên trái, vào hai ô trống ở cột ngoài cùng bên phải, vào hai ô trống ở hàng dưới cùng, vào hai ô trống ở hàng trên cùng.

– Sau bước trên, các bé viết nốt các chữ cái thích hợp vào hai ô trống còn lại là mình sẽ có bảng chữ như bài yêu cầu.

Bài 6. Vẽ thêm hình tam giác, hình vuông, hình ngũ giác, hình ngôi sao hoặc hình tròn vào các ô vuông còn trống trong bảng ở Hình 6, sao cho mỗi loại hình chỉ xuất hiện đúng một lần trong mỗi hàng, cũng như trong mỗi cột.

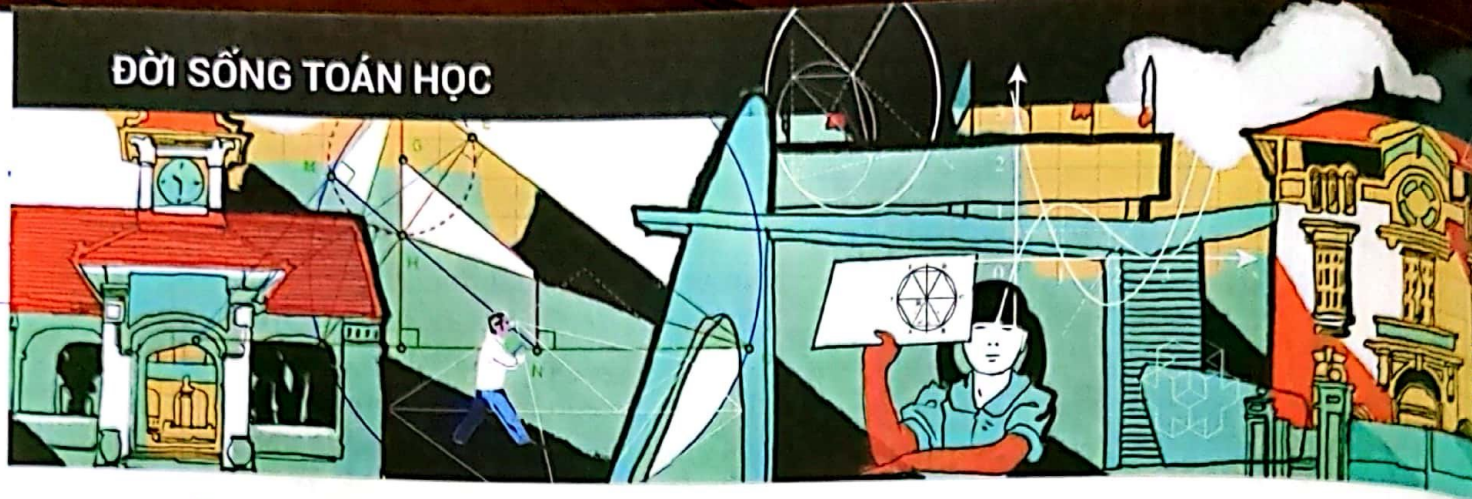
●	■		★	⬠
★		■		●
⬠				★
	●		⬠	
▲		⬠		■

Hình 6

Hướng dẫn giải:

– Quan sát bảng ở Hình 6, để tìm ra những hàng, những cột có nhiều hình được điền nhất, chúng mình thấy hàng trên cùng, cột ngoài cùng bên trái, và cột ngoài cùng bên phải là những hàng, cột mà ở đó đã có nhiều hình được điền nhất. Vì thế, chúng mình sẽ bắt đầu từ những ô trống ở các hàng, cột đó nha. Chẳng khó khăn gì để xác định được những hình cần vẽ vào các ô trống ở những hàng, cột ấy, phải không nào? Vì ở mỗi hàng, cột ấy đều đã có bốn hình được điền rồi.

