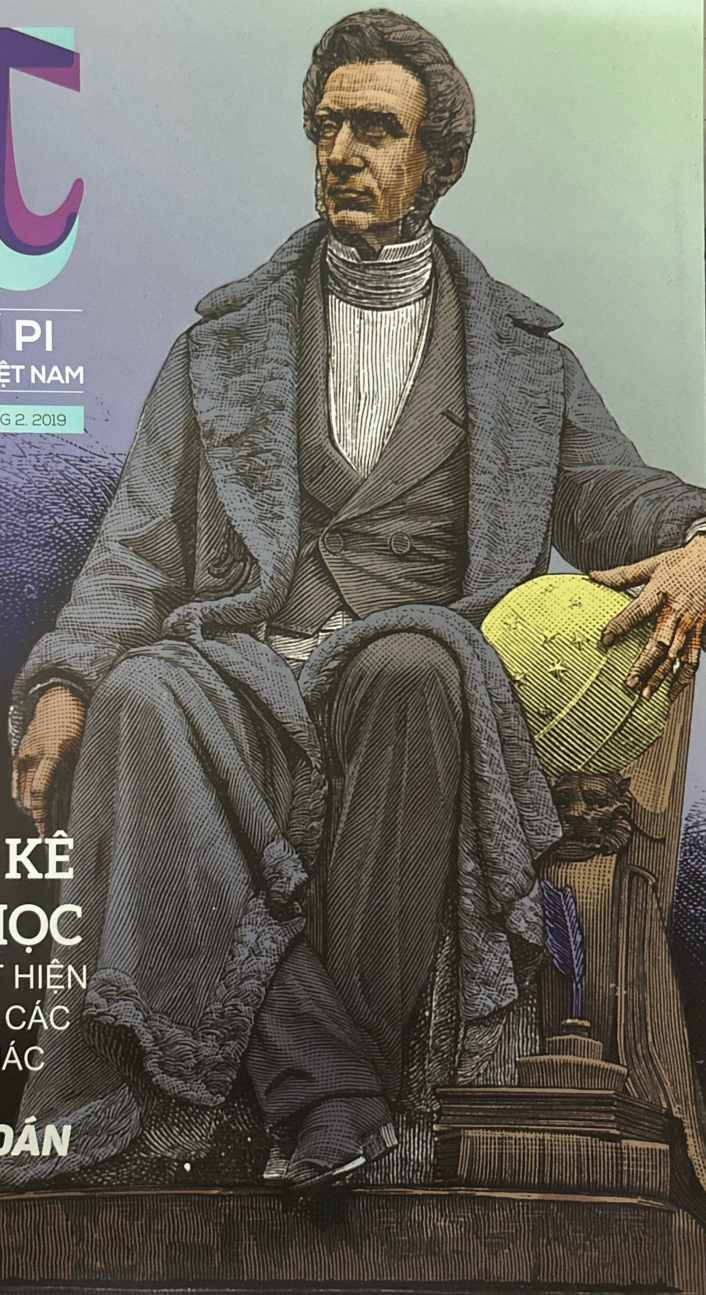
TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
TẬP 3 - SỐ 2 THÁNG 2. 2019



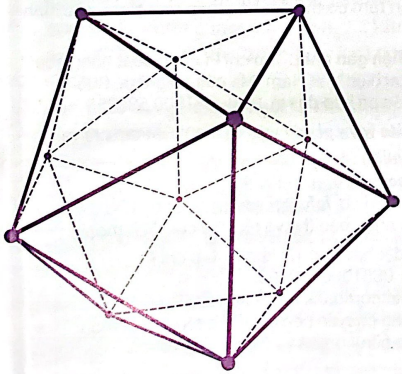
THỐNG KÊ TOÁN HỌC

TRONG PHÁT HIỆN GIAN LẬN VÀ CÁC LĨNH VỰC KHÁC

CÁC BÀI TOÁN TÍNH TUỔI

ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY



TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Alice ở Xứ sở Diệu kỳ! Các bạn học sinh nhỏ tuổi tìm đọc ngay nhé. Alice đang cố sức giúp anh thợ làm mũ thoát khỏi hình phạt của Hoàng hậu. Căn bậc hai của hai! Khó quá! Mà các bạn có biết tờ giấy A4 là gì không? **Trang 53.**

Tiếp tục dành cho các bạn tiểu học là cách dùng sơ đồ đoạn thẳng để giải **các bài toán tính tuổi**. Nhưng, vì sao lại dùng sơ đồ đoạn thẳng để giải? Bài viết sẽ giúp các bé tìm ra lời giải đáp, đồng thời, giúp các bé rèn luyện kĩ năng vẽ các sơ đồ đoạn thẳng đấy. **Trang 54.**

Trong **Giải toán cùng bạn** kỳ này, ta **Cùng tìm lời giải cho bài toán P228**. Các bạn học sinh đừng đọc lướt qua bài viết này. Đọc chậm và suy nghĩ kỹ từng bước những chia sẻ của tác giả, sẽ rất có lợi cho các bạn để giải quyết những bài toán khác, nhất là trong việc dùng biến đổi Abel, một kỹ thuật đơn giản nhưng rất hiệu quả trong một số trường hợp. **Trang 17.**

Ý nghĩa của Biến đổi Abel còn được trình bày trong một bài viết khác của GS. Vũ Hà Văn về **Tổng Abel và Tích phân từng phần. Trang 42.**

Trong **Quán Toán** số này có bài viết "ma mị" của GS. Phan Dương Hiệu gửi đến Toà soạn từ Pháp. Vẫn là câu chuyện về **"P và NP"** nhưng còn có thêm **"mã hóa công khai"**. Câu chuyện thú vị về **Bốn thế giới ảo và một thế giới thực** sẽ gây tò mò cho các bạn trẻ nhưng sẽ khiến cho người lớn phải nhăn trán đấy! **Trang 50.**

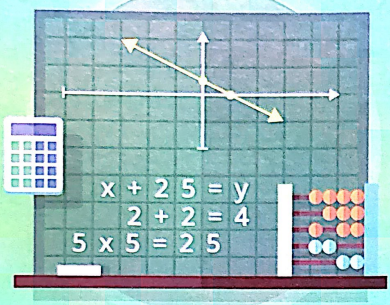
Mục **Toán học và Đời sống** sẽ giới thiệu với bạn đọc về những ứng dụng của Thống kê toán trong đời sống xã hội thông qua câu chuyện về **Adolphe Quetelet**, nhà khoa học người Bỉ đã có rất nhiều đóng góp cho việc sử dụng thống kê toán học vào những vấn đề quan trọng của cuộc sống như: phát hiện gian lận số liệu, đánh giá sức khỏe và khám bệnh, thống kê xã hội học... Một bài viết gợi mở, dành cho tất cả mọi người! **Trang 3.**

Góc STEM tiếp tục giới thiệu cho các độc giả những điều chưa biết về **nước**. Cũng dành cho tất cả mọi người! **Trang 43.**

Sau đó, **Quỹ tích bóng nắng** tiếp tục dành cho các bạn thích Hình học và Lượng giác! **Trang 47.**

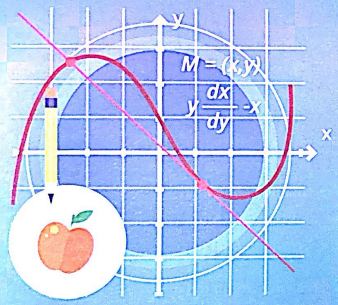
Lịch sử Toán học số này tiếp tục giới thiệu về hai chủ nhân còn lại của Huy chương Fields 2018. Peter Scholze,thần đồng toán học người Đức, từng tham dự kỳ thi IMO tại Việt Nam năm 2007; còn Akshay Venkatesh là một thần đồng toán học gốc Ấn Độ, lớn lên tại Úc và thành danh tại Hoa Kỳ. **Trang 10.**

Trong mục **Đời sống Toán học** của số này, độc giả sẽ tìm thấy thông tin về **Giải thưởng Lê Văn Thiêm** và vị chủ tịch đầu tiên của Hội đồng Giải thưởng, cũng là học trò xuất sắc của GS. Lê Văn Thiêm và hiện đang là Tổng biên tập Tạp chí Pi của chúng ta – **GS. Hà Huy Khoái. Trang 59.**



THỂ LỆ GỬI BÀI:

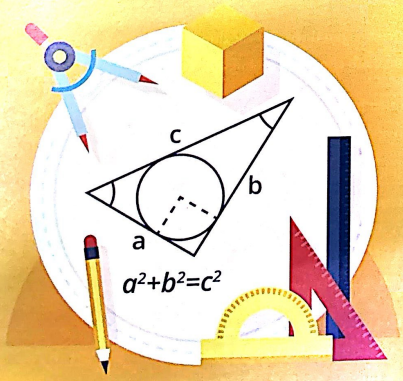
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán đề xuất, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, nơi học tập/công tác, email và số điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf. Chủ đề (subject) của email: Lời giải của bài nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì/hoặc không theo chuyên mục nào.
- Bản thảo có thể viết tay gửi qua bưu điện đến Tòa soạn.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: ***bbt@pi.edu.vn***
- Qua bưu điện:

Tòa soạn Tạp chí Pi
P705 - B8, tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Số 1 Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.

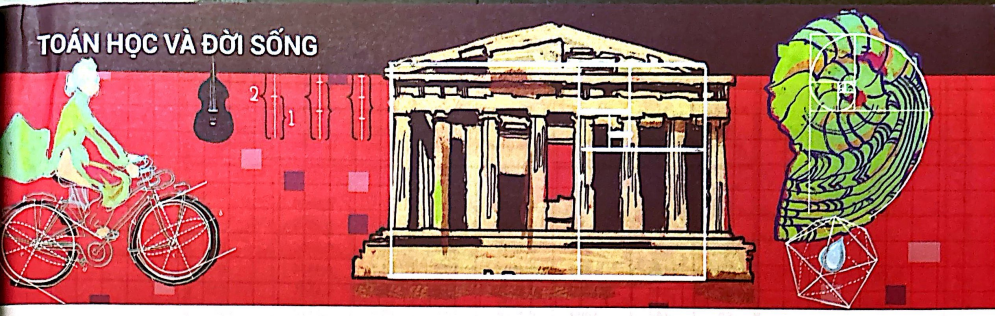


THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại bưu điện gần nhất:** Tạp chí Pi được phát hành qua mạng lưới Bưu điện Việt Nam. Mã của ấn phẩm: C057 (có thể đặt các số báo đã ra). Hotline: 1800 585855.
- **Đặt tại website *www.pi.edu.vn*:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:**
  Gửi email đến địa chỉ ***info@pi.edu.vn*** nêu nhu cầu đặt báo, chi tiết người nhận báo (họ và tên, địa chỉ, điện thoại).

  Chuyển tiền đặt báo vào Tài khoản Tạp chí Pi:
  Tài khoản số: 0851000012293,
  Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành
  (trong nội dung chuyển tiền ghi rõ họ tên _ điện thoại người chuyển tiền).



Ứng dụng của **Thống kê toán học** trong phát hiện gian lận và các lĩnh vực khác

Nguyễn Hoàng Vũ

Adolphe Quetelet (1796–1874).

Adolphe Quetelet là một nhà thiên văn học, nhà toán học, nhà thống kê học, và nhà logic xã hội học, người Bỉ. Ông sinh năm 1796, ở thành phố Gent (thuộc Bỉ), là con thứ năm trong một gia đình có 9 người con. Khi còn nhỏ, ông học rất giỏi, với năng khiếu toán được biểu hiện từ sớm. Ông đã dành phần lớn những năm đầu đời cho nghệ thuật. Quetelet xuất bản thơ, triển lãm tranh, nghiên cứu điêu khắc, tham gia sáng tác opera. Tuy nhiên, sau này ông chuyển sang toán học và bảo vệ luận án tiến sĩ về các đường conic ở đại học Gent năm 1819, khi mới 23 tuổi. Sau đó, ông giảng dạy và nghiên cứu toán học, vật lý, thiên văn học ở Brussels. Ông giữ vai trò quan trọng trong việc lãnh đạo và phát triển Toán học ở Bỉ, cho đến lúc mất. Hình trên là ảnh của ông trên con tem Bỉ.

1. Phát hiện gian lận nhờ phân phối chuẩn

Phát hiện gian lận trong đời sống xã hội (như trong thi cử, tuyển chọn, bầu cử, hay trong các hoạt động thương mại, tài chính, ...) luôn là một nhu cầu thiết yếu, trong bất cứ xã hội nào. Câu hỏi đặt ra: Làm thế nào để nhận biết các dấu hiệu của gian lận, nhất là khi những gian lận ấy được ngụy trang một cách đủ tinh vi, kín đáo? Chẳng hạn, làm thế nào để nhận biết, trong một kỳ thi có gian lận hay không, khi mọi thứ giấy tờ, văn bản liên quan (như Biên bản coi thi, Biên bản chấm thi, ...) đều khẳng định tất cả các khâu trong kỳ thi ấy đã được tiến hành một cách trung thực, đúng Quy chế? Vâng, làm thế nào, khi trước mắt chúng ta là một tập văn bản "sạch sẽ", cùng các bảng liệt kê chi chít những con số, trông rất ... vui mắt? Loài người đã nghĩ ra một ý tưởng, đó là, tìm cách "cạy răng" các dữ liệu – những con số. Thống kê toán học chính là ngành khoa học đã giúp con người biến những con số tưởng như "vô hồn" thành những con số "biết nói". Như một ví dụ, dưới đây, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu xem nhà toán học nổi tiếng đầu thế kỷ 19, Adolphe Quetelet, đã phát hiện gian lận trong việc nhập ngũ như thế nào.

Ta hãy xét dữ liệu được công bố năm 1817, về số đo vòng ngực của những người lính Scotland (thu được trong quá trình may đo quần áo). Khi tiến hành phân tích các dữ liệu này, Adolphe Quetelet nhận thấy, chúng khớp với phân phối chuẩn (xem Bảng 1).

MESURES de la POITRINE.	NOMBRE d'hommes.	NOMBRE PROPORTIONNEL.	PROBABILITÉ d'après L'OBSERVATION	RANG dans LA TABLE.	RANG d'après le CALCUL.	PROBABILITÉ d'après LA TABLE.	NOMBRE d'OBSERVATIONS calculé.
Pouces.							
33	3	5	0,5000			0,5000	7
34	18	31	0,4995	52	50	0,4993	29
35	81	141	0,4964	42,5	42,5	0,4964	110
36	185	322	0,4823	33,5	34,5	0,4854	323
37	420	732	0,4501	26,0	26,5	0,4531	732
38	749	1305	0,3769	18,0	18,5	0,3799	1333
39	1075	1867	0,2404	10,5	10,5	0,2466	1838
			0,0597	2,5	2,5	0,0628	
40	1079	1882	0,1285	5,5	5,5	0,1359	1987
41	934	1628	0,2013	13	13,5	0,3034	1675
42	658	1148	0,4001	21	21,5	0,4130	1096
43	370	645	0,4706	30	29,5	0,4690	560
44	92	160	0,4866	35	37,5	0,4911	221
45	50	87	0,4953	41	45,5	0,4980	69
46	21	38	0,4991	49,5	53,5	0,4996	16
47	4	7	0,4998	56	61,8	0,4999	3
48	1	2	0,5000			0,5000	1
	5738	1,0000					1,0000

***Bảng 1**. Các tính toán của Quetelet với số liệu vòng ngực của những người lính Scotland. Cột 1 là chu vi vòng ngực của mỗi người lính, tính theo đơn vị inch. Cột 2 và 3 là tần số và tần số tương đối cho 5738 cá nhân này. Cột 4–7 là các tính toán trung gian của Quetelet. Cột 8 là phân phối tần số tương đối (trên 10000 người), sau khi đã khớp với phân phối chuẩn.*

Bằng cách trên, Quetelet đã tiến hành phân tích các dữ liệu về chiều cao của 100000 người Pháp, trong một đợt tuyển quân (xem Bảng 2).

Chiều cao (Đo bằng mét)	Số lượng người	Tần số tương đối	Số lượng sau khi khớp	khác biệt
< 1,570	28620	0,2862	26345	+ 2275
1,570 – 1,597	11580	0,1158	13182	– 1602
1,597 – 1,624	13990	0,1399	14502	– 512
1,624 – 1,651	14410	0,1441	13982	+ 428
1,651 – 1,678	11410	0,1141	11803	– 393
1,678 – 1,705	8780	0,0878	8725	+ 55
1,705 – 1,732	5530	0,0553	5627	– 97
1,732 – 1,759	3190	0,0319	3189	+ 1
>1,759	2490	0,0249	2645	– 155
	100000		100000	

***Bảng 2.** Số liệu chiều cao tuyển lính Pháp sau khi phân tích bởi Quetelet. Có sự khác biệt lớn giữa dữ liệu và phân phối chuẩn xung quanh ngưỡng không phải nhập ngũ (1.57 m)*

Ở đây, ông nhận thấy có một số lượng lớn người thuộc mức chiều cao thấp nhất, và sự thiếu hụt những người ở mức chiều cao ngay trên mức thấp nhất. Sau khi phân tích, Quetelet chỉ ra rằng, dữ liệu này quá xa so với phân phối chuẩn xung quanh ngưỡng 1,57m, và kết luận rằng, có sự gian lận theo cách nào đó, từ phía sĩ quan kiểm tra hoặc những người được kiểm tra nhập ngũ; có khoảng 2275 người đã tránh được "đi lính" do sự gian lận này! Những người này có thể có chiều cao ngay trên mức 1,57m, nhưng bằng cách nào đó, lại xuất hiện ở danh sách cao dưới 1,57m, dẫn đến sự bất thường về phân bố của dữ liệu.

Về mặt toán học, khi tiến hành khớp dữ liệu, Quetelet không sử dụng các công thức tính phân phối chuẩn dạng giải tích như của Bessel hay Laplace. Ông dựa trên định lý của Laplace, và tiến hành tính các giá trị cho phân phối chuẩn dựa trên phân phối nhị thức. Ông đã xây dựng một phân phối nhị thức đối xứng cho 1000 biến cố, với mỗi biến cố là một kết quả có thể xảy ra, khi thực hiện phép thử "lấy ra ngẫu nhiên 999 quả bóng từ một chiếc thùng có chứa hai loại bóng, bóng trắng và bóng đen, với số lượng bóng trắng bằng số lượng bóng đen, và số lượng bóng có trong thùng là rất rất nhiều". Ta biết rằng, khi thực hiện phép thử vừa nêu, sẽ xảy ra một trong 1000 biến cố: "có 0 quả bóng đen và 999 quả bóng trắng được lấy ra", "có 1 quả bóng đen và 998 quả bóng trắng được lấy ra", ..., "có 999 quả bóng đen và 0 quả bóng trắng được lấy ra". Ta ký hiệu $P(X=n)$ là xác suất của biến cố "có n quả bóng đen và $999-n$ quả bóng trắng được lấy ra", $n \in \{0;1;2;\ldots;999\}$. Do tính đối xứng nên ta có:

$$P(X=n)=P(X=999-n),$$
$$n=500,501,\ldots,999.$$

Để tính $P(X=n), n \in \{500;501;\ldots;999\}$, cần thực hiện một khối lượng tính toán rất lớn. Vì thế, Quetelet đã dựa vào việc quan sát tỷ lệ xảy ra của các kết quả thu được, khi thực hiện 999 phép thử nêu trên, để tìm ra một cách tính khác cho $P(X=n)$. Qua quan sát, ông đi đến nhận định:

$$P(X=n+1)=P(X=n)\cdot\frac{999-n}{n+1}. \quad (*)$$

Từ nhận định trên, Quetelet đã tính $P(X=n), n=500,501,\ldots,999$, như sau:

– Trước hết, sử dụng (*), tính $P(X=n)$, với giả thiết $P(X=500)=1$; chẳng hạn, với giả thiết đó, ta có:

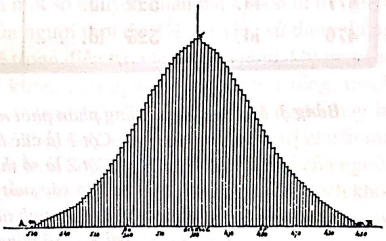
$$\begin{aligned}&P(X=502)\\&=P(X=501)\cdot\frac{999-501}{501+1}\\&=P(X=500)\cdot\frac{999-500}{500+1}\cdot\frac{498}{502}\\&=\frac{499}{501}\cdot\frac{498}{502}=0,988072;\end{aligned}$$

ông gọi các giá trị tính được là xác suất tương đối (relative probability);

– Tiếp theo, lấy tổng tất cả các xác suất tương đối đã tính được, rồi lấy từng xác suất tương đối chia cho tổng đó, kết quả thu được được coi là giá trị của xác suất cần tính.

Với cách tính trên, Quetelet đã tính được, chẳng hạn, $P(X=504)=0,024236$. Hơn nữa, ông cũng chỉ tính $P(X=n)$, với $n=500,501,\ldots,579$, do thấy với các giá trị tiếp theo của $n, P(X=n)$ rất nhỏ.

Quetelet đã sử dụng Bảng xác suất thu được theo cách trên, cho các tính toán so khớp dữ liệu với phân phối chuẩn.



Hình 1. *Phân phối nhị thức đối xứng, thu được theo cách tính trên đây của Quetelet (1846)*

GROUPES DE	RANG des GROUPES.	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ du tirage de chaque GROUPE. *Table A.*	ÉCHELLE de précision. — SOMMES des probabilités à partir du groupe le plus probable. *Table B.*	ÉCHELLE de possibilité. — PROBABILITÉ relative du tir. de chaque GROUPE. *Table C.*
499 boules blanches et 500 noires. .	1	0.025225	0.025225	1.000000
498 id. 501 id. . .	2	0.025124	0.050349	0.996008
497 id. 502 id. . .	3	0.024924	0.075273	0.988072
496 id. 503 id. . .	4	0.024627	0.099900	0.976285
495 id. 504 id. . .	5	0.024236	0.124136	0.960789
494 id. 505 id. . .	6	0.023756	0.147892	0.941764
493 id. 506 id. . .	7	0.023193	0.171085	0.919429
492 id. 507 id. . .	8	0.022552	0.193637	0.894040
491 id. 508 id. . .	9	0.021842	0.215479	0.865882
490 id. 509 id. . .	10	0.021069	0.236548	0.835261
489 id. 510 id. . .	11	0.020243	0.256791	0.802506
488 id. 511 id. . .	12	0.019372	0.276163	0.767956
487 id. 512 id. . .	13	0.018464	0.294627	0.731958
486 id. 513 id. . .	14	0.017528	0.312155	0.694860
485 id. 514 id. . .	15	0.016573	0.328728	0.657008
484 id. 515 id. . .	16	0.015608	0.344335	0.618736
483 id. 516 id. . .	17	0.014640	0.358975	0.580364
482 id. 517 id. . .	18	0.013677	0.372652	0.542197
481 id. 518 id. . .	19	0.012726	0.385378	0.504516
480 id. 519 id. . .	20	0.011794	0.397172	0.467576
479 id. 520 id. . .	21	0.010887	0.408060	0.431609
478 id. 521 id. . .	22	0.010008	0.418070	0.396815
477 id. 522 id. . .	23	0.009166	0.427236	0.363366
476 id. 523 id. . .	24	0.008360	0.435595	0.331407

Bảng 3. *Một phần của Bảng phân phối nhị thức đối xứng cho 999 phép thử của Quetelet.*
Cột 1 là các biến cố có thể xảy ra.
Cột 2 là số thứ tự của các biến cố.
Cột 3 là xác suất xảy ra của từng biến cố.
Cột 4 là xác suất cộng gộp tính từ giá trị đầu tiên ($P(500 \leq X < 500+r)$,
với X *= số bóng đen và* r *= số thứ tự).*
Cột 5 là xác suất tương đối.

2. Quetelet và thống kê trong y học

Năm 1823, để phục vụ việc xây dựng đài thiên văn ở Brussels, Adolphe Quetelet sang Paris để học thiên văn học với những nhà toán học nổi tiếng như Joseph Fourier, Siméon Poison và Pierre Laplace. Họ đã giúp ông tiếp xúc với ứng dụng của xác suất thống kê, đặc biệt là phân phối chuẩn, trong thiên văn học. Khi đó, phân phối chuẩn hầu như chỉ được quan tâm trong lĩnh vực thiên văn học, với những công trình nghiên cứu của Bessel. Tuy nhiên, Quetelet lại đem lý thuyết này ứng dụng vào những lĩnh vực khác. Do có sự yêu thích hội họa, Quetelet rất quan tâm đến các số đo của cơ thể người. Ông nghiên cứu các thông tin thu thập được về chiều cao và cân nặng của cư dân ở các vùng khác nhau.

Quetelet đã áp dụng phân phối chuẩn cho nhiều đặc điểm cơ thể khác nhau của con người; ví dụ như số đo vòng ngực mà ta đã thấy ở phần trên. Tuy nhiên, quan hệ giữa chiều cao và cân nặng lại không khớp với phân phối chuẩn. Sau khi tiến hành đánh giá những thay đổi về chiều cao và cân nặng ở các độ tuổi, tốc độ tăng trưởng về chiều cao và cân nặng ở các cá thể ở các thời điểm sau khi sinh ra, tuổi dậy thì và tuổi trưởng thành, Quetelet đã đề xuất lấy tỉ số giữa cân nặng và bình phương chiều cao làm chỉ số đánh giá cơ thể. Ông nhận thấy trong những dữ liệu quan sát được, chỉ số này phân bố theo phân phối chuẩn.

Đề xuất nêu trên của Quetelet sau đó đã bị lịch sử lãng quên một thời gian dài, do xã hội lúc đó, cũng như bản thân Quetelet, chưa quan tâm nhiều đến ảnh hưởng của cân nặng tới sức khỏe. Đến đầu thế kỷ 20, do sự phát triển của đời sống, số người thừa cân tăng lên nhanh chóng, và vì thế, sự liên quan giữa béo phì và các bệnh khác nhau được nghiên cứu nhiều hơn. Từ những năm 1940 đến cuối 1960, các nhà nghiên cứu tiến hành lập các bảng cân nặng lý tưởng cho từng độ tuổi. Nhiều chỉ số đánh giá cơ thể cũng được đưa ra, nhưng không có sức thuyết phục. Vào năm 1972, nhà

nghiên cứu Ancel Keys và các đồng nghiệp đã tiến hành đo và nghiên cứu mật độ xương (đo cân nặng dưới nước), và chỉ số mỡ, bằng thước kẹp trên da, ở trên 7400 người khỏe mạnh thuộc năm quốc gia. Nghiên cứu này cho thấy, chỉ số mà Quetelet đã đề xuất, chính xác hơn hẳn so với các chỉ số khác. Từ đó, chỉ số Quetelet "cân nặng/bình phương chiều cao" được gọi là *chỉ số khối lượng cơ thể* (tiếng Anh: Body Mass Index, viết tắt là BMI). Ngày nay, chỉ số này được dùng phổ biến để đánh giá sức khỏe của con người. Để xác định chỉ số BMI, cân nặng được tính bằng đơn vị kg, và chiều cao được tính bằng đơn vị mét; người có chỉ số BMI từ 18,5 đến 25 được coi là bình thường. Chỉ số BMI tuy có một số hạn chế, do nó đơn giản hóa cấu trúc bên trong của cơ thể, nhưng nó vẫn được sử dụng rộng rãi, do cách tính đơn giản và tiện lợi.

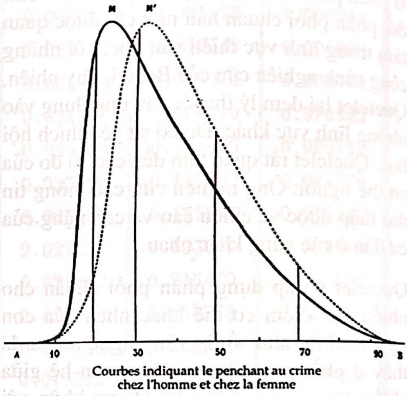
Ở một số công trình của mình, Quetelet đã nhấn mạnh vai trò của thống kê trong các ngành y khoa, và chống lại sự hoài nghi (gồm cả một số nguyên nhân bắt nguồn từ tôn giáo) của người thời đó đối với việc sử dụng thống kê trong điều trị. Ông chỉ ra rằng, khi một bác sĩ khám cho người bệnh và nói rằng, mạch của người này là nhanh, hoặc người này bị khó thở, thì cần phải có một giá trị chuẩn mà dựa trên đó, một đặc trưng nào đó của người bệnh được coi là khác thường, và độ lệch khỏi giới hạn của sự bình thường dẫn đến nguy hiểm cho sức khỏe. Quetelet chủ trương thu thập các số liệu y khoa để sử dụng trong điều trị. Do người bệnh thường không thể giữ các

số liệu thường xuyên về bản thân, bác sĩ cần phải có một thang chung, để so sánh giữa các bệnh nhân. Ông cũng chỉ ra rằng, do không có nguồn dữ liệu chính xác, những bác sĩ khác nhau đã đưa ra những nguyên nhân khác nhau, và cách điều trị khác nhau, cho cùng một loại bệnh. Ông đề xuất phải có so sánh thống kê giữa các phương pháp điều trị khác nhau. Một số vấn đề y học ông nêu ra vẫn có giá trị đến ngày nay.

3. Con người trung bình và thống kê xã hội học

Với Quetelet, những đường cong quả chuông của phân phối chuẩn không chỉ tồn tại trong lĩnh vực khoa học tự nhiên. Ông đã sử dụng phân phối xác suất này trong nghiên cứu các hiện tượng xã hội, như tội phạm và hành vi của con người. Theo Quetelet, do mỗi cá nhân chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố khác nhau nên con người có các đặc điểm cơ thể và xã hội khác nhau. Tuy nhiên, khi xét trên một số lượng lớn và khi đặc trưng cần xét tuân theo phân phối chuẩn, ta có thể đưa ra khái niệm về một con người có các thông số trùng với các thông số trung bình của các đặc điểm vừa nêu, xét cho một số lượng đủ lớn người trong xã hội. Một con người như vậy được Quetelet gọi là "*con người trung bình*".

Khái niệm "con người trung bình" không chỉ về mặt cơ thể, mà về cả các đặc điểm xã hội, đã mở đầu cho việc áp dụng thống kê vào những lĩnh vực trước đó được coi là hoàn toàn không thể áp dụng toán học. Trong một khoảng thời gian dài sau khi trở về từ Pháp, Quetelet có nhiều nghiên cứu theo hướng này. Trong cuốn sách "Luận về con người" (1835), ông trình bày các nghiên cứu về tội phạm ở nam và nữ, theo độ tuổi. Trong ấn bản lần 2 năm 1869, ông chỉ ra các quan sát về sự lặp lại số lượng người tự tử theo từng năm, và tỉ lệ kết hôn ở mỗi nhóm tuổi và giới tính. Những tính toán này được ông xếp vào một bộ môn khoa học mới: "*vật lý xã hội học*" *(social physics)*[1]. Khái niệm này đã được nhà triết học người Pháp Auguste Comte (1798 – 1857) đưa ra trước đó. Sau những công bố của Quetelet, Comte đã bỏ thuật ngữ này và chuyển sang sử dụng thuật ngữ "xã hội học", do không tán thành các bộ sưu tập dữ liệu thống kê của Quetelet.



Hình 2. *Biểu đồ của Quetelet về sự phân bố tội phạm theo độ tuổi ở Bỉ, với dữ liệu cho nam (đường nét liền) và nữ (đường nét đứt).*

Theo Quetelet, những phân phối thống kê về hành vi của con người không phải là thành quả của một thế lực siêu nhiên điều khiển cuộc sống con người, mà là do các điều kiện xã hội. Khi những điều kiện này thay đổi, hành vi của con người cũng thay đổi. Cho dù bản thân cá thể có ý chí tự do, dẫn đến sự khác biệt giữa các cá thể, một số lượng lớn các cá thể trong cùng một xã hội vẫn tuân theo một phân phối nhị thức hoặc phân phối chuẩn. Quetelet đã viết trong một cuốn sách, xuất bản vào năm 1835: "Xã hội chuẩn bị cho tội ác, và người phạm tội chỉ là công cụ thực hiện việc đó". Ông cũng nhận xét về sự lặp lại của tội phạm theo năm, về sự biến thiên theo mùa, và rằng, tỉ lệ của các loại tội phạm không đổi theo

[1] *Vật lý xã hội học (social physics) là một lĩnh vực khoa học, mà ở đó người ta sử dụng các công cụ Toán học mang hơi thở Vật lý để lý giải, hiểu rõ các hành vi, cách ứng xử của các đám đông trong xã hội. Vật lý xã hội có liên quan mật thiết với Vật lý kinh tế học (econophysics) – một lĩnh vực khoa học, mà ở đó người ta sử dụng các phương pháp vật lý để mô tả các vấn đề kinh tế. – BBT Tạp chí Pi.*

năm: "Ta có thể dự đoán hàng năm có bao nhiêu người sẽ dính máu của người khác trên tay, bao nhiêu người sẽ giả mạo, bao nhiêu người sẽ đầu độc người khác, cũng giống như cách ta dự đoán tỉ lệ sinh và tỉ lệ chết hàng năm". Trong những xã hội ổn định, hành vi con người tuân theo một trạng thái cân bằng, nhưng cân bằng này cũng dịch chuyển, do con người có thể thay đổi hoàn cảnh và mang đến sự tiến bộ.

Những nghiên cứu ứng dụng thống kê toán học vào việc nghiên cứu hành vi con người đóng vai trò tiên phong, khởi đầu cho ngành thống kê xã hội học, và là tiền đề cho sự phát triển và ứng dụng của ngành này vào các vấn đề xã hội, trong suốt thế kỷ 19, và cả thế kỷ 20. Quan điểm về tính đối lập giữa sự ngẫu nhiên của ý thức con người và tính tất định theo quy luật ở quy mô lớn của xã hội vẫn là một vấn đề phức tạp cho đến ngày nay.

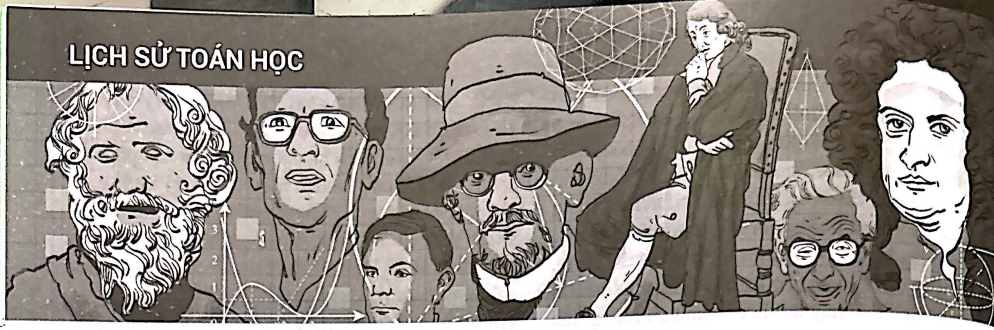
4. Lời kết

Những nghiên cứu của Quetelet đánh dấu giai đoạn phát triển quan trọng của thống kê, từ các tính toán đặc thù cho thiên văn học chuyển sang các ngành khác, đặc biệt là y học và khoa học xã hội. Đồng thời, thống kê cũng không chỉ dừng lại ở việc thu thập số liệu, mà bắt đầu chuyển sang phân tích (ví dụ, khớp dữ liệu với phân phối chuẩn). Tuy nhiên, các nghiên cứu Quetelet đã tiến hành vẫn có một số hạn chế, do sự so khớp với phân phối chuẩn không được đánh giá một cách định lượng. Những tính toán này được hoàn thiện dần với sự ra đời của hồi quy và tương quan vào giai đoạn cuối thế kỷ 19, đầu thế kỷ 20, với những công trình của Galton, Edgeworth và Pearson.

Quetelet có ảnh hưởng lớn đến những nhà khoa học lớn của các ngành khác, trong giai đoạn cuối thế kỷ 19: Francis Galton (tâm lý học), Thomas Buckle (lịch sử), Emile Durkheim (xã hội học), Edward Tylor (cha đẻ của nhân chủng học). Có thể, Karl Marx cũng chịu ảnh hưởng của Quetelet trong việc đánh giá các tiến triển của xã hội cũng tuân theo quy luật, mà sự duy ý chí không thể thay đổi được: "Khi một xã hội đã tuân theo các quy luật tự nhiên về phát triển của nó – mà mục đích chính của cuốn sách này là chỉ ra quy luật phát triển kinh tế của xã hội hiện đại – nó không thể nhảy cóc các giai đoạn phát triển tự nhiên, hoặc vượt qua chúng, bằng cách ban bố các sắc lệnh." (*Tư bản* – 1867)

Quetelet có vai trò quan trọng trong việc thiết lập ngành thống kê với tư cách là một ngành toán học, thay vì là một công cụ cho các ngành khác. Ông đã tổ chức Đại hội Thống kê Quốc tế lần thứ nhất, vào năm 1853. Đồng thời, trong suốt cuộc đời hoạt động và nghiên cứu của mình, Quetelet luôn góp phần đề cao vai trò của việc thu thập dữ liệu và phân tích thống kê trong các hoạt động đời sống. Để ghi nhận những đánh giá của Quetelet cho khoa học Bỉ nói riêng, và thế giới nói chung, Viện Khoa học Hoàng gia Bỉ đã cho dựng tượng ông ở Brussels. Trong bức tượng, Quetelet ôm quả địa cầu bên tay trái, thể hiện sự ghi nhận những đóng góp khoa học của ông cho nhân loại.

Tượng Adolphe Quetelet ở Brussels

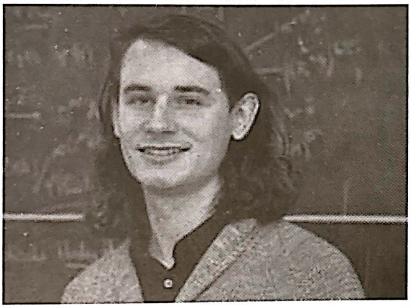


Chuyện về những nhà Toán học trẻ được tặng thưởng Huy chương Fields năm 2018

Phần 2. Peter Scholze và Akshay Venkatesh

Lê Quang Ánh

Peter Scholze



Peter Scholze (sinh tháng 12 năm 1987)

Thông thường thì tên của người được chọn tặng Huy chương Fields cao quý được giữ kín đối với công chúng cho tới giờ chót. Trường hợp Peter Scholze thì khác. Tin nhà Toán học trẻ tuổi này sẽ được trao tặng Huy chương Fields loan ra ở khắp mọi nơi, trong giảng đường đại học, trên mạng Internet, thậm chí trong những chốn trang nghiêm như các hội thảo khoa học, trước khi Đại hội Toán học Thế giới diễn ra, không phải một vài tháng mà là một vài năm.

Nay tin đồn ấy là sự thật: **Peter Scholze**, 30 tuổi, thuộc Trường Đại học Bonn, Đức, là nhà Toán học trẻ nhất[13] trong số bốn nhà Toán học được nhận Huy chương Fields 2018.

Trích lời khen chính thức của Đại hội Toán học Thế giới:

"Peter Scholze đã khởi xướng cho một cuộc cách mạng trong ngành Hình học số học (Arithmetic Geometry)."

Micheal Rapoport, giáo sư hướng dẫn luận án tiến sĩ của Scholze tại Đại học Bonn, người đọc diễn văn chính thức giới thiệu Scholze trước Đại hội, thì nói rằng:

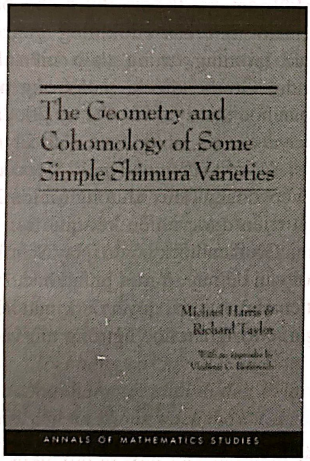
"Những lý thuyết và khái niệm của Scholze đưa vào đã làm thay đổi thực sự bộ mặt của ngành Hình học số học. Tôi tin rằng đây chỉ là bước đầu của Scholze, anh ấy sẽ còn có nhiều đóng góp mới khác mà chúng ta không thể dự đoán được."

****

Cuốn sách *Hình học và đối đồng điều của một số đa tạp Shimura đơn* của hai nhà

[13] *Nhà Toán học trẻ nhất trong lịch sử Toán học, cho tới nay, được tặng thưởng Huy chương Fields là Jean–Pierre Serre (sinh năm 1926), nhà Toán học Pháp, thuộc nhóm Bourbaki, Huy chương Fields 1954, khi ấy ông chưa đủ 28 tuổi. Hiện nay ông vẫn còn sống.*

Toán học nổi tiếng là Michael Harris và Richard Taylor[14] dày 288 trang, nhằm mục đích chứng minh một vấn đề hóc búa của Lý thuyết số, xuất bản năm 2001. Sách được giới Toán học đánh giá rất cao từ khi ra đời. Bỗng nhiên, vào năm 2010, có một tin loan truyền trong giới Toán học trên thế giới, làm cho mọi người giật mình, nhất là các nhà Lý thuyết số: Có một sinh viên đã viết lại chứng minh 280 trang của Harris và Taylor còn 37 trang. Chàng sinh viên ấy mới hơn 22 tuổi, thuộc Trường Đại học Bonn tên là Peter Scholze. Jared Weinstein, giáo sư Trường Đại học Boston, một chuyên gia về Lý thuyết số và Hình học–Đại số thốt lên: *"Thật không thể tưởng tượng được, một người trẻ như vậy lại có thể làm được một việc phi thường như vậy! Có thể thấy anh ta phát triển một lý thuyết ngay cả khi lý thuyết ấy mới bắt đầu."*



Hai năm sau, năm 2012, sau khi có bằng Tiến sĩ, Scholze được Trường Đại học Bonn phong Giáo sư và trở thành giáo sư trẻ nhất trong lịch sử của trường này.

Trong các lần nhận giải thưởng khác trước đây, Scholze đã từng được biểu dương như:

"Peter Scholze là một trong những nhà Toán học có ảnh hưởng nhất trên toàn thế giới."

"Đó là một tài năng hiếm có, một kiểu tài năng phải vài thập niên mới thấy xuất hiện một lần."

Eugen Hellmann, bạn học và là một đồng nghiệp của Scholze, tại Đại học Bonn, nói: *"Khi làm việc chung với Scholze, anh ấy không bao giờ khiến bạn có cảm giác là anh ấy quá vượt trội so với mình."*

Scholze bắt đầu tự học Toán trình độ đại học năm 14 tuổi, khi đang còn ngồi ghế trường trung học Heinrich Hertz Gymnasium, một trường trung học chuyên Toán và Khoa học ở Berlin. Năm 16 tuổi, Scholze biết rằng 10 năm trước Andrew Wiles đã chứng minh được *định lý Fermat lớn*, một phát biểu có từ thế kỷ 17 chưa ai chứng minh được. Định lý nói rằng *phương trình $x^n + y^n = 2^n$ không có nghiệm nguyên khác 0 khi số nguyên n lớn hơn 2*. Phát biểu của định lý nghe có vẻ đơn giản, nhưng khi đọc chứng minh của Wiles, Scholze nói: *"Tôi chẳng hiểu gì cả bởi vì Wiles sử dụng những công cụ Toán học quá hiện đại."* Scholze bắt đầu làm ngược. Chỗ nào không hiểu, tìm học ngay cái lý thuyết ấy. *"Tôi thậm chí không học cả Đại số tuyến tính nữa. Tôi hiểu nó thông qua việc học cái mới,"* Scholze nói.

Trong khi đào bới chứng minh của Wiles, chàng bị hấp dẫn bởi những phương tiện Toán học mới, chẳng hạn như *dạng modula và đường cong elliptic*, chúng kết nối huyền diệu những chuyên ngành Toán học khác nhau và rất xa nhau: Lý thuyết số, Đại số, Hình học và Giải tích. Scholze nói: *"Đọc và học những cái mới này thú vị hơn là chính cái chứng minh định lý Fermat của Wiles."*

Hết trung học, Scholze tiếp tục theo đuổi học Lý thuyết số và Hình học ở Đại học Bonn theo cách của mình. Hellmann, bạn học và sau này là đồng nghiệp của Scholze, kể lại rằng ở lớp chàng trai trẻ không ghi chép gì cả, chỉ lắng

[14] *Richard Taylor chính là người đã giúp thầy mình là Andrew Wiles hoàn chỉnh lại chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Tìm xem cuốn sách cùng tên của tác giả Lê Quang Ánh.*

nghe, nhưng anh hiểu vấn đề thật sâu cho nên không bao giờ quên.

Cuộc cách mạng trong ngành Đại số và ngành Hình học số học bắt đầu từ một cuộc hội thảo vào năm 2011, khi Peter Scholze giới thiệu và mô tả khái niệm về một cấu trúc không gian mà anh đặt tên là *không gian phỏng hoàn thiện*. Khi ấy, Scholze vẫn còn là nghiên cứu sinh. Khái niệm này nhanh chóng được các nhà Toán học cùng ngành trên toàn thế giới quan tâm và nghiên cứu. Nó rọi ánh sáng vào nhiều vấn đề toán học cả chục năm nay bị bế tắc. Chúng ta sẽ không tìm hiểu định nghĩa hoặc xây dựng của nó ở đây vì nó đòi hỏi nhiều ý tưởng mới và nhiều kỹ thuật phức tạp.

Để đại chúng có thể hiểu được khái niệm phức tạp này, ta mượn ý tưởng của Kevin Buzzard, giáo sư tại trường Imperial College London, giải thích như sau:

Một kỹ thuật các nhà hình học hay làm khi nghiên cứu những không gian phức tạp là chiếu một không gian đơn giản hơn lên nó. Thí dụ, một đường thẳng là một đối tượng đơn giản hơn một đường tròn. Hãy tưởng tượng xoắn đường thẳng thành một hình lò xo rồi nén nó lại, bạn đã thu được một phép chiếu một đường thẳng lên một đường tròn. Bằng kỹ thuật này, các nhà hình học có thể phân tích các bài toán trên các đường tròn bằng cách đưa về các bài toán trên các đường thẳng.