– Sau khi thực hiện việc vẽ hình vào bảng ở bước trên, các bé sẽ nhận được một bảng mà ở hàng thứ hai, tính từ dưới lên, của bảng ấy, đã có bốn hình được điền. Vẽ xong hình cần thiết vào ô trống của hàng ấy, các bé sẽ có một bảng, mà ở cột chính giữa của bảng ấy đã có bốn hình được điền. Sau khi vẽ hình cần thiết vào ô trống của cột đó, các bé sẽ có một bảng mà trong đó chỉ còn sáu ô trống, gồm: hai ô ở hàng dưới cùng, hai ô ở hàng thứ ba từ dưới lên, và hai ô ở hàng thứ hai từ trên xuống. Bằng suy luận hoàn toàn tương tự như ở bài 4, bài 5, các bé sẽ xác định được các hình cần vẽ vào các ô trống còn lại đó.



GẶP MẶT ĐẦU XUÂN HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Sáng Chủ nhật ngày 24/2/2019, Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức buổi gặp mặt đầu Xuân Kỷ Hợi tại Khu du lịch sinh thái vườn quả Từ Liêm. Đến dự buổi gặp mặt có hơn 50 hội viên từ Hà Nội và khu vực lân cận, trong đó có GS. Nguyễn Đình Trí và GS. Đỗ Long Vân, những người từng giữ cương vị chủ tịch và có nhiều đóng góp cho sự phát triển của Hội; GS. Trần Văn Nhung, nguyên Thứ trưởng Bộ GD-ĐT, Tổng thư ký Hội đồng chức danh Giáo sư nhà nước.

Mở đầu chương trình, GS. Ngô Việt Trung, chủ tịch Hội đã báo cáo tình hình hoạt động của Hội Toán học VN trong năm 2018 và những hoạt động trọng điểm của Hội trong thời gian tới như Hội nghị Toán học Việt-Mỹ tháng 6/2019, Đại hội Toán học Châu Á tháng 7/2020, và công tác xây dựng trụ sở Hội. GS. Ngô Việt Trung và các hội viên tham dự buổi gặp mặt cũng cùng nhau tưởng nhớ đến các hội viên đã qua đời trong thời gian qua, đặc biệt nhắc đến cố GS. Phan Đình Diệu (1936–2018), người đã có những đóng

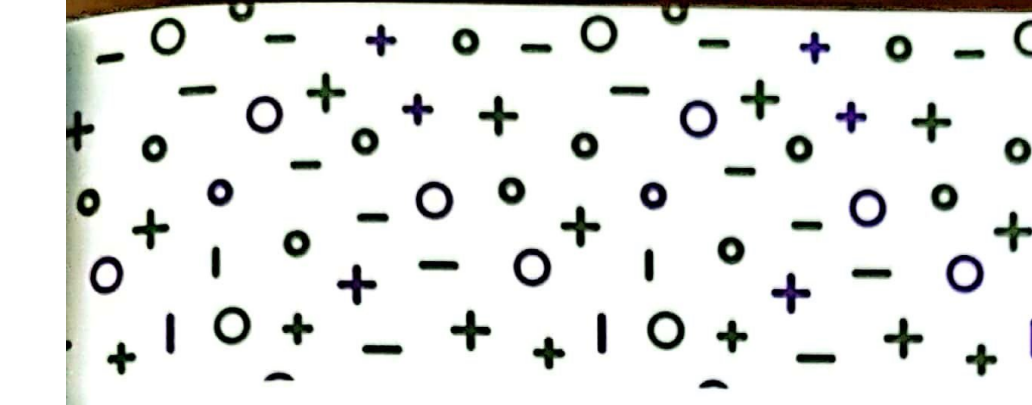
góp quan trọng cho sự phát triển của lĩnh vực Cơ sở toán học của tin học ở Việt Nam.