Từ thập niên 1970, các nhà Toán học quan tâm rất nhiều đến những vấn đề liên quan đến tập hợp các số *p–adic* (*p* là số nguyên tố). Đây là một hệ các số được tạo ra để lấp đầy khoảng trống giữa số nguyên và số hữu tỷ (mà không phải là các số vô tỷ). Và họ còn nhiều vấn đề với cấu trúc này. Scholze đã xây dựng nên một không gian *phỏng hoàn thiện* từ các cấu trúc ấy, giúp giải quyết được nhiều bế tắc của các nhà Toán học trước đó.

****

Một thành tựu nổi bật khác của Scholze có liên quan đến *đối đồng điều của những không gian đối xứng địa phương*. Một lần nữa, ở đây người ta thấy rõ tính hữu hiệu của không gian *phỏng hoàn thiện* mà Scholze đã sáng tạo. Một trong những định lý rất sâu sắc và gây nhiều ấn tượng của Scholze trong nghiên cứu là, anh đã chứng minh được *tồn tại những biểu diễn Galois gắn liền với đối đồng điều của những không gian đối xứng địa phương*. Điều đáng chú ý là Scholze đã xử lý các lớp đối đồng điều xoắn, và từ đó có được các lớp đối đồng điều cổ điển.

Kết quả này cho thấy ý tưởng rất tiên phong và rất rộng của chương trình Langlands. Đó là một mạng lưới vươn rất sâu và rất xa, bao gồm nhiều dự đoán, định hướng cho nhiều nghiên cứu Toán học ngày nay.

Scholze không chỉ là một chuyên gia trên các cấu trúc *p–adic* với *p* là một số nguyên tố cố định. Vừa mới đây, anh đưa ra một hình dung về một lý thuyết đối đồng điều phổ quát, có thể áp dụng cho bất cứ trường nào trên bất cứ không gian nào. Ta nhắc lại rằng, trong thập niên 1960, Alexandre Grothendieck, một trong những nhà Toán học thiên tài của thế kỷ 20, đã đưa ra *lý thuyết motive*, nhằm mục đích xây dựng *lý thuyết đối đồng điều phổ quát*. Sau đó, Vladimir Veovodsky (Huy chương Fields 2002) đã phát triển được nhiều kết quả trên công trình mà Grothendieck bỏ dở. Nay Scholze lại đến với vấn đề này từ một phía khác, (với lý thuyết của mình), giải quyết được hầu hết mọi trở ngại. Giới Toán học ngưỡng mộ và phấn khởi.

****

Để kết luận bài viết này, ta hãy nghe Jared Weinstein, giáo sư Đại học Boston, nói về Peter Scholze:

"Bàn luận Toán học với Scholze như đang hỏi chuyện với một nhà tiên tri. Khi anh ta nói ***được*** *thì hãy tin là được và ta hãy cố tìm ra lời giải. Nếu gặp may thì anh ta sẽ giúp bạn cùng làm. Khi anh ta nói* ***không*** *thì điều ấy không đúng, hãy từ bỏ hướng ấy."*

Liệu Weinstein có nói quá không?

Akshay Venkatesh

Người ta thường nói thời nay không còn những nhà Toán học thông thái nữa[15]. Nhưng trường hợp Venkatesh mai sau có thể chúng ta phải xem lại chăng.

Emmanuel Kowalski, giáo sư Viện Kỹ thuật Liên bang Zurich, Thụy sĩ.

Akshay Venkatesh (36 tuổi)

Akshay Venkatesh sinh tại New Delhi năm 1981. Khi lên hai, anh cùng gia đình qua sinh sống tại Perth, Úc. Anh từng là thần đồng với thành tích đáng nể: huy chương đồng kỳ thi Olympic Vật lý quốc tế năm 11 tuổi và huy chương đồng kỳ thi Olympic Toán quốc tế năm 12 tuổi. Sau này ai có nhắc tới điều này, anh nói: *"Hãy làm ơn quên chuyện này đi. Đó chỉ là những trò chơi thể thao mà thôi. Nếu để trở thành nhà Toán học mà phải học như thế thì tôi thà không là nhà Toán học còn hơn."* Anh vào Đại học Western, Úc, năm 13 tuổi và tốt nghiệp năm 16 tuổi. Từ đó anh qua Đại học Princeton, Mỹ, làm nghiên cứu sinh. Anh nói: *"Tôi không có chọn lựa nào khác, cứ như là đường thẳng tôi phải đi đến Princeton học Toán, chứ tôi không thích mấy. Tôi còn có quá nhiều điều thú vị cần phải học."*

Tại Princeton, giáo sư hướng dẫn của Venkatesh là Peter Sarnak[16]. Lần đầu tiên gặp anh sinh viên nổi tiếng nhưng còn quá trẻ của mình, giáo sư Sarnak đưa ngay cho chàng cuốn sách liên quan đến *lý thuyết biểu diễn của nửa nhóm* để về nhà đọc. Vì nội dung cuốn sách này ở trên trình độ của các nghiên cứu sinh, cho nên giáo sư Sarnak nghĩ rằng chỉ vài ngày sau anh sẽ quay lại xin đổi cuốn khác đơn giản hơn. Giáo sư Sarnak kể lại: *"Sau vài tuần, Venkatesh quay lại văn phòng tôi để trình bày những gì cậu thu được. Không những cậu ấy hiểu rõ mà còn tỏ ra có trực giác rất tinh tường về nội dung lý thuyết nói trong sách."* Nhưng Venkatesh thì nói: *"Tôi không thích làm nghiên cứu sinh theo kiểu này."* Tâm sự với bạn, anh tỏ ra không thích làm nghiên cứu sinh mà bị bắt phải theo những gợi ý của giáo sư hướng dẫn: *"Tôi chỉ thích làm theo cái mình thích thôi."* Đôi lúc, tỏ ra chán nản với những cuốn sách tham khảo được chỉ định, anh tạm gác ngang chúng, tìm đọc những tài liệu sách vở khác anh ưa thích. *"Thật thích thú, thật tuyệt vời,"* anh thốt lên. Cứ như thế Venkatesh học được rất nhiều chỉ trong vài năm làm nghiên cứu sinh, trong khi đó anh vẫn phải dành thời gian làm luận án. Anh có rất nhiều kiến thức Toán học ngoài phạm vi luận án đang nghiên cứu, nhờ đó anh có một bức tranh bao quát rộng lớn của Toán học, nó giúp anh có nhiều phương tiện liên kết lĩnh vực này với lĩnh vực khác trong những khám phá sau này.

Năm 2002, 21 tuổi, Venkatesh bảo vệ luận án tiến sĩ tại Đại học Princeton, rồi tiếp tục làm nghiên cứu viên sau tiến sĩ tại Viện công nghệ

[15] *Xem các bài liên quan đến Henri Poincaré và David Hilbert của cùng người viết trong trang này: Rosetta.vn/lequanganh. Hai nhà Toán học nói trên được mệnh danh là hai nhà Toán học thông thái cuối cùng (của thế kỷ 20).*

[16] *Peter Sarnak, hơn 20 năm trước, đã từng là một trong vài người phụ giúp Andrew Wiles trong việc kiểm tra chứng minh định lý cuối cùng của Fermat. Hiện nay Peter Sarnak đang làm việc tại IAS (Viện Nghiên cứu Cao cấp Princeton).*

Massachusetts. Hiện nay, Akshay Venkatesh là giáo sư Đại học Stanford, Mỹ.

****

Akshay Venkatesh tại buổi lễ nhận Huy chương Fields

Công trình của Venkatesh đóng góp cho Toán học quá nhiều và quá đa dạng, bao gồm nhiều chuyên ngành khác nhau, trong đó có *Lý thuyết số, Lý thuyết về các dạng tự đẳng cấu, Lý thuyết biểu diễn, Không gian đối xứng địa phương, Lý thuyết ergodic, vv...* Trong bài viết ngắn này, chúng tôi chọn giới thiệu với độc giả ba thành tựu chính của Venkatesh: một thuộc lĩnh vực Lý thuyết số, một thuộc lĩnh vực Tôpô–Đại số, và một về các giả thuyết trong chương trình Langlands.

Chúng tôi quan tâm đến các sự kiện lịch sử liên quan nhiều hơn là nội dung của các vấn đề vì tính phức tạp của chúng.

Về các dạng toàn phương

Để bắt đầu, chúng ta thử xét biểu thức:

$$x^2 + xy + 5y^2 + yz + 12z^2.$$

Đó là một dạng toàn phương nguyên, nghĩa là một đa thức gồm một hoặc nhiều biến số mà bậc của các hạng tử đều bằng 2 và có các hệ số là các số nguyên. Vấn đề ta quan tâm là, khi thay các biến số bằng những số nguyên thì ta được các số nguyên nào? Năm 1770, Joseph–Louis Lagrange chứng minh được rằng, dạng toàn phương $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sẽ cho ta tất cả các số tự nhiên khi ta thay các biến số bằng các số nguyên.

Trong tác phẩm nổi tiếng *Nghiên cứu về Số học* xuất bản năm 1801, Carl Gauss chứng minh được rằng, ta có thể biến đổi dạng toàn phương này sang một dạng toàn phương khác đơn giản hơn bằng phép *thế*, và các số nguyên sinh ra bởi dạng đơn giản cũng nằm trong các số nguyên sinh ra bởi dạng ban đầu (nhưng điều ngược lại thì không đúng).

Bằng cách trên, nếu ta có thể biến đổi dạng toàn phương P với m biến số thành dạng toàn phương Q với n biến số ($m \geq n$) thì ta nói P *đại diện* Q. Câu hỏi được đặt ra là: *Khi nào thì P đại diện Q*? Đây chính là một biến thể của bài toán số 11 trong số 23 bài toán mà David Hilbert đã phát biểu vào năm 1900. Năm 1978, Yoshiyuki Kitaoka, thuộc Đại học Meijo, Nagoya và Martin Kneser (1928 – 2004), thuộc Đại học Göttingen, đã tìm ra được câu trả lời là:

$$m \geq 2n + 3.$$

Trong vòng ba mươi năm sau đó, các nhà toán học không biết có mối quan hệ chính xác hơn giữa m và n. Người ta tin rằng kết quả tốt nhất có thể sẽ là:

$$m \geq 2n + 2.$$

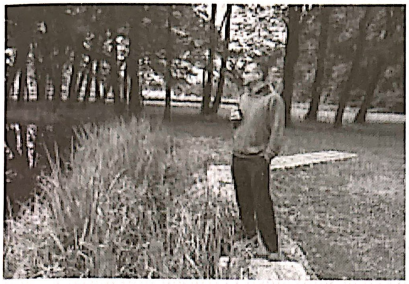
Năm 2008, Akshay Venkatesh và cộng sự Jordan Ellenberg làm thế giới toán học ngạc nhiên khi đưa ra được một điều kiện tốt hơn để giải đáp câu hỏi khi nào *P đại diện Q*. Câu trả lời là:

$$m \geq n + 5.$$

Thật ra, Venkatesh cùng với Ellenberg đã giải quyết xong vấn đề này vào năm 2005 và cho công bố lần thứ nhất vào năm 2008. Sau này, với sự cộng tác của Philippe Michel, chứng minh được tổng quát hơn lên và được công bố vào năm 2010.

Nét chính cần nói ở đây là, Venkatesh và các đồng nghiệp đã dùng một kỹ thuật thuộc lĩnh vực *lý thuyết hệ động lực* để giải bài toán này. Kỹ thuật này lại phải sử dụng tới bài toán *dưới–lồi*. Venkatesh đã liên kết hai

ngành Toán học hoàn toàn cách biệt để giải bài toán của mình một cách sáng tạo không ai ngờ tới.



Số lớp

Điều căn bản dễ thấy là bất cứ số nguyên dương nào cũng có thể phân tích được thành tích các số nguyên tố, và chỉ có một cách phân tích mà thôi (không quan tâm tới thứ tự trước sau).

Tập hợp các số nguyên với hai phép toán cộng và nhân tạo thành một *cấu trúc vành*. Đây là *vành* quen thuộc nhất. Tập hợp A các số phức dạng $a+b\sqrt{-5}$, trong đó a,b là các số nguyên, cũng tạo nên một vành. Thế nhưng vành A có một nhược điểm: nó không có tính chất phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố. Chẳng hạn, số 9 cũng là một số của vành $A(a=9,b=0)$, nhưng số 9 có thể phân tích thành hai cách:

$$9=3\times 3=(2+\sqrt{-5})\times(2-\sqrt{-5}).$$

Số lớp của một vành là một số nguyên dương, như một thước đo, cho phép ta biết vành đó có nhược điểm đến mức độ nào trong vấn đề phân tích duy nhất thành tích các số nguyên tố. Số lớp xuất hiện qua khắp các vấn đề của lý thuyết số. Do các công cụ lý thuyết hiện tại dùng để nghiên cứu các số lớp là khá ít ỏi, các nhà toán học chỉ có phương sách đơn giản là tính toán chúng và tìm hiểu các quy luật.

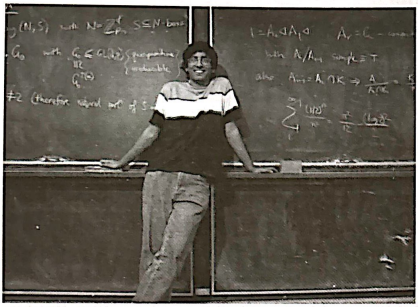
Năm 1984, dựa vào các tính toán thử nghiệm, Henri Cohen và Hendrik Lenstra đã phát biểu một số kết quả phỏng đoán khá bất ngờ. Chẳng hạn như, người ta có thể kỳ vọng rằng các số lớp được phân bố một cách ngẫu nhiên trong tập các số nguyên dương, và như vậy sẽ rất có lý nếu khoảng một phần ba các số lớp này là bội của 3. Mặc các cố gắng của nhiều nhà toán học trong suốt 30 năm sau đó, câu trả lời cho các phỏng đoán đó vẫn còn bỏ ngỏ. Thế rồi năm 2016, cùng với hai cộng sự là Jordan Ellenberg và Craig Westerland, Venkatesh đã có một kết quả đột phá. Bằng cách tập trung vào một bài toán hẹp hơn là tìm hiểu số lớp của các vành số nguyên của các trường hàm thay vì của các vành các số nguyên, họ đã thu được một tiến bộ lớn trong việc tìm hiểu các phỏng đoán của Cohen và Lenstra.

Chiến lược của họ là chuyển bài toán sang một vấn đề khác nằm trong lĩnh vực tôpô, một chuyên ngành toán học nghiên cứu về hình dạng của các vật thể. Nhưng tôpô là một lĩnh vực quá rộng với quá nhiều công cụ. Vậy dùng các công cụ nào của ngành này? Và chính tại bước này thì sự hiểu biết sâu rộng của Venkatesh đã đóng vai trò quyết định, dẫn dắt anh và các cộng sự đến việc khai thác khái niệm *ổn định đồng điều* trong tôpô một khái niệm rất hiện đại và hiện vẫn đang là đối tượng của nhiều nghiên cứu mới.

Một lần nữa, ta lại thấy Akshay Venkatesh đã phối hợp hai ngành không có gì liên quan với nhau để vượt qua bài toán bị bế tắc trong suốt vài chục năm qua.

Một số giả thuyết trong chương trình Langlands

Như đã trình bày trong phần về Peter Scholze, chương trình Langlands là một "mạng lưới" các mối quan hệ giữa rất nhiều hiện tượng đến từ nhiều lĩnh vực Toán học rất khác nhau, trong đó có Tôpô, Giải tích, Đại số, và Lý thuyết số. Nhiều giả thuyết của chương trình này đã thúc đẩy Toán học phát triển trong thời gian qua và chắc chắn còn tiếp tục phát triển nữa trong tương lai.



Akshay Venkatesh trên giảng đường

Có lẽ, thí dụ tốt nhất là chứng minh định lý Fermat lớn vào đầu những năm 1990 do Andrew Wiles thực hiện, với sự đóng góp có tính quyết định vào thời gian cuối của Richard Taylor. Phương pháp Wiles–Taylor đã sử dụng trong các công trình của họ đã trở thành một công cụ mạnh kết nối các đối tượng hình học, được biết đến dưới tên gọi đường cong elliptic, với các đối tượng giải tích, được biết đến dưới tên gọi dạng modula. Đây chính là loại kết nối được dự đoán trong chương trình Langlands. Cho dù là rất mạnh nhưng phương pháp Wiles–Taylor nguyên gốc chỉ có thể được áp dụng cho một đối tượng hình học khá đặc biệt là các đa tạp Shimura. Trong một số hội thảo diễn ra trong thời gian mới đây giữa năm 2017 – 2018, Venkatesh đã làm cho giới Toán học ngạc nhiên khi anh đã đưa ra một số mở rộng của phương pháp Wiles–Taylor cho các đa tạp phi Shimura. Công cụ chính mà Venkatesh và các cộng sự của anh đã sử dụng, đến từ một số đối xứng bất ngờ của các *nhóm đồng điều* của những không gian đối xứng địa phương. Venkatesh đã đưa ra một số phát biểu về hình dung của anh nhằm giải thích các đối xứng này thông qua các đối đồng điều motivic.

Công trình của Venkatesh tuy chưa hoàn tất, nhưng người ta kỳ vọng nó sẽ là một bước bản lề trong nghiên cứu về chương trình Langlands.

Hầu hết những nhà Toán học đều được xếp vào một trong hai loại: những người giải quyết bài toán hoặc những người xây dựng lý thuyết. Akshay Venkatesh là trường hợp ngoại lệ: anh thuộc về cả hai loại trên. Hiện nay, anh chỉ mới hơn 36 tuổi, nên người ta có nhiều cơ sở để tin rằng anh sẽ còn đem lại cho Toán học nhiều khám phá mới mà chúng ta không thể dự đoán trước được.

Tài liệu tham khảo

1. http://www.icm2018.org/portal/en/about-icm-prizes
(Trang web chính thức của Đại hội Toán học Thế giới (ICM)).

2. https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals- 2018.
(Trang web chính thức của Liên đoàn Toán học Thế giới (IMU)).

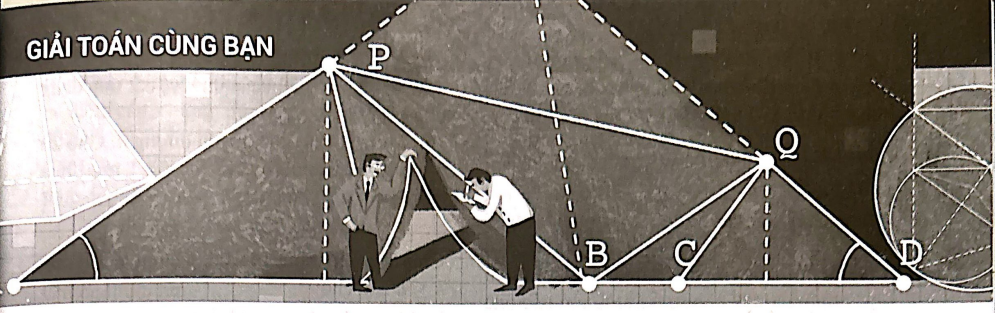
3. Những bài viết của Allyn Jackson trong trang web nói trên.

4. https://news.cnrs.fr/articles/alessio-figalli-fields-medal-2018
(Trang web tin tức của Trung tâm Nghiên cứu Khoa học Pháp (CNRS)).

5. https://www.quantamagazine.org/tag/2018-fields-medal-and- nevanlinna-prize-winners/
(Trang web của tạp chí Quanta Magazine).

6. https://plus.maths.org/content/test-1-0
Những bài viết liên quan đến Fields Medal 2018 trong trang web này. Và nhiều tài liệu hình ảnh trên Internet.

Nguồn ảnh: Internet



CÙNG TÌM LỜI GIẢI CHO BÀI P228

Trần Nam Dũng

Để bạn đọc tiện theo dõi, chúng tôi nhắc lại ở đây đề bài của bài P228 (đã được đăng tải trong mục "Thách thức kỳ này" của Chuyên mục "Thách thức toán học", Tạp chí Pi tập 2 số tháng 10.2018, trang 27).

P228. *Cho số nguyên $n > 1$. Cho n số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn điều kiện: mọi tổng có dạng*

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i, \text{ trong đó } \varepsilon_i \in \{-1;0;1\}, i = 1,2,\ldots,n,$$

đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}.$$

Như với mọi bài toán khác, *để giải được bài toán trên*, người giải bài không có con đường nào khác, ngoài con đường "*trước hết, cần tìm hiểu, phân tích các giả thiết của đề bài; rồi từ đó, xác định cách sử dụng có hiệu quả nhất (theo khả năng của mình) các thông tin thu được*".

Ở bài toán P228 nêu trên, giả thiết chỉ vỏn vẹn "$a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương đôi một khác nhau, và các tổng $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i \in \{-1;0;1\}$, cũng đôi một khác nhau". Vì thế, việc chúng ta cần làm, trước hết, là tìm cách khai thác đặc thù về dạng và tính đôi một khác nhau của các tổng vừa nêu.

Một cách tự nhiên, ta có nhận xét sau:

Nhận xét 1: Từ dạng của các tổng được xét, dễ dàng suy ra, k số đôi một phân biệt tùy ý $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, trong n số đã cho, cũng thỏa mãn điều kiện mà n số đó thỏa mãn; nghĩa là, ta cũng có *các tổng*

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{i_j} a_{i_j}, \text{ trong đó } \varepsilon_{i_j} \in \{-1;0;1\}, j = 1,2,\ldots,k,$$

đôi một khác nhau. (Bạn đọc hãy tự lý giải vì sao!)

Tiếp theo, ta thấy rằng, có tất cả 3^n tổng có dạng đã nêu trong đề bài (do $\varepsilon_i \in \{-1;0;1\}$, với mọi $i = 1,2,\ldots,n$), mỗi tổng là một số nguyên (do $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên), tổng lớn nhất là $\sum_{i=1}^{n} a_i$ (ứng với $\varepsilon_i = 1$, với mọi $i = 1,2,\ldots,n$), và tổng bé nhất là $-\sum_{i=1}^{n} a_i$ (ứng với $\varepsilon_i = -1$, với mọi $i = 1,2,\ldots,n$). Với những nhận xét đơn giản đó, xuất phát từ giả thiết các tổng đôi một khác nhau suy ra, khi xếp các tổng $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$ theo thứ tự tăng dần, ta sẽ thu được một dãy tăng thực sự, gồm 3^n số nguyên, bắt đầu từ số $-\sum_{i=1}^{n} a_i$, và kết thúc bởi số $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Vì thế, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \left(-\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geq 3^n - 1;$$

và do đó

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{3^n - 1}{2}.$$

Từ đây, theo Nhận xét 1 trên đây, ta sẽ có tổng của k số bất kỳ ($1 \le k \le n$), trong n số đã cho, luôn lớn hơn hoặc bằng $\dfrac{3^k-1}{2}$. Nói riêng, chúng ta có:

Nhận xét 2: Nếu giả sử $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ thì

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \ge \frac{3^k-1}{2},$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Theo đánh giá chủ quan của chúng tôi, khó có thể tìm được thêm những thông tin "có ích và lý thú" từ giả thiết của bài đã ra (còn bạn?). Vì thế, chúng ta dừng việc tìm hiểu, phân tích giả thiết của bài toán ở đây, và chuyển sang bước tiếp theo cần làm, để giải được bài toán: Tìm cách sử dụng có hiệu quả nhất các thông tin đã thu được.

Vì thông tin thu được (xem Nhận xét 2) đề cập đánh giá cho các tổng riêng của các số hạng thuộc dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nên một trong những điều ta có thể nghĩ đến, khi tìm tòi cách sử dụng thông tin đó, là công thức tổng Abel (hay còn được gọi là "biến đổi Abel"). Công thức đó được phát biểu như sau:

Công thức tổng Abel. Cho hai dãy số thực, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $n \ge 1$. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, đặt

$$A_k = a_1 + \cdots + a_k.$$

Khi đó, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n$$
$$= A_1 \cdot b_1 + \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k.$$

(Bạn đọc hãy tự chứng minh công thức trên.)[1]

Kết quả nêu trên thường được sử dụng khi ta cần tính hay đánh giá tổng

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

dựa trên thông tin về các tổng riêng $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Trước khi bàn thảo việc sử dụng công thức tổng Abel để giải bài P228, chúng tôi muốn bạn đọc tìm hiểu lời giải của hai bài toán dưới đây, để có khái niệm cần thiết về các ứng dụng của kết quả đó.

Bài toán 1. Cho số nguyên dương n. Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$, và $b_1, b_2, \ldots, b_n$, thỏa mãn:

$$1 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $k \le n$ sao cho

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \le |a_1 + a_2 + \cdots + a_k|.$$

• *Phân tích*. Ta thấy, vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh không phụ thuộc vào k, còn vế phải của bất đẳng thức đó phụ thuộc vào k. Do đó, về thực chất, yêu cầu chứng minh của đề bài tương đương với yêu cầu chứng minh bất đẳng thức sau:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \le A,$$

với A là số lớn nhất trong các số $|a_1|, |a_1 + a_2|, \ldots, |a_1 + \cdots + a_n|$ (hay còn có thể viết vắn tắt, bằng ký hiệu, như sau:

$$A = \max_{1 \le k \le n} |a_1 + \cdots + a_k|).$$

Từ đó, ta nghĩ đến việc sử dụng công thức tổng Abel, để tạo ra sự kết nối giữa tổng

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

và các tổng riêng $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \cdots + a_n$.

• *Lời giải*. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, đặt

$$A_k = a_1 + \cdots + a_k.$$

Ký hiệu $A = \max\limits_{1 \le k \le n} |a_1 + \cdots + a_k|$.

Theo công thức tổng Abel, ta có:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$
$$= A_1 (b_1 - b_2) + A_2 (b_2 - b_3) + \cdots +$$
$$+ A_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + A_n b_n.$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, và lưu ý tới giả thiết

$$1 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0,$$

ta được:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n|$$
$$\le |A_1| (b_1 - b_2) + |A_2| (b_2 - b_3) + \cdots +$$
$$+ |A_{n-1}| (b_{n-1} - b_n) + |A_n| b_n$$
$$\le A \cdot ((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + b_n)$$
$$= A \cdot b_1 \le A.$$

[1] *Yêu cầu chứng minh công thức tổng Abel là một câu hỏi trong Đề thi dành cho học sinh THPT của Olympic Toán học sinh viên và học sinh năm 2018 (xem Tạp chí Pi tập 2, số tháng 7.2018, trang 33) – BBT Tạp chí Pi.*

Bất đẳng thức vừa thu được, hiển nhiên, cho ta điều cần chứng minh theo yêu cầu của đề bài.

Bài toán 2. Cho số nguyên dương n. Cho n số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$, thỏa mãn điều kiện:

$$x_1 + \cdots + x_k \geq \sqrt{k},$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

• *Phân tích.* Để ý rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

chính là tổng có dạng

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

với $a_i = b_i = x_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Do đó, yêu cầu chứng minh đặt ra ở bài toán thuộc dạng yêu cầu chứng minh một đánh giá cho tổng

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

dựa trên thông tin về các tổng riêng

$$A_k = a_1 + \cdots + a_k = x_1 + \cdots + x_k, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nhận xét trên gợi ý cho ta sử dụng công thức tổng Abel để biểu diễn tổng

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

qua các tổng riêng A_k; từ đó, hy vọng, có thể tìm ra cách sử dụng giả thiết để dẫn tới đánh giá đề bài yêu cầu.

Theo công thức tổng Abel, ta có:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \\ &= A_1(x_1 - x_2) + A_2(x_2 - x_3) + \cdots + \\ &\quad + A_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + A_n x_n. \end{aligned}$$

Dễ thấy, từ đẳng thức trên, bằng cách sử dụng "thô" giả thiết $A_k \geq \sqrt{k}, k = 1, 2, \ldots, n$, ta sẽ có

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \\ &\geq \sqrt{1} \cdot (x_1 - x_2) + \sqrt{2} \cdot (x_2 - x_3) + \cdots + \\ &\quad + \sqrt{n-1} \cdot (x_{n-1} - x_n) + \sqrt{n} \cdot x_n \end{aligned}$$

nếu như ta có $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Tuy nhiên, điều "nếu như" này lại không có trong đề bài. Ta có thể "không mất tính tổng quát, giả sử có điều ấy" được chăng? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta cần hiểu "không mất tính tổng quát" nghĩa là gì? Trong trường hợp này, "không mất tính tổng quát" có nghĩa là: ta có "đặt tên" cho n số đã cho như thế nào đi chăng nữa (tức, có gọi số nào là x_1, số nào là $x_2, \ldots$, số nào là x_n đi chăng nữa), cũng không ảnh hưởng gì tới giả thiết và kết luận của bài toán. Với việc hiểu như thế, chúng ta thấy ngay câu trả lời cho câu hỏi đặt ra ở trên là "không được", do giá trị của tổng A_k phụ thuộc vào "tên gọi" của các số đã cho, và giả thiết $A_k \geq \sqrt{k}$ chỉ có đối với "tên gọi" ban đầu của các số ấy. Phải chăng, cần tìm cách khác để kết nối tổng

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

với các tổng riêng A_k?

Theo chúng tôi, trước khi chuyển hướng, ta nên suy nghĩ đôi chút về cách vượt qua "chướng ngại vật" nói trên; bởi, đâu phải con đường nào cũng bằng phẳng. Như ta đã thấy, một trong những "cái gồ ghề" trên con đường ta muốn đi chính là sự phụ thuộc của tổng A_k vào "tên gọi" của các số đã cho. Giá như ... giá như ... thay cho giả thiết $A_k \geq \sqrt{k}$ là giả thiết tổng của k số lớn nhất trong n số đã cho lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{k}$ nhỉ? Vì khi đó, ta sẽ có quyền giả sử có cái "nếu như" ở trên. A ... a ..., "ơn Giời, cậu đây rồi"! Từ giả thiết của bài toán, đương nhiên ta có giả thiết mong muốn, vì hiển nhiên A_k không thể vượt quá tổng của k số lớn nhất trong n số đã cho! Thế mà, nãy giờ ...

• *Lời giải.* Sắp xếp n số dương đã cho theo thứ tự từ lớn đến bé (hay nói một cách khác, sắp xếp n số dương đã cho thành một dãy không tăng), rồi lần lượt, từ trái qua phải, gọi các số đó là $y_1, y_2, \ldots, y_n$; khi đó, ta có

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n > 0, \quad (1)$$

và $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. (2)

(Nếu đã quen thuộc với khái niệm hoán vị, bạn có thể diễn đạt điều nêu trên, theo một cách khác, như sau: Xét hoán vị $y_1, y_2, \ldots, y_n$ của n số dương đã cho, thỏa mãn điều kiện (1). Khi đó, hiển nhiên ta có (2).)

Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$, đặt

$$B_k = y_1 + \cdots + y_k.$$

Hiển nhiên, ta có

$$B_k \geq x_1 + \cdots + x_k,$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$. Do đó, từ giả thiết của bài toán, suy ra

$$B_k \geq \sqrt{k}, \text{ với mọi } k = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Từ (2) suy ra, bất đẳng thức của bài ra sẽ được chứng minh, nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 > \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right). \quad (4)$$

Theo công thức tổng Abel, ta có:

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \\ &= B_1(y_1 - y_2) + B_2(y_2 - y_3) + \cdots + \\ &\quad + B_{n-1}(y_{n-1} - y_n) + B_n y_n. \end{aligned}$$

Kết hợp với (1) và (3), ta được:

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \\ &\geq \sqrt{1} \cdot (y_1 - y_2) + \sqrt{2} \cdot (y_2 - y_3) + \cdots + \\ &\quad + \sqrt{n-1} \cdot (y_{n-1} - y_n) + \sqrt{n} \cdot y_n \\ &= 1 \cdot y_1 + (\sqrt{2} - 1) y_2 + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) y_n \\ &= 1 \cdot B_1 + (\sqrt{2} - 1)(B_2 - B_1) + \cdots + \\ &\quad + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(B_n - B_{n-1}) \\ &= \left(1 - (\sqrt{2} - 1)\right) B_1 + \left((\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})\right) B_2 \\ &\quad + \cdots + \left((\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}) - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right) B_{n-1} \\ &\quad + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) B_n. \end{aligned}$$

Từ đó, do

$$\begin{aligned} & (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} > 0, \end{aligned}$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, nên ta có:

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \\ &\geq \left(1 - (\sqrt{2} - 1)\right) \cdot 1 + \left((\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})\right) \cdot \sqrt{2} + \\ &\quad + \cdots + \left((\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2}) - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right) \times \\ &\quad \times \sqrt{n-1} + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot \sqrt{n} \\ &= 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2. \quad (5) \end{aligned}$$

Vì

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} > \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, nên từ (5), ta được:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 > \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Bất đẳng thức (4) được chứng minh, và do đó, bất đẳng thức của bài ra được chứng minh.

Trở lại với bài P228.

Như trên đã nêu, do không mất tính tổng quát, có thể giả sử

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n, \quad (6)$$

nên xuất hiện ý tưởng giải bài đã ra, bằng cách sử dụng công thức tổng Abel, để tìm ra đánh giá cho tổng

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

dựa trên các đánh giá:

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \geq \frac{3^k - 1}{2}, \quad (7)$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rõ ràng, để thực hiện ý tưởng nêu trên, trước hết, cần viết lại tổng S dưới dạng:

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{a_1^2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2^2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{a_n^2}.$$

Từ đó, theo công thức tổng Abel, ta sẽ có:

$$\begin{aligned} S &= A_1 \cdot \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_3^2}\right) + \cdots + \\ &\quad + A_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}^2} - \frac{1}{a_n^2}\right) + A_n \cdot \frac{1}{a_n^2}. \end{aligned}$$

Kết hợp với (6) và (7), ta được:

$$\begin{aligned} S &\geq \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right) \cdot \frac{3^1 - 1}{2} + \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_3^2}\right) \cdot \frac{3^2 - 1}{2} \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}^2} - \frac{1}{a_n^2}\right) \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{2} + \frac{1}{a_n^2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{a_1^2} + 3 \cdot \frac{1}{a_2^2} + \cdots + 3^{n-2} \cdot \frac{1}{a_{n-1}^2} \\ &\quad + 3^{n-1} \cdot \frac{1}{a_n^2}. \quad (8) \end{aligned}$$

Nhưng bất đẳng thức (8) thì có gì liên quan? Ta cần chứng minh $S < \frac{3}{2}$ cơ mà? Tình hình xem ra có vẻ không ổn rồi! Tuy nhiên, bình tĩnh suy ngẫm một chút thôi, bạn sẽ thấy có một con đường (khá quen thuộc với các

fan của bất đẳng thức) có thể giúp ta thoát ra khỏi tình thế éo le này. Đó là, tìm một biểu thức $X > 0$ sao cho bằng cách nhân cả hai vế của (8) với X, ta sẽ có được một bất đẳng thức dạng

$$X \cdot S \geq Y \cdot S^m, \qquad (9)$$

trong đó, Y là một biểu thức nhận giá trị dương, và m là một số nguyên lớn hơn 1.

Với ý tưởng trên, quan sát biểu thức ở vế bên phải của (8), mà bạn không nghĩ tới việc chọn X để có thể dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz làm cầu nối, tạo ra bất đẳng thức dạng (9), mới là điều đáng bàn. Tóm lại là, ta sẽ làm như sau:

Từ (8), suy ra

$$\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\cdot S$$
$$\geq \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\left(1\cdot\frac{1}{a_1^2}+\right.$$
$$\left.3\cdot\frac{1}{a_2^2}+\cdots+3^{n-2}\cdot\frac{1}{a_{n-1}^2}+3^{n-1}\cdot\frac{1}{a_n^2}\right)\geq S^2.$$

Do đó, ta có:

$$S \leq 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3^n-1}{2.3^{n-1}}<\frac{3}{2}.$$

Như thế, chúng ta đã cùng tìm ra lời giải cho bài P228. Bạn hãy trình bày lại lời giải ấy.

Xem kỹ lại lời giải của bài toán 2 và của bài P228, ta thấy, có thể khái quát bước lập luận chính trong hai lời giải ấy, thành mệnh đề tổng quát sau:

Mệnh đề. Cho hai dãy số thực, $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ $(n \geq 1)$, thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$;

ii) $b_1 + \cdots + b_k \geq f(k)$, với mọi $k = 1,2,\ldots,n$; trong đó, $f(k)$ là một biểu thức cho trước nào đó của k.

Khi đó, ta có bất đẳng thức:

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$
$$\geq a_1\cdot f(1)+a_2\cdot(f(2)-f(1))+\cdots+$$
$$+a_n\cdot(f(n)-f(n-1)).$$

Công thức tổng Abel, cùng với mệnh đề trên, là một công cụ hiệu quả để đánh giá các tổng có dạng

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$

khi biết thông tin về các tổng riêng.

Để tìm hiểu thêm về cách áp dụng công thức tổng Abel, bạn đọc hãy tự giải một số bài toán sau.

Bài tập 1 (Bất đẳng thức Abel). Cho hai dãy số thực $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $(b_1,b_2\ldots,b_n)$. Với mỗi $k = 1,2,\ldots,n$, đặt:

$$B_k = b_1+\cdots+b_k.$$

Ký hiệu $m = \min\limits_{1\leq k\leq n} B_k$ và $M = \max\limits_{1\leq k\leq n} B_k$.

Chứng minh rằng, nếu

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$$

thì

$$a_1\cdot m \leq \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \leq a_1\cdot M.$$

Bài tập 2. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $0 < x < y \leq z \leq 1$;

ii) $3x+2y+z \leq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

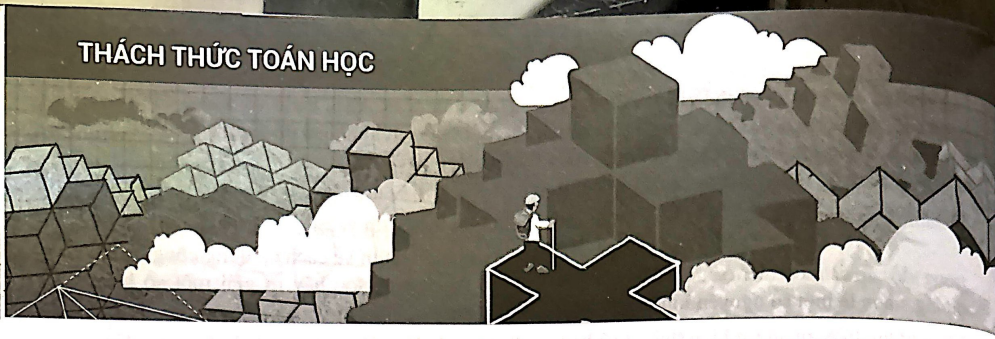
$$P = 3x^2+2y^2+z^2.$$

Bài tập 3 (Bất đẳng thức Karamata). Cho $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ và $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ là hai dãy số thực không tăng. Ta nói, dãy x *trội hơn* dãy y, và ký hiệu $x > y$, nếu có đồng thời các điều sau:

$$x_1 \geq y_1$$
$$x_1+x_2 \geq y_1+y_2$$
$$\cdots$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \geq y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n = y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+y_n.$$

Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}$, và lồi trên khoảng I; $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $b = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ là hai dãy số thực không tăng, mà dãy a trội hơn dãy b. Khi đó, ta có:

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)$$
$$\geq f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n).$$



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kỳ này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.
- Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của "Thách thức kỳ này" chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

Dành cho cấp THCS

P261. Cho H là trực tâm của tam giác nhọn ABC, $AH = 2$, $BH = 12$, $CH = 9$. Hãy tính diện tích của tam giác ABC.

I. Gorodnin (CH Belarus)

P262. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n+\sqrt{n}}\right].$$

($[x]$ kí hiệu phần nguyên của số thực x; tức, số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

Nhóm TTTH st.

P263. Cho a, b, c là các số nguyên sao cho $(ab+bc+ca+1)$ chia hết cho 5. Chứng minh rằng

$$abc(a+b+c+abc)$$

cũng chia hết cho 5.

Hà Duy Hưng (Hà Nội)

P264. Có 2019 quả cầu nhỏ, được làm bằng nhựa đặc; trên mỗi quả cầu có ghi một số nguyên dương không vượt quá 2019, và không có hai quả cầu nào mà trên đó được ghi cùng một số. Hỏi có tồn tại hay không số nguyên dương n, sao cho ta có thể xếp 2019 quả cầu nói trên vào n chiếc hộp, đảm bảo điều kiện sau được thỏa mãn: Trong mỗi hộp, ta đều thấy có một số (có thể là một) quả cầu, mà tổng tất cả các số được ghi trên các quả cầu đó bằng $\frac{5}{16}$ tổng tất cả các số được ghi trên các quả cầu còn lại, trong cùng hộp?

(*Lưu ý*: Tổng của một số là chính số đó.)

Hà Thanh (Cần Thơ)

Dành cho cấp THPT

P265. Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1, tương ứng, là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC và các cạnh BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1B_1 và đường tròn ngoại tiếp tam giác CB_1C_1, tương ứng, cắt lại đường thẳng BC tại điểm K (khác B) và tại điểm L (khác C). Chứng minh rằng, các đường thẳng LC_1, KB_1 và IA_1 đồng quy.

A. Voidelevich (CH Belarus)

P266. Cho hàm số f xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$, và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực $\alpha, \beta \in [0;1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) $|\alpha - \beta| = 0,1$;

2) $f(\alpha) = f(\beta)$.

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P267. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$;

ii) $a(b+c) > 0$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} \geq \sqrt{2}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Võ Quốc Bá Cẩn (Hà Nội)

P268. Hỏi có tồn tại hay không một dãy số thực $(a_n)_{n\geq 1}$ không tuần hoàn (từ bất kì số hạng nào), nhưng với mỗi số nguyên dương n, đều tồn tại số nguyên dương k sao cho

$$a_n = a_{n+tk},$$

với mọi số nguyên dương t.

Phùng Hồ Hải (Hà Nội) st.

P269. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên tố p và q, thỏa mãn

$$n = p\left(p^2 - p - 1\right) = q(2q+1).$$

Trần Song An (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P270. Xét hai tập con A, B hữu hạn, rời nhau của tập số nguyên dương $\mathbb{N}^*$, có tính chất: Với mỗi số k thuộc $A \cup B$, ít nhất một trong hai điều sau được thỏa mãn:

1) $k + 2019 \in A$;

2) $k - 19 \in B$.

Đặt $m = |A|$ và $n = |B|$. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của $\frac{m}{n}$.

($|X|$ kí hiệu số phần tử của tập hữu hạn X.)

Lê Huy (Nam Định)

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P204. Xét tập hợp A gồm các số nguyên dương, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) Số lớn nhất thuộc A là 100;

2) Với mỗi số x thuộc A, mà x không phải là số nhỏ nhất thuộc A, luôn tồn tại ba số a, b, c (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc A sao cho $x = a + b + c$.

Hỏi tập A có tối đa bao nhiêu phần tử?

Lời giải (*dựa theo ý tưởng giải của các bạn Đặng Đình Văn, lớp 9/11, trường THCS Tân Phú, Đồng Xoài, tỉnh Bình Phước, và Trần Nguyễn Nam Hưng, lớp 10 Toán, trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh*).

Xét tập A thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Giả sử tập A có n phần tử , và các phần tử của A là $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vì $100 \in A$ (theo giả thiết), và 100 không chia hết cho 3 nên từ giả thiết 2) suy ra phải có $n \geq 3$.

Không mất tổng quát, giả sử

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n. \quad (1)$$

Khi đó, theo giả thiết 1), $a_n = 100$. (2)

Với mỗi phần tử $a_k, 2 \leq k \leq n$, theo giả thiết 2), tồn tại các số a, b, c (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc A, sao cho

$$a_k = a + b + c; \quad (3)$$

và do (1) nên hiển nhiên phải có

$$a, b, c \in \{a_1; \ldots; a_{k-1}\}. \quad (4)$$

Từ đó, suy ra

$$a_2 = a_1 + a_1 + a_1 = 3a_1.$$

Giả sử, với mọi $k = 1, 2, \ldots, m$, với m là một số nguyên dương thỏa mãn $2 \leq m < n$, ta đã có $a_k = l_k \cdot a_1$, trong đó l_k là các số nguyên

dương lẻ.

Xét a_{m+1}. Theo (3) và (4), ta có

$$a_{m+1} = x + y + z, \qquad (5)$$

trong đó, x, y, z là các số (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc tập hợp $\{a_1; \ldots; a_m\}$.

Theo giả sử nêu trên, mỗi số x, y, z đều bằng một số lẻ lần a_1; do đó, từ (5) suy ra a_{m+1} cũng bằng một số lẻ lần a_1.

Vì vậy, theo nguyên lý quy nạp, với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, a_k bằng một số lẻ lần a_1. Nghĩa là, với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$a_k = l_k \cdot a_1,$$

trong đó, l_k là các số nguyên dương lẻ.

Do (1) và (2), ta có:

$$1 = l_1 < l_2 < \cdots < l_n,$$

và

$$100 = l_n a_1.$$

Từ đó suy ra, n không vượt quá số số lẻ trong phạm vi từ 1 đến l, với l là ước dương lẻ lớn nhất của 100; nghĩa là, ta có:

$$n \le \frac{l+1}{2}.$$

Từ đây, do ước lẻ lớn nhất của 100 là 25, ta được: $n \le 13$.

Hơn nữa, tập A gồm tất cả các số:

$$a_k = (2k-1) \cdot 4, \; k = 1, 2, \ldots, 13, \qquad (6)$$

là tập có 13 phần tử, và thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Thật vậy, theo (6), ta có:

$$4 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{13} = (2 \cdot 13 - 1) \cdot 4 = 100.$$

Như thế, số lớn nhất thuộc A là 100. Điều kiện 1) của đề bài được thỏa mãn.

Tiếp theo, với k là số nguyên dương tùy ý, mà $2 \le k \le 13$, ta có:

$$a_k = (2k-1) \cdot 4 = (2(k-1)-1) \cdot 4 + 4 + 4$$
$$= a_{k-1} + a_1 + a_1;$$

và điều này chứng tỏ tập A thỏa mãn điều kiện 2) của đề bài.