Phần thứ hai của buổi gặp mặt là lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2018. GS. Lê Tuấn Hoa, chủ tịch Hội đồng xét giải đã công bố danh sách một thầy giáo và ba học sinh được giải (xem bài trang 16). Nhân dịp này, Ban chấp hành Hội cũng đã cảm ơn và tặng quà lưu niệm cho GS. Hà Huy Khoái, nguyên Phó Chủ tịch Hội THVN, người đã giữ cương vị chủ tịch hội đồng xét giải thưởng Lê Văn Thiêm từ những ngày đầu tiên đến nay là hơn hai mươi năm. Buổi gặp mặt đầu Xuân Kỷ Hợi của Hội Toán học Việt Nam đã kết thúc bằng tiệc liên hoan trong không khí vui vẻ và đầm ấm của mùa xuân.

Việc xây dựng trụ sở của Hội Toán học Việt Nam đã bắt đầu vào hôm 15/3/2019. Dự buổi khởi công có Chủ tịch Ngô Việt Trung, Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Vũ Hoàng Linh cùng một số hội viên khác. Dự kiến công việc xây dựng sẽ hoàn tất trong năm nay.

Theo Hội Toán học Việt Nam. Ảnh: Lê Hương.





BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Nguyễn Khắc Minh (Phó Tổng biên tập thường trực)
Ngô Bảo Châu (Phó Tổng Biên tập)
Trần Nam Dũng (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Thị Lê Hương (Phó Tổng Biên tập kiêm Thư ký Tòa soạn)

Phạm Huy Điền, Nguyễn Thành Nam,
Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Thái Sơn, Chu Cẩm Thơ,
Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn, Nguyễn Ái Việt, Lê Anh Vinh.

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hạ Vũ Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Ngọc Diệp, Nguyễn Minh Hà,
Lưu Thị Thanh Hà, Đào Thị Thu Hà, Trần Minh Hiền, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Hà Duy Hưng, Đậu Hoàng Hưng, Vũ Thế Khôi,
Nguyễn Cẩm Lệ, Nguyễn Duy Liên, Phạm Vũ Lộc, Trần Quốc Luật,
Kiều Đình Minh, Nguyễn Thị Nhung, Đặng Văn Sơn, Đỗ Hoàng Sơn,
Lưu Bá Thắng, Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thu.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: bht@pi.edu.vn. Email giao dịch: info@pi.edu.vn
Điện thoại: (024) 3215.1407 Fax: (024) 3623.1543
Website: www.pi.edu.vn

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In và Thương mại Hưng Lợi
Tập chí ra hàng tháng
Giá: 30.000 đồng

π JOURNAL



LienVietPostBank
NGÂN HÀNG BƯU ĐIỆN LIÊN VIỆT



ViViet
NGÂN HÀNG SỐ

VI VIET - ĐAM PHẢI CỦA NGÂN HÀNG BƯU ĐIỆN LIÊN VIỆT

THANH TOÁN KHÔNG DÙNG TIỀN MẶT (ONLINE 24/7)

> Hơn 200 dịch vụ

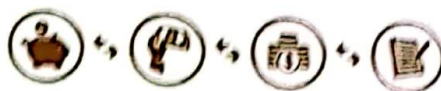


> Kết nối hơn 35

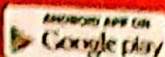
Ngân hàng nội địa

DỊCH VỤ NGÂN HÀNG SỐ (ONLINE 24/7)

- ☒ Gửi tiết kiệm
- ☒ Vay cầm cố sổ tiết kiệm
- ☒ Tất toán khoản vay
- ☒ Truy vấn tài khoản thanh toán



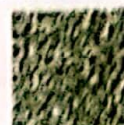
TẢI APP VI VIET QUA SNG DÙNG



Tổng đài CSKH (miễn phí)
1800 6665

www.facebook.com/viviet.vn

www.viviet.vn



facebook.com/
pijournal



Giá: 30.000 đồng
www.pi.edu.vn