Vậy, tập A, thỏa mãn các điều kiện của đề bài, có tối đa 13 phần tử.

Bình luận và Nhận xét.

1. Tính chất đặc trưng của mối quan hệ giữa các số thuộc tập A, được chỉ ra trong lời giải trên đây, không phải là tính chất duy nhất, mà ta có thể dựa vào để tìm ra đánh giá cho số phần tử của tập hợp ấy. Tác giả bài toán và đa phần các bạn có lời giải gửi tới Tòa soạn đã chứng minh và sử dụng tính chất (khó thấy hơn) sau đây để tìm ra đánh giá cho số phần tử của tập A:

"Tất cả các phần tử của tập A đều là các số đồng dư với 4 theo modulo 8 (tức, chia 8 dư 4)."

Tính chất trên là một hệ quả của Nhận xét "Tất cả các phần tử của tập A đều là số chẵn", và của tính chất "chia 8 dư 4" của số 100.

Theo tính chất nêu trên, hiển nhiên ta có số phần tử của tập A không vượt quá số các số chia 8 dư 4, trong phạm vi từ 1 đến 100.

2. Dễ thấy, ở lời giải trên đây, khi thay 100 bởi N, với N là một số nguyên lớn hơn 2 cho trước, đồng thời bổ sung thêm đôi dòng xử lý trường hợp N chia hết cho 3 ("vì sao phải bổ sung?" là một câu hỏi dành cho các bạn), ta sẽ có lời giải cho bài toán khái quát, nhận được từ bài đã ra bằng cách thay 100 bởi N:

Bài toán khái quát 1. Cho số nguyên $N > 2$. Xét tập hợp A gồm các số nguyên dương, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1) A có ít nhất hai phần tử;

2) Số lớn nhất thuộc A là N;

3) Với mỗi số x thuộc A, mà x không phải là số nhỏ nhất thuộc A, luôn tồn tại ba số a, b, c (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc A, sao cho $x = a + b + c$.

Hỏi tập A có tối đa bao nhiêu phần tử?

(*Đáp số*: Viết N dưới dạng $N = 2^{\alpha} \cdot m$, trong đó, α là một số tự nhiên và m là một số lẻ. Tập A có tối đa $\frac{m+1}{2}$ phần tử)

3. Bằng cách thực hiện lần lượt tất cả các bước giải trong lời giải Bài toán khái quát 1, bạn sẽ thu được lời giải cho bài toán khái quát (ở mức cao hơn), nhận được từ bài đã ra bằng cách thay 3 bởi n, và đồng thời, thay 100 bởi N, trong đó, n và N là các số nguyên cho trước, thỏa mãn $N \ge n \ge 2$. Bài toán do bạn

Trần Nguyễn Nam Hưng đề xuất (và giải chưa chính xác).

Bài toán khái quát 2. *Cho các số nguyên n, N, thỏa mãn $N \geq n \geq 2$. Xét tập hợp A gồm các số nguyên dương, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

1) A có ít nhất hai phần tử;

2) Số lớn nhất thuộc A là N;

3) Với mỗi số x thuộc A, mà x không phải là số nhỏ nhất thuộc A, luôn tồn tại n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (không nhất thiết đôi một khác nhau) thuộc A, sao cho

$$x = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Hỏi tập A có tối đa bao nhiêu phần tử?

4. *Trong số các bạn đã gửi lời giải đến Tòa soạn, có một vài bạn tỏ ra chưa hiểu khái niệm tập hợp.* Điều này thể hiện qua việc các bạn đó cho rằng đề bài chưa rõ ràng, cần nêu rõ mỗi phần tử trong tập A được phép xuất hiện bao nhiêu lần, hoặc cho rằng, đề bài cần nói rõ tập A gồm các số nguyên dương đôi một khác nhau.

Lưu ý các bạn rằng, trong một tập hợp khác rỗng, mỗi phần tử chỉ được phép có mặt đúng một lần.

5. Trong số các bạn đã gửi lời giải đến Tòa soạn, có một số bạn tỏ ra chưa nắm được các bước cần thực hiện, khi giải các bài toán với yêu cầu tìm số tối đa (hoặc tối thiểu) các phần tử của một tập hợp hữu hạn. Cụ thể, trong lời giải của mình, các bạn đó chỉ đưa ra đánh giá cho số phần tử của tập A, mà không đề cập gì tới khả năng xảy ra dấu bằng ở đánh giá đó.

6. Tòa soạn đã nhận được nhiều lời giải cho bài toán, từ các bạn đọc thuộc nhiều vùng, miền khác nhau. Đây thực sự là một tín hiệu vui, dẫu rằng có tới $1/2$ số bạn có lời giải chưa đúng. Là một tín hiệu vui bởi vì theo quan điểm của những người chấm bài này, điều quan trọng là các bạn có ham muốn giải toán hay không, và khi có ham muốn, các bạn có chịu khó, mạnh dạn, kiên trì "tấn công" các bài toán (thực sự có chất toán) hay không; việc có lúc giải đúng, có lúc giải sai các bài toán nào đó, âu cũng là chuyện thường tình (và có thể thì mới phải học chứ, phải không các bạn?).

7. Các lời giải không được chấp nhận là lời giải đúng, mà Tòa soạn nhận được, đã mắc phải ít nhất một trong các lỗi sau:

– Đưa ra các đánh giá sai hoặc chưa chặt cho số phần tử của tập A, chẳng hạn, $|A| \leq 12$, hay $|A| \leq 25, \ldots$ (ở đây, $|X|$ kí hiệu số phần tử của tập hữu hạn X);

(*Người giải bài đã không phát hiện ra lỗi "chưa chặt" do đã bỏ qua bước kiểm tra khả năng xảy ra dấu bằng trong các đánh giá mà mình đưa ra.*)

– Nêu ra các lập luận mang tính cảm tính, mà không phải là các lập luận toán học chặt chẽ (chẳng hạn, "tập A có càng nhiều phần tử khi các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (theo kí hiệu đã sử dụng trong lời giải trên đây) càng bé", hay "tập A có nhiều phần tử nhất, khi các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ có giá trị nhỏ nhất", ...;

– Chỉ liệt kê các khẳng định, mà không chứng minh hoặc chứng minh hời hợt các khẳng định đó (chẳng hạn như "cứ thế tiếp tục ta sẽ có ...", mà các bước trình bày trước đó không cho thấy "cứ thế tiếp tục" nghĩa là phải làm gì, ...).

8. Hầu hết các bạn có lời giải đúng đều mô tả tập A có 13 phần tử bằng cách liệt kê tường minh các phần tử của tập hợp đó (mặc dù, qua lời giải của các bạn, có thể thấy các bạn hiểu rõ quy tắc sinh ra các phần tử ấy). Điều này làm cho việc kiểm tra tính thỏa mãn các điều kiện đề bài của tập A trở nên nặng nề, do buộc phải liệt kê toàn bộ kết quả kiểm tra việc thỏa mãn điều kiện 2) của từng phần tử. Để khắc phục sự nặng nề vừa nêu, tất cả các bạn đều dùng phép "dễ thấy". Vì số đông "dễ thấy" nên những người chấm bài này đành ... đồng ý là "dễ thấy"!

Lưu Thị Thanh Hà – Nguyễn Khắc Minh

Lời bàn.

Tính chất đặc trưng, được chỉ ra trong Lời giải trên đây, của mối quan hệ giữa các số thuộc tập A, mà ta đã dựa vào để đưa ra đánh giá cho số phần tử của tập hợp đó, là một tính

chất dễ nhận thấy. Vì thế, nếu bạn gặp khó khăn trong việc giải bài đã ra thì phần nhiều là do bạn chưa biết phải làm gì, phải bắt đầu từ đâu để giải bài toán. Thông thường, để giải các bài toán với yêu cầu đánh giá số phần tử của một tập hợp, khi biết một số thông tin nào đó, được cho trong đề bài, về các phần tử của tập hợp ấy, trước hết, người ta tìm hiểu, phân tích, tìm cách khai thác các thông tin đã được cho (tức, các giả thiết của bài toán), để tìm ra những thông tin mới về các phần tử (chẳng hạn như tìm cách định dạng các phần tử, hay đánh giá độ lớn của các phần tử (trong trường hợp các phần tử là các số), ...), về quan hệ tương đối giữa các phần tử, rồi với mỗi thông tin được tìm ra, người ta xem xét, kiểm tra khả năng sử dụng nó cho việc tìm ra đánh giá cho số phần tử của tập hợp đang xét. Các bài toán dễ hơn cả, thuộc loại này, là các bài toán mà chỉ cần tìm hiểu, khai thác sơ bộ giả thiết của bài toán đã có thể tìm ra các thông tin cần thiết, giúp ta có được đánh giá cho số phần tử của tập hợp được xét. Những bài toán khó hơn cả là những bài toán, mà để tìm ra được các thông tin mới cần thiết, người ta cần tìm hiểu, phân tích, khai thác giả thiết của bài toán theo một định hướng xác định, được hình thành từ việc nhìn nhận, đánh giá tổng quan về tình huống đã đặt ra (chẳng hạn, căn cứ vào thế (kiểu) của tình huống được đặt ra, xác định các cách có thể tìm ra đánh giá cho số phần tử của tập hợp đang xét, ...), hoặc là những bài toán, mà phải phân tích, khai thác giả thiết một cách khéo léo, tế nhị, ... mới có thể tìm ra các thông tin cần thiết, ...

Với cách nhìn nhận như trên, Nhóm TTTH cho rằng, xét về mức độ khó – dễ, bài đã ra là một bài toán ở mức độ trung bình dễ, giúp các bạn học sinh (không chỉ ở cấp THCS) hình thành hoặc rèn luyện tư duy logic, củng cố hoặc mở rộng hiểu biết về cách tiếp cận một loại tình huống toán học có thể gặp trong quá trình học toán, ...

Nhóm TTTH

P228. Cho số nguyên $n > 1$. Cho n số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn điều kiện: mọi tổng có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i, \text{ trong đó } \varepsilon_i \in \{-1;0;1\}, i = 1, 2, \ldots, n,$$

đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}.$$

Lời giải. *Xem bài viết "Cùng tìm lời giải cho bài P228", được đăng tải trong Chuyên mục Giải toán cùng bạn, của số Tạp chí này (trang 17 – 21).*

Bình luận và Nhận xét.

Cho tới thời điểm bản thảo lên trang, Tòa soạn chỉ nhận được đúng một lời giải cho bài toán, từ một bạn học sinh lớp 10 chuyên Toán. Đó là một lời giải đúng, và không theo hướng của lời giải được tìm ra trong bài viết vừa nêu trên. "Điểm tựa" cho lời giải nói trên là công thức:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$
$$= a_1\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2}\right) + (a_1 + a_2)\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_3^2}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\left(\frac{1}{a_{n-1}^2} - \frac{1}{a_n^2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\frac{1}{a_n^2}$$

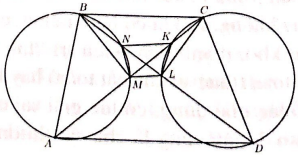
Người giải bài đã chứng minh công thức trên bằng phương pháp tổ hợp (đếm số lượt xuất hiện của đơn thức $\frac{a_i}{a_j^2}$ ở hai vế).

Việc lấy công thức trên làm "điểm tựa" đã làm cho lời giải vừa phức tạp, vừa thiếu tự nhiên (tại sao lại nghĩ đến đẳng thức nói trên?).

Nhóm TTTH

P231. Cho hình thang $ABCD$, với BC và AD là các cạnh đáy. Đường tròn đường kính AB cắt các đường chéo AC và BD tương ứng tại M và N. Đường tròn đường kính CD cắt các đường chéo AC và BD tương ứng tại K và L. Chứng minh rằng $NK \parallel ML$.

Lời giải (*của Hà Minh Thơ, Phú Thọ*).



Do M và L, tương ứng, nằm trên đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính CD nên

$$BM \perp AC \text{ và } CL \perp BD;$$

suy ra

$$\angle BMC = \angle BLC = 90^\circ.$$

Do đó, M, L nằm trên đường tròn đường kính BC. (1)

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được N, K nằm trên đường tròn đường kính AD. (2)

Từ (1) và (2), kết hợp với giả thiết K, M nằm trên đường chéo AC, và L, N nằm trên đường chéo BD, suy ra: N nằm giữa B và L; L nằm giữa N và D; K nằm giữa C và M; M nằm giữa K và A. Do đó:

– Từ (2), ta có:

$$\angle NKM = \angle NKA = \angle NDA = \angle BDA. \quad (3)$$

– Từ (1), ta có:

$$\angle KML = \angle CML = \angle CBL = \angle CBD. \quad (4)$$

Vì $ABCD$ là hình thang, có BC và AD là các cạnh đáy (theo giả thiết) nên $BC \parallel AD$; suy ra

$$\angle CBD = \angle BDA.$$

Vì thế, từ (3) và (4), ta được:

$$\angle NKM = \angle KML.$$

Do đó, $NK \parallel ML$. Ta có điều phải chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Ngoài cách giải nêu trên, bài đã ra còn có thể được giải bằng cách sử dụng định lý Thales đảo.

2. Một số bạn đã giải bài toán trong trường hợp một trong bốn giao điểm M, N, K, L nằm ở phần kéo dài của các đoạn thẳng AC, BD. Tất cả các lời giải này cho thấy, người giải bài *chưa nắm được một khái niệm rất cơ bản của Hình học – khái niệm "đường chéo của một đa giác"*. Với việc hiểu đúng khái niệm vừa nêu, tất cả các lời giải đó đều không phải là lời giải cho bài đã ra, và vì thế, không được chấp nhận là lời giải đúng.

Chúng tôi xin nhắc lại *khái niệm đường chéo của một đa giác*: "Đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau của một đa giác được gọi là *đường chéo* của đa giác đó."

3. Lời giải trên đây cho thấy bài đã ra là một bài toán thuộc hàng cơ bản, và ở mức độ trung bình, xét về độ khó – dễ. Vì thế, những người chấm bài này rất băn khoăn, không lý giải được vì sao số bạn đọc gửi lời giải tới Tòa soạn không nhiều (chỉ có 9 bạn, trên phạm vi toàn quốc).

Trần Quang Hùng – Hà Minh Thơ

P232. Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}.$$

Lời giải.

Cách 1 (*dựa theo lời giải của bạn Đặng Đình Văn, lớp 9/11, trường THCS Tân Phú, Đồng Xoài, tỉnh Bình Phước*).

Điều kiện xác định của phương trình:

$$x \geq \sqrt[3]{2}. \quad (1.1)$$

Với điều kiện nêu trên, phương trình đã cho có thể được viết lại dưới dạng tương đương:

$$(\sqrt[3]{x^2-1}-2)+(x-3) = \sqrt{x^3-2}-5. \quad (1.2)$$

Do (1.1) nên $x^2-1>0$ và $x^3-2 \geq 0$; suy ra

$$\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+4\sqrt[3]{x^2-1}+4 \neq 0,$$

và

$$\sqrt{x^2-2}+5 \neq 0.$$

Vì thế, ta có:

$$(1.2) \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+4\sqrt[3]{x^2-1}+4} + (x-3) = \frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+4\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1\right) = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+4\sqrt[3]{x^2-1}+4}+1 = \dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}. \end{array}\right. \quad (1.3)$$

Vì $3 > \sqrt[3]{2}$ nên $x=3$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Xét phương trình (1.3).

Kí hiệu VT và VP, tương ứng, là biểu thức ở vế trái và ở vế phải của (1.3).

Để ý rằng, với x thỏa mãn (1.1), ta có $x^2-1>0$, và

$$\begin{aligned}&\left(x^2-1\right)^2\\&=(x-1)^2(x+1)^2\\&>(x-1)^2(x+1)>(x-1)^3.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}+4\sqrt[3]{x^2-1}+4\\&>\sqrt[3]{(x-1)^3}+4=x+3>0.\end{aligned}$$

Suy ra

$$VT<\frac{x+3}{x+3}+1=2. \qquad (1.4)$$

Mặt khác, theo bất dẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân (bất dẳng thức Cauchy), ta có:

$$\sqrt{x^3-2}<\sqrt{x^3}\le\frac{x^2+x}{2}.$$

Từ đó, với lưu ý x thỏa mãn (1.1), ta có:

$$\begin{aligned}VP&>\frac{x^2+3x+9}{\frac{x^2+x}{2}+5}=\frac{2\left(x^2+3x+9\right)}{x^2+x+10}\\&=2+\frac{2(2x-1)}{x^2+x+10}>2. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Từ (1.4) và (1.5), hiển nhiên suy ra phương trình (1.3) vô nghiệm.

Vậy, tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

<u>**Cách 2**</u> (*dựa theo lời giải của bạn Phạm Công Tài, lớp 11T, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh*).

Điều kiện xác định của phương trình:

$$x\ge\sqrt[3]{2}. \qquad (2.1)$$

• Bằng kiểm tra trực tiếp, dễ thấy $x=3$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

• Xét $x>3$.

Ta sẽ chứng minh:

$$\sqrt[3]{x^2-1}<x-1; \qquad (2.2)$$

và

$$2x-1<\sqrt{x^3-2}. \qquad (2.3)$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}(2.2)&\Leftrightarrow x^2-1<(x-1)^3\\&\Leftrightarrow 0<x(x-1)(x-3). \qquad (2.4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.3)&\Leftrightarrow (2x-1)^2<x^3-2\\&\Leftrightarrow 0<(x-3)(x^2-x+1). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Vì $x>3$ và $x^2-x+1>0$, với mọi x, nên (2.4) và (2.5) là các bất đẳng thức đúng. Vì thế, (2.2) và (2.3) được chứng minh.

Từ đó, ta có:

$$\sqrt[3]{x^2-1}+x<(x-1)+x=2x-1<\sqrt{x^3-2}.$$

Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm (tức, không có nghiệm) trên khoảng $(3;+\infty)$.

• Xét $\sqrt[3]{2}\le x<3$.

Bằng cách hoàn toàn tương tự trên, ta chứng minh được:

$$\sqrt[3]{x^2-1}>x-1 \quad \text{và} \quad 2x-1>\sqrt{x^3-2}.$$

Từ đó, ta có:

$$\sqrt[3]{x^2-1}+x>(x-1)+x=2x-1>\sqrt{x^3-2}.$$

Do đó, phương trình đã cho vô nghiệm trên khoảng $\left[\sqrt[3]{2};3\right)$.

• Vậy, tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Phương trình trong bài ra có chứa các căn thức với bậc khác nhau và các biểu thức bậc cao. Vì thế, rất khó có thể giải phương trình đó bằng các phép đặt ẩn phụ, hoặc nâng lên lũy thừa. Trong các tình huống như vậy, ta có thể sử dụng phương pháp "nhân lượng liên hợp" (nhằm khử căn thức), để biến đổi phương trình, như các bạn đã thấy trong lời giải Cách 1 trên đây.

2. Ngoại trừ bạn *Phạm Công Tài*, tất cả các bạn còn lại, trong số các bạn đã gửi lời giải tới Tòa soạn, đều sử dụng phương pháp vừa nêu trên để giải bài toán. Và trong số này, bạn *Đặng Đình Văn* là người tìm ra các đánh giá gọn và đẹp nhất.

3. Ở một số lời giải, trong số các lời giải Tòa soạn nhận được, người giải bài chỉ nêu ra các đánh giá mà không chứng minh, tuy rằng các đánh giá đó là không dễ thấy. Tất cả các lời

giải này đều không được chấp nhận là lời giải đúng.

Võ Quốc Bá Cẩn

Lời bàn.

Qua xem xét các lời giải của bạn đọc cho bài P232 trên đây, chúng tôi nhận thấy một điều muốn lưu ý bạn đọc. Đó là, trong một số lời giải, người giải bài có những diễn đạt chưa chuẩn xác về mặt toán học; chẳng hạn, có bạn đã viết rằng "nếu $x > 3$ thì phương trình ... vô nghiệm". Theo chúng tôi, diễn đạt như thế sẽ tạo nên một sự lơ mơ trong tiềm thức về khái niệm phương trình và nghiệm của phương trình. Sự lơ mơ này có thể này sẽ làm cho bạn bị rối trong suy nghĩ, khi phải xử lý các phương trình có chứa tham số; nó có thể gây ra sự nhầm lẫn giữa ẩn số và tham số, trong suy nghĩ của bạn, ... Với diễn đạt được trích dẫn ở trên, các bạn nên thay nó bởi "phương trình ... vô nghiệm trên khoảng $(3;+\infty)$" (nghĩa là, trên toàn bộ khoảng đó không có một số nào là nghiệm của phương trình), hoặc "tất cả các giá trị $x > 3$ đều không phải là nghiệm của phương trình ...".

Nhóm TTTH

P233. Cặp số nguyên dương (a,b) được gọi là *cặp cân bằng* nếu hai số nguyên dương a,b có cùng tập ước nguyên tố.

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $(n,n+6)$ là cặp cân bằng.

2) Chứng minh rằng cặp số nguyên dương $(a+2^k, b+2^k)$ là cặp cân bằng với mọi số nguyên dương k khi và chỉ khi $a=b$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Quang Minh , St. Joseph Institution, Singapore*).

Trước hết, ta chứng minh hai kết quả sau đây:

Bổ đề 1. Tất cả các nghiệm tự nhiên của phương trình

$$3^x - 1 = 2^y$$

là $(x,y)=(1,1)$ và $(x,y)=(2,3)$.

Chứng minh. Dễ thấy, phương trình đã cho không có nghiệm tự nhiên dạng $(a,0)$, với a là số tự nhiên.

Với $y=1$, dễ thấy, ta có $x=1$.

Xét $y \geq 2$. Khi đó, 2^y chia hết cho 4. Do đó, $3^x - 1$ chia hết cho 4. Suy ra, x là số chẵn.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng tương đương:

$$\left(3^{\frac{x}{2}} - 1\right)\left(3^{\frac{x}{2}} + 1\right) = 2^y.$$

Từ đó, vì x là số chẵn nên suy ra

$$3^{\frac{x}{2}} - 1 = 2^m \quad \text{và} \quad 3^{\frac{x}{2}} + 1 = 2^n,$$

với m,n là các số tự nhiên.

Ta có, $2^n - 2^m = 2$. Do đó, phải có $m=1$, $n=2$. Suy ra, $x=2$, kéo theo $y=3$.

Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy các cặp số $(x,y)=(1,1)$ và $(x,y)=(2,3)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2. Tất cả các nghiệm tự nhiên của phương trình

$$3^x + 1 = 2^y$$

là $(x,y)=(0,1)$ và $(x,y)=(1,2)$.

Chứng minh. Với $x=0$, dễ thấy, ta có $y=1$.

Xét $x \geq 1$. Khi đó, do $2^y - 1 = 3^x$, nên $2^y - 1$ chia hết cho 3. Suy ra, y là số chẵn.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng tương đương:

$$\left(2^{\frac{y}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{y}{2}} + 1\right) = 3^x.$$

Từ đó, vì y là số chẵn nên suy ra

$$2^{\frac{y}{2}} - 1 = 3^m \quad \text{và} \quad 2^{\frac{y}{2}} + 1 = 3^n,$$

với m,n là các số tự nhiên.

Ta có, $3^n - 3^m = 2$. Do đó, phải có $m=0$, $n=1$. Suy ra, $y=2$, kéo theo $x=1$.

Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy các cặp số $(x,y)=(0,1)$ và $(x,y)=(1,2)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán.

1) Giả sử n là số nguyên dương, sao cho $(n,n+6)$ là cặp cân bằng (tức, n và $n+6$ có cùng tập ước nguyên tố). Dễ thấy, ta có $n>1$.

Xét ước nguyên tố p tùy ý của n. Khi đó, do p cũng là ước của $n+6$ nên suy ra p là ước nguyên tố của 6. Do đó, $p \in \{2;3\}$.

Như vậy, n và $n+6$ chỉ có thể có hai ước nguyên tố là 2, 3; nghĩa là, n và $n+6$ có dạng:

$$n = 2^a \cdot 3^b \quad \text{và} \quad n+6 = 2^c \cdot 3^d,$$

trong đó, a, b, c, d là các số tự nhiên.

Ta có:

$$2^c \cdot 3^d - 2^a \cdot 3^b = 6. \qquad (1)$$

– Nếu $a = 0$ thì $c = 0$ (do n và $n+6$ có cùng tập ước nguyên tố). Vì thế, trong trường hợp này, ta có

$$3^d - 3^b = 6;$$

do đó, $d > b$, và

$$3^b(3^{d-b} - 1) = 6.$$

Suy ra, $b = 1$; dẫn tới, $n = 3$.

– Nếu $d = 0$ thì $b = 0$. Vì thế, trong trường hợp này, ta có

$$2^c - 2^a = 6;$$

do đó, $c > a$, và

$$2^a(2^{c-a} - 1) = 6.$$

Suy ra, $a = 1$; dẫn tới, $n = 2$.

– Xét $a, d > 0$. Khi đó, $b, c > 0$ (do n và $n+6$ có cùng tập ước nguyên tố).

Từ (1), ta có:

$$2^{c-1} \cdot 3^{d-1} - 2^{a-1} \cdot 3^{b-1} = 1. \qquad (2)$$

Từ đó suy ra, phải có ít nhất một trong hai số a, c bằng 1, và đồng thời, ít nhất một trong hai số b, d bằng 1. Hơn nữa, vì $n+6 \geq 7$ nên không thể có $c = d = 1$. Vì vậy, chỉ có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

+ $a = b = 1$. Ta được $n = 6$.

+ $a = d = 1$. Khi đó, từ (2), ta có:

$$2^{c-1} - 3^{b-1} = 1.$$

Vì thế, theo Bổ đề 2, $(b-1) \in \{0; 1\}$; hay, $b \in \{1; 2\}$. Do vậy, $n \in \{6; 18\}$.

+ $c = b = 1$. Khi đó, từ (2), ta có:

$$3^{d-1} - 2^{a-1} = 1.$$

Vì thế, theo Bổ đề 1, $(a-1) \in \{1; 3\}$; hay, $a \in \{2; 4\}$. Do vậy, $n \in \{12; 48\}$.

Như vậy, tóm lại, ta có:

$$n \in \{2; 3; 6; 12; 18; 48\}.$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, tất cả các giá trị n thuộc tập nêu trên thỏa mãn yêu cầu đề bài; và vì thế, chúng là tất cả các giá trị n cần tìm.

2) Xét a, b là các số nguyên dương, sao cho $(a+2^k, b+2^k)$ là cặp cân bằng với mọi số nguyên dương k.

Giả sử $a \neq b$.

Với mỗi số nguyên dương k, xét ước nguyên tố p tùy ý của $a+2^k$. Do $(a+2^k, b+2^k)$ là cặp cân bằng nên p cũng là ước nguyên tố của $b+2^k$. Do đó, p là ước nguyên tố của $(a-b)$. Vì điều này đúng cho số nguyên dương k tùy ý, và cho ước nguyên tố p tùy ý của $a+2^k$, nên suy ra, với mỗi số nguyên dương k, tất cả các ước nguyên tố của $a+2^k$ đều thuộc tập các ước nguyên tố của $(a-b)$. Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_t$ là tất cả các ước nguyên tố đôi một phân biệt của $(a-b)$.

Xét t số nguyên dương $a(2^i - 1)$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Vì t số nguyên dương vừa nêu trên chỉ có hữu hạn ước nguyên tố đôi một phân biệt, nên tồn tại số nguyên dương m sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, p_i^m *không* là ước của bất cứ số nào trong t số nguyên dương đó.

Gọi k_0 là số nguyên dương sao cho với mọi số nguyên dương $k \geq k_0$, ta đều có:

$$a + 2^k > p_1^m p_2^m \ldots p_t^m. \qquad (3)$$

Theo chứng minh trên, các ước nguyên tố của $t+1$ số $a+2^s$, $s = k_0, k_0+1, \ldots, k_0+t$, đều thuộc tập hợp $\{p_1; p_2; \ldots; p_t\}$. Vì thế, từ (3) suy ra, với mỗi $s = k_0, k_0+1, \ldots, k_0+t$, tồn tại chỉ số j, với $1 \leq j \leq t$, sao cho $a+2^s$ chia hết cho p_j^m. Có $t+1$ số, nhưng chỉ có tối đa t chỉ số j, đôi một khác nhau, có tính chất như vừa nêu, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số có chung một chỉ số như vậy. Nghĩa là, tồn tại hai số $a+2^{k_1}, a+2^{k_2}, k_0 \leq k_1 < k_2 \leq k_0+t$ và số $h, 1 \leq h \leq t$, sao cho

$$a + 2^{k_1} \equiv a + 2^{k_2} \equiv 0 \pmod{p_h^m}.$$

Từ đó, ta có:

$$a\left(2^{k_2-k_1} - 1\right) = a \cdot 2^{k_2-k_1} - a$$
$$\equiv \left(-2^{k_1}\right) \cdot 2^{k_2-k_1} - a = -\left(a + 2^{k_2}\right)$$
$$\equiv 0 \pmod{p_h^m}. \qquad (4)$$

Mặt khác, do $1 \le h \le t$, và

$$1 \le k_2 - k_1 \le (k_0 + t) - k_0 = t,$$

nên theo định nghĩa số m, ta có:

$$a\left(2^{k_2-k_1} - 1\right) \not\equiv 0 (\bmod p_h^m). \quad (5)$$

Mâu thuẫn giữa (4) và (5) cho thấy, "giả sử $a \ne b$" ở trên là sai; nghĩa là, phải có $a = b$.

Ngược lại, với $a = b$, hiển nhiên, $\left(a + 2^k, b + 2^k\right)$ là cặp cân bằng với mọi số nguyên dương k.

Vì vậy, ta có điều phải chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Cho đến thời điểm bản thảo lên trang, Toà soạn chỉ nhận được duy nhất lời giải của bạn *Nguyễn Quang Minh* (và là lời giải đúng). Có lẽ, điều gây khó khăn cho các bạn là câu hỏi 2) của bài đã ra. Lời giải nêu trên cho thấy, điểm mấu chốt để giải quyết được câu hỏi ấy là kết quả "*tập các ước nguyên tố của các số có dạng $a + 2^k$ là tập vô hạn*", hay nói cách khác, "*có vô hạn số nguyên tố p, mà mỗi số đều là ước của ít nhất một số có dạng $a + 2^k$*". Để ý kĩ chứng minh của kết quả vừa nêu, được trình bày trong lời giải trên đây, bạn sẽ thấy kết quả đó có thể được tìm ra, dựa trên các lập luận của Euclid trong chứng minh tính vô hạn của tập các số nguyên tố.

2. Câu hỏi 2) của bài đã ra liên quan đến một *giả thuyết của Erdos–Woods*, nói rằng, *tồn tại một số nguyên dương N nào đó, sao cho nếu $(a + i, b + i)$ là cặp cân bằng với mọi $i = 1, 2, \ldots, N$, thì $a = b$.*

Câu hỏi 2) nói trên là một kết quả mà tác giả bài toán tìm ra, khi tìm hiểu giả thuyết nêu trên, trong trường hợp thay i bởi số có dạng 2^k.

3. Người ta đã chứng minh được rằng, *tồn tại vô số cặp cân bằng (a, b), với $a \ne b$, sao cho $(a + 1, b + 1)$ cũng là cặp cân bằng.*

Chứng minh kết quả vừa nêu trên không quá khó, và các bạn đọc có quan tâm có thể thử sức mình bằng cách tự chứng minh kết quả đó.

Hà Duy Hưng

Lời bàn.

Theo đánh giá chủ quan của chúng tôi, câu hỏi 2) của bài đã ra là một bài toán rất khó đối với các bạn học sinh không chỉ ở cấp THCS, mặc dù các kết quả cần sử dụng để giải được câu hỏi đó chỉ ở mức THCS. Tuy thế, chúng tôi vẫn đưa câu hỏi đó ra "thách thức" bạn đọc, vì hy vọng rằng, khi đọc, tìm hiểu lời giải đáp cho câu hỏi đó nói riêng, và cho toàn bài toán nói chung, bạn đọc sẽ học hỏi được nhiều điều hữu ích cho việc học toán của mình.

Nhóm TTTH

P234. Người ta điền vào mỗi ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 11×11 một số thực, sao cho tích của tất cả các số trong một bảng con bất kỳ kích thước 5×5 bằng tích của tất cả các số trong một bảng con bất kỳ kích thước 6×6.

Hỏi có tồn tại hay không một cách điền số thỏa mãn điều kiện nêu trên, sao cho tích của tất cả các số trong bảng 11×11 bằng 2018?

Lời giải (*của người chấm bài*).

Câu trả lời là "Có".

Thật vậy, xét cách điền số vào bảng như sau:

a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a

trong đó, a và b là các số thực có tích bằng 1.

Bằng quan sát trực tiếp, ta thấy:

– Ở mỗi cột của một bảng con 5×5 tùy ý, đều có hai số a, hai số b, và một số 1. Vì thế, tích của tất cả các số trong mỗi bảng con 5×5 bằng 1.

– Ở mỗi hàng của một bảng con 6×6 tùy ý, đều có hoặc ba số a và ba số b, hoặc sáu số 1.

Vì thế, tích của tất cả các số trong mỗi bảng con 6×6 bằng 1.

Từ đó, ta có tích của tất cả các số trong một bảng con 5×5 bất kỳ bằng tích của tất cả các số trong một bảng con 6×6 bất kỳ. Nghĩa là, cách điền số nêu trên thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Tiếp theo, xét 10 cột đầu tiên của bảng (tính từ trái qua phải). 10 cột này sẽ tạo thành một bảng con 11×10 (bảng gồm 11 hàng và 10 cột), mà tích của các số trong mỗi hàng bằng 1 (do ở mỗi hàng đều có hoặc năm số a và năm số b, hoặc 10 số 1). Vì thế, tích của tất cả các số nằm ở 10 cột đầu tiên bằng 1.

Với cột thứ 11 của bảng, do trong cột này có năm số a, bốn số b, và hai số 1, nên tích của tất cả các số trong cột bằng a.

Từ đó suy ra, tích của tất cả các số trong bảng bằng a. Vì thế, chọn $a = 2018$ (và lúc này, b sẽ là $\frac{1}{2018}$), ta sẽ có một cách điền số vào bảng 11×11 thỏa mãn điều kiện đề bài, và tích của tất cả các số trong bảng bằng 2018.

Bình luận và Nhận xét.

1. Theo nhìn nhận chủ quan của người chấm bài, việc tìm ra cách điền số như ở lời giải trên đây không hẳn là khó. Bằng cách xét các bảng con 5×5, 6×6 có chung hàng, chung cột, hoặc bao nhau, chúng ta có thể tìm ra những ràng buộc đối với các số cần điền, giúp tìm ra cách điền cần thiết. Vì khuôn khổ của Tạp chí, chúng tôi không thể trình bày ở đây các phương án "mò tìm" đã thực hiện, để có được cách điền trong lời giải trên.

2. Cho tới thời điểm bản thảo phải lên trang, Tòa soạn chỉ nhận được đúng một lời giải, từ người đề xuất bài toán, và đó là một lời giải đúng.

3. Trộm nghĩ, *nếu bài toán yêu cầu chứng minh tồn tại một cách điền số thì rất có thể Tòa soạn đã nhận được không ít lời giải, từ bạn đọc*. Bởi lẽ, rất có thể các bạn đã dự đoán sai câu trả lời. Do đã từng gặp rất nhiều bài toán với câu hỏi "có tồn tại hay không ...", "có hay không ...", và ở đa phần các bài toán đó, câu trả lời là "không tồn tại", "không có", nên rất có thể vì thế mà dần dần các bạn đã mặc định (một cách vô thức) rằng, với những bài toán "có hay không" thì câu trả lời gần như tất yếu phải là "không"! Phải chăng là như thế?

4. Rất có thể sẽ không đến nỗi buồn tẻ, chán ngắt, nếu như vào những lúc rảnh rỗi nào đó, các bạn thử nghĩ xem, kết quả bài toán sẽ thay đổi thế nào, nếu thay bảng 11×11 bởi bảng $(2n+1) \times (2n+1)$, và đồng thời, thay các bảng con 5×5, 6×6 bởi các bảng con $n \times n$, $(n+1) \times (n+1)$?

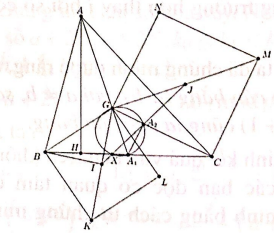
(Khi $n = 1$, với các ràng buộc đã nêu trong bài ra, ta chỉ có thể điền các số vào bảng sao cho tích của tất cả các số trong bảng 3×3 bằng 0 hoặc bằng 1. Khi $n = 2$, cách điền số đã mô tả trong Lời giải trên đây thỏa mãn các ràng buộc đặt ra, nhưng với cách điền đó, tích tất cả các số trong bảng 5×5 sẽ luôn bằng 1....)

Hà Thanh

P235. Cho tam giác không cân ABC. Gọi A_1 là trung điểm cạnh BC, và gọi G là trọng tâm của tam giác đó. Trong nửa mặt phẳng bờ BG không chứa A, lấy các điểm K, L sao cho $GBKL$ là một hình vuông. Trong nửa mặt phẳng bờ CG không chứa B, lấy các điểm M, N sao cho $GCMN$ là một hình vuông. Gọi A_2 là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của hai hình vuông vừa nêu. Đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1A_2G cắt lại cạnh BC tại điểm thứ hai X (khác A_1).

Hãy tính tỷ số $\frac{A_1X}{XH}$, trong đó, H là chân đường cao xuất phát từ A của tam giác ABC.

Lời giải (*của những người chấm bài*).



Gọi I và J, theo thứ tự, là tâm của các hình

vuông $GBKL$ và $GCMN$. Ta có:

$$\frac{GI}{GB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{GJ}{GC}, \quad (1)$$

và

$$\angle BGI = \angle CGJ = 45^\circ. \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử các đỉnh của tam giác ABC được đặt tên theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó, đỉnh C sẽ nằm ở bên trái đường thẳng AB, nhìn theo hướng từ A đến B; do đó, từ giả thiết về vị trí của các hình vuông $GBKL$ và $GCMN$, suy ra I nằm bên trái tia GB, và J nằm bên trái tia GC.

Xét phép biến hình H, là tích của phép quay tâm G, góc quay 45°, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, và phép vị tự tâm G, tỉ số $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Khi đó, từ (1) và (2), với lưu ý tới vị trí tương đối của I, J, như đã nêu trên, suy ra tam giác IGJ là ảnh của tam giác BGC qua phép biến hình H. Mà A_2 là trung điểm của IJ, và A_1 là trung điểm của BC (theo giả thiết), nên suy ra GA_2 là ảnh của GA_1 qua H. Do đó, ta có:

$$\angle A_1GA_2 = 45^\circ \quad \text{và} \quad \frac{GA_2}{GA_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kết hợp với (1) và (2), suy ra $\Delta BGI \sim \Delta A_1GA_2$. Mà BGI là tam giác vuông tại I, nên A_1GA_2 là tam giác vuông tại A_2. Do đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1A_2G là đường tròn đường kính GA_1. Suy ra, $GX \perp BC$. Mà $AH \perp BC$ (theo giả thiết), nên $GX \parallel AH$. Vì thế, theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{A_1X}{XH} = \frac{A_1G}{GA} = \frac{1}{2}$$

(do G là trọng tâm tam giác ABC, theo giả thiết).

Bình luận và Nhận xét.

1. Theo đánh giá chủ quan của những người chấm bài này, bài đã ra là một bài toán cơ bản và hay, giúp các bạn học sinh ôn tập các kiến thức cơ bản về phép biến hình (phép đồng dạng, phép vị tự, phép quay), và các ứng dụng của chúng trong giải toán hình học.

2. Có thể thấy, hình được cho trong đề bài có cấu trúc đơn giản và rõ ràng (rất dễ dàng xác định được vị trí tương đối của các điểm, các đường trong hình, khi biết các đỉnh của tam giác ABC được đặt tên theo chiều nào (chiều ngược chiều kim đồng hồ, hay chiều kim đồng hồ)). Vì thế, việc sử dụng các công cụ mạnh, như vectơ hay góc định hướng, để giải bài đã ra (như một số bạn đọc đã làm) thực sự là một sự "lãng phí" kiến thức.

3. Khi sử dụng phép vị tự quay, một số bạn, trong số các bạn đã gửi lời giải tới Tòa soạn, đã "quên" việc phải xác định chiều quay. Vì đây là một bài toán với cấu hình đơn giản nên lỗi vừa nêu được châm chước, khi đánh giá tính đúng – sai của các lời giải.

4. Theo ý kiến của thầy Hạ Vũ Anh, với cấu hình đã cho trong bài ra, ta có thể chứng minh được một số kết quả thú vị sau:

- **Kết quả 1.** Các điểm I, X, A_2, J thẳng hàng.
- **Kết quả 2.** Các đường thẳng BC, KM và LN đồng quy; gọi Y là giao điểm của ba đường thẳng vừa nêu, ta có $GY \perp KM$.

Việc chứng minh hai kết quả vừa nêu trên xin được dành cho bạn đọc.

5. Có thể thấy, bài đã ra có "họ hàng" không xa với bài toán quen thuộc sau:

Bài toán. Cho hai đường tròn, (O_1) và (O_2), cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Một đường thẳng đi qua B cắt lại (O_1) và (O_2) tương ứng, tại M và N. Chứng minh rằng, tam giác AMN đồng dạng với tam giác AO_1O_2.

Hạ Vũ Anh – Hà Minh Thơ

P236. Trong mặt phẳng, cho hai đường thẳng a và c song song với nhau. Xét đường thẳng b song song với hai đường thẳng a, c, và nằm trong dải tạo bởi hai đường thẳng đó. Dựng tam giác ABC, với $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ sao cho $\angle ABC = 60^\circ$ và $BA = k \cdot BC$, trong đó, k là một hằng số cho trước, thuộc khoảng (0; 2).

1) Với B là một điểm cho trước trên b, hỏi có thể dựng được bao nhiêu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện nêu trên?

2) Chứng minh rằng diện tích của tam giác dựng được chỉ phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng b. Với mỗi đường thẳng b, ký hiệu S_b là diện tích của mỗi tam giác dựng được. Hãy xác định vị trí của b để S_b đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Kí hiệu $d(X,l)$ là khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng l, và $d(u,v)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song u,v.

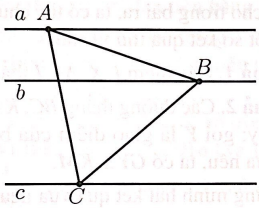
Đặt $h = d(a,c)$, và $x = d(a,b)$.

• Trước hết, ta giải bài đã ra, với giả thiết $k = 1$.

Lúc này, tam giác ABC cần dựng là tam giác đều.

1) Giả sử đã dựng được tam giác đều ABC, với B là một điểm cho trước trên $b, A \in a$, và $C \in c$. Xảy ra:

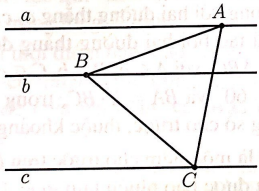
– *Trường hợp 1*: $(BA,BC) = 60°$.



Trong trường hợp này, do ABC là tam giác đều nên C là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc quay $+60°$. Vì thế, do $A \in a$ nên C thuộc đường thẳng a_1, là ảnh của a qua phép quay nói trên. Từ đây, do $C \in c$, suy ra, C là giao điểm của a_1 và c.

Với điểm C đã được xác định, do $A \in a$ và $\angle ABC = 60°$ nên A là giao điểm của a và đường thẳng đi qua B, tạo với đường thẳng BC góc $60°$.

– *Trường hợp 2*: $(BA,BC) = -60°$.



Lập luận hoàn toàn tương tự trên, ta sẽ có:

+ C là giao điểm của a_2 và c, trong đó, a_2 là ảnh của đường thẳng a qua phép quay tâm B, góc quay $-60°$.

+ A là giao điểm của a và đường thẳng đi qua B, tạo với đường thẳng BC góc $60°$.

Từ việc phân tích nêu trên, ta có cách dựng tam giác đều ABC, khi biết vị trí điểm B, như sau:

– Dựng đường thẳng a_1, là ảnh của đường thẳng a qua phép quay tâm B, góc quay $+60°$. Vì $a \parallel c$ và $a_1 \nparallel a$ nên a_1 sẽ cắt c tại một điểm, gọi là C.

– Dựng đường thẳng d đi qua B và tạo với đường thẳng BC góc $60°$. Vì $b \parallel a$ và d cắt b (tại B, do $B \in b$) nên d sẽ cắt a tại một điểm, gọi là A.

– Dựng đường thẳng a_2, là ảnh của đường thẳng a qua phép quay tâm B, góc quay $-60°$. Vì $a \parallel c$ và $a_2 \nparallel a$ nên a_2 sẽ cắt c tại một điểm, gọi là C'.

– Dựng đường thẳng d' đi qua B và tạo với đường thẳng BC' góc $60°$. Vì $b \parallel a$ và d cắt b (tại B, do $B \in b$) nên d' sẽ cắt a tại một điểm, gọi là A'.

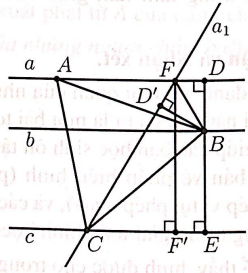
Theo cách dựng trên, dễ dàng chứng minh được ABC và $A'BC'$ là các tam giác đều.

Vậy, với mỗi điểm B cho trước trên đường thẳng b, ta dựng được hai tam giác đều ABC.

2) Dễ thấy hai tam giác đều ABC dựng được ở 1) là hai tam giác bằng nhau. Vì thế, chúng có diện tích bằng nhau. Do đó, để tính diện tích của mỗi tam giác đều ABC dựng được, ta chỉ cần xét một tam giác tùy ý, trong hai tam giác đó.

Xét tam giác đều ABC mà C là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc quay $+60°$.

Theo giả thiết, h là một hằng số, và x thay đổi trong khoảng $(0;h)$.



Gọi D và E, tương ứng, là chân đường vuông góc hạ từ B xuống a và c; do $a \parallel c$ nên D,B,E thẳng hàng. Ta có $BD = x$ và $DE = h$.

Gọi D' là ảnh của D qua phép quay tâm B, góc quay $+60°$. Ta có:

$$BD = BD', \quad (1)$$

$$\angle DBD' = 60^o. \quad (2)$$

Gọi F là giao điểm của đường thẳng CD' và a; F' là chân đường vuông góc hạ từ F xuống c. Hiển nhiên có $FF' = DE = h$.

Từ định nghĩa điểm D' và cách dựng điểm C, suy ra CD' là ảnh của a qua phép quay tâm B, góc quay $+60°$. Vì thế:

– $\angle FCF' = 60°$;

– Từ $BD \perp a$ suy ra $BD' \perp CF$. (3)

Vì ABC là tam giác đều nên

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}BC^2. \quad (4)$$

Từ (1) và (3) suy ra $\Delta BDF = \Delta BD'F$. Kéo theo BF là phân giác góc $\angle DBD'$; kết hợp với (2), suy ra $\angle FBD = 30°$.

Xét các tam giác vuông BDF và FCF', ta được:

$$FD = BD \cdot \tan\angle FBD = x \cdot \tan 30^o = \frac{x}{\sqrt{3}};$$

$$CF' = FF' \cdot \cot\angle FCF' = h \cdot \cot 60^o = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Do đó

$$CE = CF' + F'E = CF' + FD$$
$$= \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(h+x).$$

Suy ra

$$BC^2 = CE^2 + BE^2 = \frac{1}{3}(h+x)^2 + (h-x)^2$$
$$= \frac{4}{3}\left(x^2 - xh + h^2\right).$$

Kết hợp với (4) ta được:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x^2 - xh + h^2\right).$$

Suy ra, diện tích tam giác ABC chỉ phụ thuộc vào x, và

$$\min_{0<x<h} S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \min_{0<x<h}\left(x^2 - xh + h^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}h^2,$$

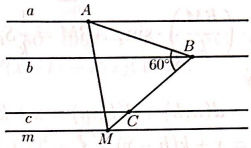
đạt được khi và chỉ $x = \frac{h}{2}$.

Vậy, diện tích S_b của mỗi tam giác đều ABC dựng được chỉ phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng b, và diện tích đó đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi b cách đều hai đường thẳng a, c.

• Bây giờ, ta giải bài đã ra, với giả thiết **$k \in (0;2)$ và $k \neq 1$.**

1) Với B là một điểm cho trước trên b, giả sử đã dựng được tam giác ABC, với $A \in a$, $C \in c$, $\angle ABC = 60°$ và $BA = k \cdot BC$.

Trên tia BC, lấy điểm M sao cho $BM = k \cdot BC$. Khi đó, ABM là tam giác đều.



Vì $b \parallel c$ nên theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{d(M,b)}{d(b,c)} = \frac{BM}{BC} = k.$$

Do đó, M nằm trên đường thẳng m, song song với b, cách b một khoảng bằng $k \cdot d(b,c)$, và nằm trong nửa mặt phẳng bờ b chứa c.

Từ đó, suy ra cách dựng tam giác ABC, khi biết vị trí điểm B, như sau:

– Trong nửa mặt phẳng bờ b chứa c, dựng đường thẳng $m \parallel b$ và $d(m,b) = k \cdot d(b,c)$;

– Dựng tam giác đều ABM, với $A \in a$ và $M \in m$ (theo cách dựng ở trường hợp $k = 1$);

– Lấy C là giao điểm của đường thẳng BM và c.

Vì chỉ dựng được duy nhất đường thẳng m, với đường thẳng m dựng được, ta dựng được đúng hai tam giác đều ABM (theo kết quả trường hợp $k = 1$), và với mỗi tam giác ABM, ta xác định được đúng một điểm C, nên suy ra với mỗi điểm B cho trước trên b, luôn dựng được đúng hai tam giác ABC.

Từ cách dựng trên, dễ dàng chứng minh được cả hai tam giác ABC dựng được đều thỏa mãn các điều kiện đề bài.

Vậy, với mỗi điểm B cho trước trên đường thẳng b, ta dựng được đúng hai tam giác thỏa mãn các điều kiện đề bài.

2) Dễ thấy hai tam giác ABC dựng được ở 1) là hai tam giác bằng nhau. Vì thế, chúng có

diện tích bằng nhau. Do đó, để tính diện tích của mỗi tam giác ABC dựng được, ta chỉ cần xét một tam giác tùy ý, trong hai tam giác đó.

Theo giả thiết, k, h là các hằng số, và x thay đổi trong khoảng $(0;h)$.

Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}BA \cdot \left(\frac{BM}{k}\right) \cdot \sin\angle ABM = \frac{1}{k}S_{ABM}. \quad (5)$$

Với lưu ý

$$d(a,m) = d(a,b) + d(b,m) = x + k \cdot d(b,c) = x + k(h-x),$$

theo kết quả tính toán ở trường hợp $k = 1$, ta có:

$$S_{ABM} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x^2 - x \cdot d(a,m) + (d(a,m))^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x^2 - x(x + k \cdot (h-x)) + (x + k \cdot (h-x))^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left((k^2-k+1)x^2 - k(2k-1)hx + k^2h^2\right).$$

Kết hợp với (5), ta được:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3k}\left((k^2-k+1)x^2 - k(2k-1)hx + k^2h^2\right).$$

Suy ra, diện tích tam giác ABC chỉ phụ thuộc vào x, và

$$\min_{0<x<h} S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{3k} \cdot \min_{0<x<h}\left((k^2-k+1)x^2 - k(2k-1)hx + k^2h^2\right).$$

Vì

$$f(x) = (k^2-k+1)x^2 - k(2k-1)hx + k^2h^2$$

là một hàm bậc hai (của biến x), và $k^2 - k + 1 > 0$, nên tồn tại $\min_{0<x<h} f(x)$ khi và chỉ khi

$$0 < \frac{k(2k-1)h}{2(k^2-k+1)} < h,$$

hay

$$0 < \frac{k(2k-1)}{k^2-k+1} < 2, \quad (6)$$

và khi đó $f(x)$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$$x_0 = \frac{k(2k-1)h}{2(k^2-k+1)}. \quad (7)$$

Ta có:

$$(6) \Leftrightarrow 0 < k(2k-1) < 2(k^2-k+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < k < 2.$$

Vậy, diện tích S_b của mỗi tam giác ABC dựng được chỉ phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng b, và

– nếu $\frac{1}{2} < k < 2$ và $k \neq 1$, thì diện tích đó đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(a,b) = x_0$, trong đó x_0 được xác định ở (7);

– nếu $0 < k \leq \frac{1}{2}$ thì diện tích đó không có giá trị nhỏ nhất.

• **Tóm lại**, với k là số thực cho trước thuộc khoảng $(0;2)$, ta có:

1) Với mỗi điểm B thuộc đường thẳng b, ta dựng được đúng hai tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện đề bài.

2) Diện tích của tam giác dựng được chỉ phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng b; và với mỗi đường thẳng b, ký hiệu S_b là diện tích của mỗi tam giác dựng được, ta có:

– Nếu $0 < k \leq \frac{1}{2}$ thì không có vị trí nào của b trong dải tạo bởi hai đường thẳng song song a, c, sao cho S_b đạt giá trị nhỏ nhất;

– Nếu $\frac{1}{2} < k < 2$ thì S_b đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi b nằm cách a một khoảng bằng x_0, với x_0 là giá trị được xác định ở (7).

(*Lưu ý*: Khi $k = 1$ thì $x_0 = \frac{h}{2}$.)

Bình luận và Nhận xét.

1. Bài toán dựng tam giác đều có đỉnh nằm trên ba đường thẳng đôi một song song cho trước là một bài toán khá quen thuộc, một minh họa đẹp cho ứng dụng của phép quay.

2. Phép dựng tam giác ABC với $k \neq 1$ cũng khá tự nhiên, dựa vào nhận xét tam giác ABC là ảnh của tam giác đều ABM (M thuộc tia BC) qua phép vị tự tâm B, tỷ số k.

3. Cho đến thời điểm bản thảo lên trang, Tòa soạn chỉ nhận được đúng một lời giải, từ một

bạn học sinh cấp THPT. Rất tiếc, lời giải đó không đúng, do người giải bài đã cho rằng, đường thẳng m (được định nghĩa trong lời giải trên) là một đường thẳng cố định, và vì thế, trong trường hợp $k \neq 1$, bạn đó đã áp dụng kết quả thu được ở trường hợp $k = 1$, để khẳng định S_b đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi b nằm ở vị trí sao cho $d(b,a) = k \cdot d(b,c)$ (theo kí hiệu trong lời giải trên).

(Lưu ý rằng, khi đường thẳng b thay đổi thì đường thẳng m cũng thay đổi, do luôn có $d(b,m) = k \cdot d(b,c)$. Vì thế, không thể áp dụng kết quả thu được đối với giá trị nhỏ nhất của S_b ở trường hợp $k = 1$, cho trường hợp $k \neq 1$ (do ở trường hợp $k = 1$, ta có c là một đường thẳng cố định).)

4. Bài toán sẽ trọn vẹn hơn nếu chỉ xét k trong khoảng $\left(\frac{1}{2};2\right)$, bởi khi đó sẽ luôn tồn tại vị trí của đường thẳng b để S_b đạt giá trị nhỏ nhất.

Trần Nam Dũng

P237. Giả sử $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_{2018}(x)$ là 2018 đa thức với hệ số nguyên, khác hằng, và thỏa mãn điều kiện: Với mỗi số nguyên n, tồn tại chỉ số $i \in \{1;2;\ldots;2018\}$ sao cho phương trình

$$P_i(x) = n$$

có nghiệm hữu tỷ.

Chứng minh rằng, trong 2018 đa thức nói trên, có ít nhất một đa thức bậc nhất.

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*).

Trước hết, ta chứng minh hai kết quả sau:

Bổ đề 1. Giả sử $P(x)$ là một đa thức khác hằng, với hệ số thực. Khi đó, tồn tại số thực $\alpha > 0$ sao cho $P(x)$ đơn điệu thực sự trên mỗi khoảng $(-\infty;-\alpha), (\alpha;+\infty)$.

Chứng minh. Trường hợp đa thức $P'(x)$ không có nghiệm thực, lấy α là một số thực dương tùy ý, ta có điều cần chứng minh.

Trường hợp đa thức $P'(x)$ có nghiệm thực, chọn số thực $\alpha > 0$ sao cho mọi nghiệm thực của $P'(x)$ đều nằm trong đoạn $[-\alpha;\alpha]$ (số α như thế tồn tại, vì $P'(x)$ chỉ có hữu hạn nghiệm thực). Khi đó, hiển nhiên, $P'(x)$ sẽ không đổi dấu trên mỗi khoảng $(-\infty;-\alpha), (\alpha;+\infty)$. Do đó, $P(x)$ đơn điệu thực sự trên mỗi khoảng đó.

Bổ đề 2. Giả sử $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực, có bậc không nhỏ hơn 2. Khi đó, với mọi số thực $t \neq 0$, ta có:

$$\lim_{|x|\to+\infty} |P(x+t) - P(x)| = +\infty.$$

Chứng minh. Giả sử:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\ a_n \neq 0,\ n \geq 2.$$

Với mỗi số thực $t \neq 0$, xét đa thức $Q(x) = P(x+t) - P(x)$; ta có:

$$\begin{aligned}
&Q(x)\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i (x+t)^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\\
&= a_n\left((x+t)^n - x^n\right) + a_{n-1}\left((x+t)^{n-1} - x^{n-1}\right)\\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} a_i\left((x+t)^i - x^i\right)\\
&= a_n \sum_{i=1}^{n} C_n^i x^{n-i} t^i + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i x^{n-1-i} t^i\\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2} a_i\left((x+t)^i - x^i\right)\\
&= a_n C_n^1 x^{n-1} t + R(x) = n a_n t x^{n-1} + R(x),
\end{aligned}$$

trong đó, $R(x)$ là một đa thức có bậc không vượt quá $n-2$.

Do $n a_n t \neq 0$, nên $\deg Q(x) = n-1 \geq 1$ (do $n \geq 2$). Vì thế, ta có:

$$\lim_{|x|\to+\infty} |Q(x)| = +\infty.$$

Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Giả sử phản chứng rằng, $\deg P_i \geq 2$, với mọi $i = 1,2,\ldots,2018$.

Với mỗi $i = 1,2,\ldots,2018$, gọi c_i là hệ số cao nhất của đa thức $P_i(x)$.

Đặt $t = \min\limits_{1\leq i\leq 2018} \frac{1}{c_i^2}$. Theo các bổ đề trên, với mỗi $i = 1,2,\ldots,2018$, tồn tại $\alpha_i > 0$ sao cho $P_i(x)$ đơn điệu thực sự trên mỗi khoảng $(-\infty;-\alpha_i), (\alpha_i;+\infty)$ và đồng thời

$$|P_i(x+t) - P_i(x)| \geq 2 \cdot 2018 + 1, \quad (1)$$

với mọi x mà $|x| > \alpha_i$.

Vì với mỗi $i = 1,2,\ldots,2018$, $|P_i(x)|$ là hàm liên tục trên đoạn $[-\alpha_i;\alpha_i]$ nên nó đạt giá trị lớn nhất trên đoạn đó. Đặt:

$$M_i = \max_{-\alpha_i \le x \le \alpha_i} |P_i(x)|, \text{ và } L = \max_{1 \le i \le 2018} M_i. \quad (2)$$

Lấy số nguyên $k > L$ tùy ý. Khi đó, theo giả thiết, với mỗi số nguyên

$$n \in A = \{k+1; k+2; \ldots; k+2\cdot 2018+1\},$$

tồn tại chỉ số $i_n \in \{1;2;\ldots;2018\}$, sao cho phương trình $P_{i_n}(x) = n$ có nghiệm hữu tỉ.

Do có tất cả $2\cdot 2018+1$ số i_n, mà trong đó chỉ có tối đa 2018 số đôi một khác nhau, nên theo nguyên lý Dirichlet, phải tồn tại ba số có cùng giá trị; nói cách khác, tồn tại ba số đôi một phân biệt n_1, n_2, n_3 thuộc A, sao cho $i_{n_1} = i_{n_2} = i_{n_3}$. Đặt $s = i_{n_1} = i_{n_2} = i_{n_3}$.

Gọi x_j là nghiệm hữu tỉ của phương trình $P_s(x) = n_j, j = 1,2,3$. Vì n_1, n_2, n_3 đôi một phân biệt nên x_1, x_2, x_3 cũng đôi một phân biệt.

Do với mọi $j = 1,2,3, n_j > k > L$, nên từ (2) suy ra, $x_j \notin [-\alpha_s;\alpha_s]$, với mọi $j = 1,2,3$. Do đó, $x_j \ne 0$, với mọi $j = 1,2,3$. Vì thế, theo nguyên lý Dirichlet, trong ba số x_1, x_2, x_3, phải có hai số cùng dấu. Giả sử hai số đó có cùng dấu dương (trường hợp hai số có cùng dấu âm được xét tương tự). Khi đó, không mất tổng quát, giả sử $x_1 > x_2 > 0$.

Theo chứng minh trên, $x_1, x_2 \notin [-\alpha_s;\alpha_s]$; do đó, từ $x_1 > x_2 > 0$ suy ra $x_1 > x_2 > \alpha_s$.

Vì x_1, x_2 là các số hữu tỉ nên

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{p_2}{q_2},$$

trong đó, p_1, q_1, p_2, q_2 là các số nguyên dương, và $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = 1$.

Vì $x_1 = \dfrac{p_1}{q_1} > x_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ nên $p_1q_2 > p_2q_1$. Suy ra

$$p_1q_2 - p_2q_1 \ge 1. \quad (3)$$

Vì $\dfrac{p_j}{q_j}, j = 1,2$, là nghiệm của đa thức $P_s(x) - n_j$, khác hằng, với hệ số nguyên, và có hệ số cao nhất bằng c_s, nên $q_j, j = 1,2$, là ước dương của c_s. Do đó, $q_j \le |c_s|, j = 1,2$.

Từ đây và (3), ta được

$$x_1 - x_2 = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{q_1q_2} \ge \frac{1}{c_s^2} \ge t;$$

suy ra, $\alpha_s < x_2 < x_2 + t \le x_1$. Vì thế, theo (1), và lưu ý $P_s(x)$ đơn điệu thực sự trên $(\alpha_i;+\infty)$, ta có:

$$2\cdot 2018 + 1 \le |P_s(x_2+t) - P_s(x_2)|$$
$$\le |P_s(x_1) - P_s(x_2)| = |n_1 - n_2| \le 2\cdot 2018,$$

là điều vô lý. Điều vô lý này cho thấy giả sử phản chứng ở trên là sai, và vì vậy, ta có điều đề bài yêu cầu chứng minh; đó là, trong 2018 đa thức $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_{2018}(x)$, thỏa mãn điều kiện đề bài, có ít nhất một đa thức bậc nhất.

Bình luận và Nhận xét.

1. Đây là một bài toán khó đối với học sinh THPT.

2. Cho tới thời điểm bản thảo lên trang, Tòa soạn chỉ nhận được đúng một lời giải từ bạn đọc. Tiếc rằng, lời giải đó là lời giải không đúng!

Nguyễn Duy Thái Sơn

Lời bàn.

Tác giả của bài toán P237 là một cựu thành viên của Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự IMO 2014 và IMO 2015, bạn Nguyễn Thế Hoàn. Việc "nhìn ra" hướng giải cho bài toán đó, theo chúng tôi, không hẳn là việc khó, nếu bạn đã đọc và hiểu bài viết "Đồ thị của đa thức", đăng tải trên Tạp chí Pi tập 1, số tháng 8.2017 (trang 15 – 18), của một cựu thành viên Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự IMO 1986, GS. TSKH. Phùng Hồ Hải.

Nhóm TTTH

P238. Tìm tất cả các số thực a và tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) Với mọi số thực x, y, ta luôn có:

$$a \cdot f(x) - x \le a \cdot f(f(y)) - y;$$

2) Tồn tại số thực x_0 sao cho $f(x_0) = x_0$.

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Chu Thị Thanh, lớp 11T, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc*).

Giả sử a và $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tương ứng, là số thực và hàm số thỏa mãn các điều kiện của đề bài; nghĩa là, ta có:

$$a\cdot f(x)-x\le a\cdot f(f(y))-y, \qquad (1)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$; và tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x_0)=x_0. \qquad (2)$$

Khi đó, trong (1), chọn $x=f(y)$, ta được:

$$f(y)\ge y \quad \forall y\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

Trong (1), chọn $x=x_0$, với x_0 là số thực thỏa mãn (2), ta được:

$$a\cdot x_0-x_0\le a\cdot f(f(y))-y \quad \forall y\in\mathbb{R}. \qquad (4)$$

Theo (3), ta có:

$$f(f(y))\ge f(y)\ge y \quad \forall y\in\mathbb{R};$$

do đó, nếu $a<0$ thì

$$a\cdot f(f(y))\le a\cdot y \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (4), ta được:

$$a\cdot x_0-x_0\le a\cdot y-y \quad \forall y\in\mathbb{R};$$

suy ra

$$(a-1)(x_0-y)\le 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

Từ đó, chọn $y=x_0+1$, ta được:

$$(a-1)(-1)\le 0,$$

là điều vô lý, do $a-1<0$.

Điều vô lý nhận được ở trên cho thấy phải có $a\ge 0$. Vì thế, từ (3), ta có:

$$a\cdot x\le a\cdot f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R};$$

suy ra

$$a\cdot x-x\le a\cdot f(x)-x \quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Trong (1), chọn $y=x_0$, với x_0 là số thực thỏa mãn (2), ta được:

$$a\cdot f(x)-x\le a\cdot x_0-x_0 \quad \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$

Kết hợp với (5), suy ra

$$a\cdot x-x\le a\cdot x_0-x_0 \quad \forall x\in\mathbb{R};$$

dẫn tới

$$(a-1)(x-x_0)\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Dễ thấy, bất đẳng thức vừa nhận được chỉ đúng khi $a-1=0$, hay $a=1$.

Với $a=1$, theo (6), ta có:

$$f(x)-x\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

hay

$$f(x)\le x \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (3), suy ra $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Bằng cách thử trực tiếp, dễ thấy, $a=1$ và $f(x)=x$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Vậy, có duy nhất giá trị a và duy nhất hàm số f thỏa mãn yêu cầu đề bài, là giá trị a và hàm số f vừa nêu trên.

Bình luận và Nhận xét.

1. Khi khai thác điều kiện 1) của đề bài, việc chọn $x=f(y)$ hay $x=x_0$, $y=x_0$ để tận dụng được điều kiện 2), rõ ràng là những thao *tác tự nhiên và hữu ích.*

2. Có vô số hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện 1), với $a=1$, tức là, có vô số hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$f(x)-x\le f(f(y))-y$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Thật vậy, với mỗi số thực $\alpha>0$, xét hàm $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, được cho bởi công thức

$$f_\alpha(x)=x+\alpha.$$

Dễ thấy, tất cả các hàm f_α thỏa mãn bất đẳng thức vừa nêu trên, với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Tuy nhiên, rõ ràng, tất cả các hàm f_α đều không thỏa mãn điều kiện 2).

Những điều nêu trên cho thấy sự cần thiết của điều kiện 2), trong việc xác định các cặp (a,f) thỏa mãn điều kiện 1).

3. Đề bài yêu cầu tìm điều kiện cần và đủ, để một cặp (a,f) thỏa mãn các điều kiện 1) và 2). Do quá trình đi đến kết quả "$a=1$ và $f(x)=x$" là một chuỗi các lập luận "suy ra", nên kết quả đó mới chỉ là điều kiện cần, để một cặp (a,f) thỏa mãn các điều kiện đó. Do vậy, để hoàn tất lời giải cho bài toán, cần thực hiện bước "thử lại", để khẳng định kết quả đã tìm ra cũng đồng thời là điều kiện đủ.

Điều nêu trên đây đã được nhắc nhở nhiều lần trên các trang của Tạp chí Pi. Thế nhưng, trong số các lời giải Tòa soạn nhận được, vẫn có một lời giải thiếu phần "thử lại"! Lời giải đó không được chấp nhận là lời giải đúng (vì về mặt toán học, đó chưa phải là một lời giải cho bài toán).

4. Trong lời giải của mình, có bạn viết "Thay $x=f(x)$ vào ..., ta có ...". Câu vừa trích dẫn

là một *câu sai* về mặt toán học, vì $x = f(x)$ thể hiện một phương trình.

Trong tiếng Việt, từ "bởi" có những khi đồng nghĩa với từ "bằng", chứ không phải là dấu "=" trong toán học!

Để diễn đạt đúng, về cả toán học lẫn tiếng Việt, câu trích dẫn trên cần được sửa thành: "Trong ..., thay x bởi $f(x)$, ta có ...", hoặc "Trong ..., thay x bằng $f(x)$, ta có ...".

Nguyễn Duy Thái Sơn

P240. Bạn Pi vừa mua được một mảnh đất, và định xây nhà. Khổ một nỗi là ở khu vực đó có một quy định rất oái oăm: các nhà không được phép che lấp nhau hoàn toàn, theo nghĩa mọi đường thẳng nối đỉnh của hai nhà tùy ý đều phải tạo với mặt đất một góc không vượt quá 45°. Các nhà đã xây đều tuân thủ nghiêm ngặt quy định đó, và hiển nhiên Pi cũng phải tuân thủ khi xây nhà. Bạn thử nghĩ xem, Pi có xây nổi nhà hay không?

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Để giải bài đã ra, ta coi vị trí của mỗi ngôi nhà là một điểm trên mặt phẳng (tức mặt đất), mỗi ngôi nhà là một đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng đó, và có một đầu mút là đỉnh nhà, đầu mút còn lại là nền nhà (tức là điểm trên mặt phẳng, mà tại đó, đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng).

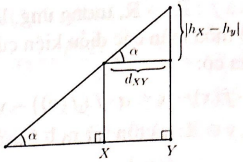
Ta gọi ngôi nhà có vị trí tại điểm X là ngôi nhà X.

Kí hiệu h_X là chiều cao của ngôi nhà X, và d_{XY} là khoảng cách giữa ngôi nhà X và ngôi nhà Y.

Xét hai ngôi nhà X, Y tùy ý. Giả sử đường thẳng nối đỉnh của hai ngôi nhà đó tạo với mặt đất góc α. Khi đó, quy định oái oăm nêu trong đề bài được "phiên dịch" sang ngôn ngữ toán học thành:

$$\frac{|h_X - h_Y|}{d_{XY}} = \tan\alpha \le \tan 45^\circ = 1,$$

hay
$$|h_X - h_Y| \le d_{XY}. \qquad (1)$$



Giả sử Pi đã mua mảnh đất ở vị trí P. Ta sẽ xem Pi có thể xây được ngôi nhà với chiều cao bao nhiêu, nếu tuân thủ nghiêm ngặt quy định oái oăm.

Giả sử h_P là chiều cao của ngôi nhà mà Pi định xây. Khi đó, theo (1), Pi phải tính toán sao cho

$$|h_P - h_X| \le d_{PX},$$

với mọi ngôi nhà X đã được xây.

Vì chỉ có hữu hạn ngôi nhà đã được xây nên phải tồn tại ngôi nhà A, sao cho

$$h_A + d_{AP} = \min_X \{h_X + d_{PX}\},$$

trong đó, minimum được lấy theo tất cả các ngôi nhà X đã được xây.

Theo tính toán của Pi thì khi xây ngôi nhà với chiều cao

$$h_P = h_A + d_{AP},$$

Pi sẽ không vi phạm quy định của khu vực (nơi Pi mua đất).

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại một ngôi nhà B nào đó, mà ngôi nhà (sẽ xây) của Pi và ngôi nhà đó vi phạm quy định nêu trên. Khi đó, theo (1), ta sẽ có:

$$|h_P - h_B| > d_{PB}. \qquad (2)$$

Từ cách chọn h_P, hiển nhiên suy ra không thể có:

$$h_P - h_B > d_{PB};$$

vì thế

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow h_B - h_P > d_{PB} \Leftrightarrow h_P < h_B - d_{PB}\\ &\Leftrightarrow h_A + d_{PA} < h_B - d_{PB}\\ &\Leftrightarrow h_B - h_A > d_{PA} + d_{PB}.\end{aligned}$$

Từ đó, do

$$d_{PA} + d_{PB} \ge d_{AB},$$

nên suy ra

$$h_B - h_A > d_{AB},$$

mâu thuẫn với việc các ngôi nhà A và B đã được xây theo đúng quy định.

Mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy, giả sử phản chứng ở trên là sai; nghĩa là, Pi đã tính toán đúng.

Vậy, Pi có xây nổi nhà, dù quy định rất oái oăm!

Bình luận và Nhận xét.

1. Qua lời giải trên đây có thể thấy, điểm mấu chốt để giải được bài toán là việc "phiên dịch" ngôn ngữ "xây dựng" sang ngôn ngữ toán học. Nói cách khác, là tìm được mô hình toán học của tình huống đời sống đã đặt ra.

2. Pi rất không vui, khi cho tới thời điểm bản thảo lên trang, không có một bạn đọc nào gửi cho Pi lời giải của bài toán trên. Phải chăng, do các bạn đã gặp khó khăn (không thể vượt qua) trong việc "phiên dịch" nói trên? Hay do ... vì thấy đề bài yêu cầu "bạn thử nghĩ xem" nên các bạn chỉ ... nghĩ, mà không gửi lời giải cho Pi?

Nguyễn Khắc Minh

THÔNG BÁO:

1. Tạp chí Pi tiếp tục nhận lời giải của bạn đọc cho bài P239. Hạn chót cho việc gửi lời giải cho bài toán đó là ngày 01 tháng 6 năm 2019.

2. Thời hạn chót nhận lời giải cho các bài toán trong mục Thách thức kỳ này trên đây là: ngày 30/6/2019.

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

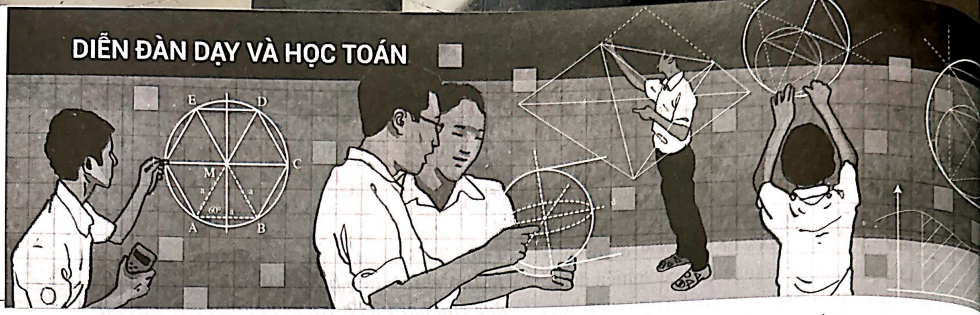
Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHỐI THCS

- Trường THCS Tp. Bến Tre, tỉnh **Bến Tre**: *Đào Trọng Toàn* (lớp 9/3; P204).
- Trường THCS Tân Phú, Đồng Xoài, **Bình Phước**: *Đặng Đình Văn* (lớp 9/11; P204, P232).
- Trường THCS Nguyễn Trực, Huyện Thanh Oai, **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng* (lớp 9A; P232).
- Archimedes Academy, Quận Thanh Xuân, **Hà Nội**: *Dương Hồng Sơn* (lớp 8C1; P231).

KHỐI THPT

- Trường THPT Đoàn Kết, Tân Phú, **Đồng Nai**: *Đào Quốc Cường* (lớp 11A1; P232).
- Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**: *Kiều Quốc Huy* (lớp 10T; P204).
- Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Tp. Hà Nội**: *Lê Đức Hiếu* (lớp 11T1; P238).
- Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh **Hà Tĩnh**: *Phạm Công Tài* (lớp 11 Toán 1; P204, P232, P235).
- Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Văn Bảo An* (lớp 10CT1; P231, P235), *Lương Trần Công Danh* (lớp 10CT1; P235), *Nguyễn Lê Hoàng Duy* (lớp 10CT1; P204), *Đặng Dương Minh Nhật* (lớp 10CT1; P231, P235), *Nguyễn Phúc Thịnh* (lớp 10CT1; P231, P232).
- Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**: *Lê Khánh Huy* (lớp 11 Toán 1; P232, P235), *Nguyễn Thanh Phúc* (lớp 10 Toán 1; P231, P232, P235), *Nguyễn Kim Phương Trang* (lớp 12 Toán 1; P235).
- Trường THPT chuyên Quốc học, **Thừa Thiên – Huế**: *Phan Phước Minh* (lớp 11 Toán 1; P238).
- Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh **Vĩnh Phúc**: *Chu Thị Thanh* (lớp 11A1; P231, P235, P238).
- Trường THPT chuyên Tự nhiên – **ĐHQG Hà Nội**: *Ngô Quỳnh Anh* (lớp 10A1; P238).
- Trường Phổ thông Năng khiếu – **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**: *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 10 Toán; P204, P228, P235).
- St. Joseph's Institution, **Singapore**: *Nguyễn Quang Minh* (P204, P233).



LTS. *Trong bài viết "Cùng tìm lời giải cho bài P228" (xem tại trang 17 – 21, số Tạp chí này), tác giả Trần Nam Dũng đã trao đổi với bạn đọc về các cách sử dụng công thức tổng Abel để đánh giá một số dạng tổng. Dưới đây, chúng tôi giới thiệu với bạn đọc một chia sẻ của GS. Vũ Hà Văn về cách tìm ra công thức ấy. Từ góc nhìn của GS. Vũ Hà Văn đối với công thức tổng Abel, chúng ta có thể thu được những điều thú vị gì? Đó chính là điều mà Tạp chí Pi mong muốn bạn đọc cùng tham gia trao đổi, tại Diễn đàn này.*

TỔNG ABEL

Vũ Hà Văn

Thời Trung học phổ thông (ngày tôi học, gọi là Cấp 3), tôi (và chắc nhiều bạn nữa) từng học công thức tổng Abel:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n,$$

với $A_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Công thức này rất hay, và chứng minh không khó, một khi bạn biết nó. Nhưng mà gần đây, tôi mới để ý, ta có thể suy ra nó như thế nào?

Nếu bạn muốn tính tổng

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n),$$

ta có thể dùng xấp xỉ $\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

Trong trường hợp $f(i) = a(i) \cdot b(i)$, ta có:

$$\int_1^n a(x)b(x)\mathrm{d}x.$$

Nếu dùng công thức tính tích phân từng phần, bạn có thể có:

$$\int_1^n a(x)b(x)\mathrm{d}x = A(x) \cdot b(x)|_1^n - \int_1^n A(x)b'(x)\mathrm{d}x,$$

với $A'(x) = a(x)$.

Trong trường hợp đang có, tất nhiên ta chỉ có các số rời rạc, mà không có một hàm số nào. Vậy tìm $A(x)$ thế nào? Suy nghĩ hợp lý là theo định lý giá trị trung bình, ta có thể viết

$$F(x) - F(x-1) \approx F'(x).$$

Vậy, cách logic để chọn $A(k)$ là viết

$$A(k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

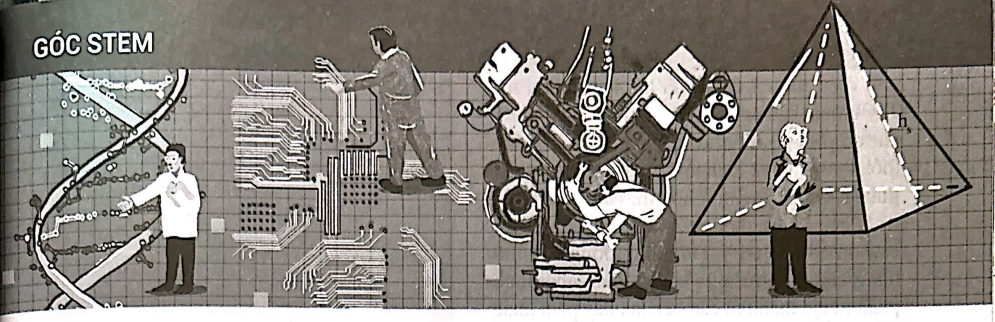
Một cách tương tự, ta có

$$b'(k) = b_{k+1} - b_k.$$

Những điều vừa trình bày trên đây dẫn tới dạng của đẳng thức Abel ở trên.

Một lần nữa, xin lưu ý rằng, ở đây, tôi bàn tới cách tìm ra công thức tổng Abel (tức, tại sao ta lại nghĩ đến dạng đẳng thức trên), chứ không phải là chứng minh đẳng thức ấy.

Bài tập. Hãy dùng công thức tổng Abel để tính tổng các số nguyên tố, trong phạm vi từ 1 đến n.



Nước và những điều chưa biết

Kì 2: Nguồn gốc của các tính chất của nước

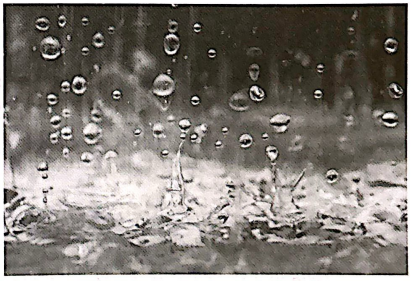
Nguyễn Hoàng Hải[1]

1. ORBITAL ĐIỆN TỬ

Ở trung học phổ thông, chúng ta đã được học các điện tử trong nguyên tử được phân bố thành các lớp và phân lớp. Kiến thức đó có được nhờ cơ học lượng tử, môn khoa học mô tả các vật thể vi mô một cách chính xác đáng ngạc nhiên. Theo lí thuyết này, các điện tử trong nguyên tử sẽ ở các trạng thái lượng tử gọi là các orbital. Điện tử ở mỗi orbital có một năng lượng và một hình dạng nhất định, mô tả bởi một hàm sóng. Khác với các hình dung thông thường của cơ học cổ điển là mỗi điện tử sẽ chuyển động trên các quỹ đạo (orbit) xác định, cơ học lượng tử mô tả các điện tử xung quanh hạt nhân, xác suất phân bố điện tử trong không gian tỉ lệ với bình phương biên độ của hàm sóng. Mỗi orbital có bốn số lượng tử đặc trưng. Đó là số lượng tử chính (quyết định điện tử ở lớp nào), số lượng tử quỹ đạo (quyết định điện tử ở phân lớp nào), số lượng tử từ, số lượng tử spin. Các điện tử sẽ được lấp đầy từ orbital có năng lượng thấp lên các orbital có năng lượng cao. Cơ học lượng tử giải thích tuyệt vời sự sắp xếp của các nguyên tố trong Bảng tuần hoàn các nguyên tố hoá học. Hình dạng của orbital *s* là hình cầu, hình đối xứng nhất chứa tối đa hai điện tử với spin ngược nhau. Hình dạng của orbital *p* là hình truỳ dọc theo một trục, trong không gian ba chiều thì có ba hình truỳ như vậy tương ứng với các trục x, y, z. Mỗi truỳ chứa tối đa hai điện tử nên phân lớp $2p$ có thể chứa đến sáu điện tử. Với mỗi nguyên tố, nguyên tử của nó có một cấu hình điện tử ở trạng thái cơ bản. Hydro (vị trí thứ nhất trong Bảng tuần hoàn) có cấu hình điện tử là $1s^1$, carbon (vị trí thứ sáu) là $1s^2 2s^2 2p^2$, oxy (vị trí thứ tám) là $1s^2 2s^2 2p^4$. Đó là cấu hình điện tử của nguyên tử ở trạng thái cơ bản.

2. LAI HÓA ORBITAL

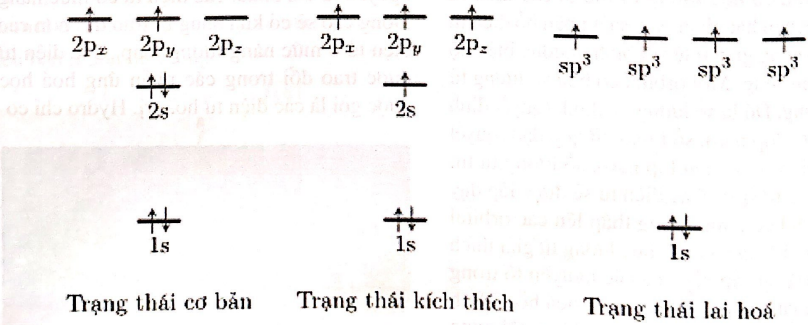
Khi tham gia các phản ứng hoá học, các điện tử của nguyên tử sẽ được trao đổi giữa các nguyên tử với nhau, các điện tử có mức năng lượng cao sẽ có khả năng bị trao đổi hơn các điện tử ở mức năng lượng thấp. Các điện tử được trao đổi trong các phản ứng hoá học được gọi là các điện tử hoá trị. Hydro chỉ có



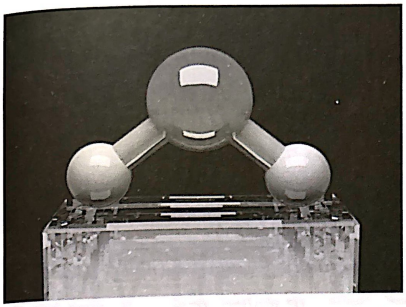
[1] *Đại học Quốc gia Hà Nội.*

một điện tử nên đó chính là điện tử hoá trị. Tuy nhiên, các nguyên tử có nhiều điện tử thì chỉ có một số điện tử là điện tử hoá trị mà thôi. Ví dụ, nếu 2 điện tử $2p^2$ của carbon tham gia các phản ứng hoá học thì carbon có hoá trị 2, nếu cả các điện tử $2s^2$ cùng tham gia thì carbon có hoá trị 4. Do năng lượng và hình dạng của điện tử ở $2s$ và $2p$ khác nhau nên phân tử tạo thành từ các liên kết này phải khác nhau. Thực nghiệm cho thấy bốn điện tử hoá trị của nguyên tử carbon có năng lượng bằng nhau và phân bố đẳng hướng trong không gian tạo thành một tứ diện đều mâu thuẫn với cấu hình điện tử của carbon ở trạng thái cơ bản. Bài toán này đã thu hút sự chú ý của Linus Pauling, một nhà hoá học người Mỹ, người đã trực tiếp sang Châu Âu học cơ học lượng tử và ứng dụng trong hoá học. Năm 1935, Pauling đưa ra giả thuyết về lai hoá điện tử, một khái niệm quan trọng trong hoá học lượng tử. Theo giả thuyết này, năng lượng điện tử tại orbital $1s$ rất thấp nên không tham gia các phản ứng hoá học. Nhưng năng lượng của điện tử tại orbital $2s$ và $2p$ lại gần nhau (hình 1). Do sự chênh lệch năng lượng giữa trạng thái $2s$ và $2p$ là không lớn nên khi có một kích thích từ bên ngoài, ví dụ kích thích nhiệt thì một điện tử ở trạng thái $2s$ sẽ chuyển lên trạng thái $2p$ làm cho trạng thái $2p$ chứa ba điện tử, trạng

thái $2s$ còn một điện tử. Đến đây, quá trình lai hoá xảy ra. Hàm sóng của một điện tử ở trạng thái $2s$ lai hoá với hàm sóng của ba điện tử ở trạng thái $2p$ tạo ra bốn trạng thái có năng lượng bằng nhau là $2sp^3$, hay còn gọi tắt là lai hoá sp^3. Kết quả của quá trình lai hoá này là bốn trạng thái sp^3 hoàn toàn bình đẳng với nhau về độ lớn và phân bố đều theo các hướng trong không gian. Do có nhiều $2p$ hơn $2s$ nên lai hoá này sẽ có hình dạng giống orbital p (hình truỳ) hơn là giống orbital s (hình cầu). Kết quả là carbon có hoá trị bốn. Mỗi orbital chỉ chứa một điện tử (tối đa là hai điện tử) và có khả năng nhận thêm một điện tử. Phân bố của các orbital là đều ra bốn hướng tạo thành một tứ diện đều. Mỗi orbital sp^3 trong nguyên tử carbon là các orbital chưa kết cặp (unpaired), chúng có thể nhận thêm một điện tử nữa.

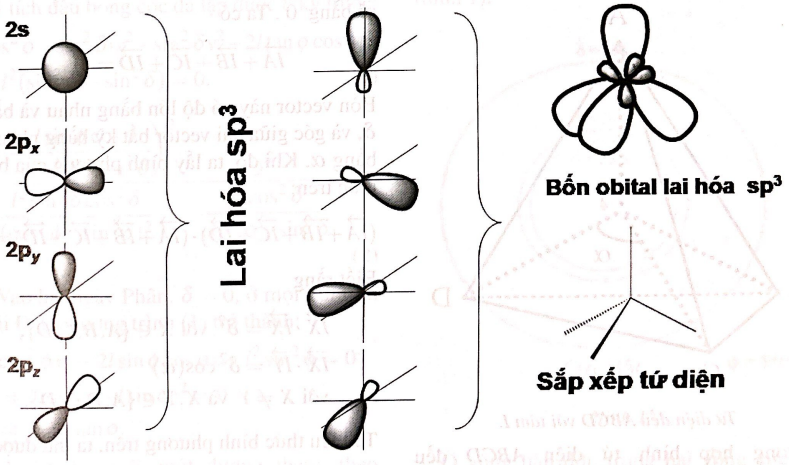


Hình 1: Trạng thái cơ bản, kích thích và lai hóa của nguyên tử C. Mỗi một vạch đại diện cho một trạng thái lượng tử, có thể chứa tối đa hai điện tử. Cấu hình điện tử của carbon ở trạng thái cơ bản là $1s^2 2s^2 2p^2$, ở trạng thái kích thích là $1s^2 2s^1 2p^3$. Ở trạng thái lai hoá, hai điện tử ở $1s^2$ và bốn điện tử cùng ở trạng thái lai hoá $2sp^3$.



Điện tử tồn tại trong bốn trạng thái sp^3 trong không gian sẽ phải thoả mãn đặc điểm đối xứng không gian ba chiều vì bốn trạng thái này hoàn toàn giống nhau và phân bố tạo thành một tứ diện đều. Phân tử CH_4 là một ví dụ điển hình. Bốn nguyên tử hydro liên kết với một nguyên tử carbon. Do bốn điện tử lai hoá sp^3 nên bốn nguyên tử hydro sắp xếp xung quanh nguyên tử carbon và tạo thành một tứ diện đều với nguyên tử carbon nằm ở giữa hình tứ diện và các nguyên tử hydro nằm ở các đỉnh hình tứ diện.

Các nguyên tố N và O là các nguyên tố tiếp theo nguyên tố carbon trong Bảng tuần hoàn, tức là nguyên tố thứ bảy và thứ tám. Như vậy, N có nhiều hơn C một điện tử và O có nhiều hơn C hai điện tử. Sự lai hoá sp^3 cũng xảy ra với các nguyên tố N và O tương tự như với C. Tuy nhiên, do có nhiều hơn một điện tử nên điện tử thứ bảy của N sẽ nằm ở một trong bốn orbital sp^3 làm cho một orbital này chứa hai điện tử. Như vậy, N chỉ còn ba orbital chưa kết cặp là có thể tạo liên kết hoá học (hoá trị 3). Ba liên kết này tạo thành ba đỉnh của tứ diện đều. O có nhiều hơn C hai điện tử, hai điện tử này chiếm hai orbital sp^3 làm cho nguyên tử O chỉ còn hai orbital có thể nhận thêm điện tử, tương ứng với hoá trị 2 của O. Hai orbital này là hai đỉnh của hình tứ diện đều. Góc giữa hai đỉnh của hình tứ diện đều với tâm của hình tứ diện là 109,47° (xem bài toán). Góc liên kết giữa nguyên tử oxy và hai nguyên tử hydro sẽ hơi khác một chút so với góc tạo bởi tâm tứ diện đều tới hai đỉnh bất kỳ. Góc của phân tử nước có giá trị khoảng 104,5°.



Hình 2: Đặc điểm hình học của các orbital $2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z$, lai hoá $2sp^3$ và phân bố đối xứng của lai hoá $2sp^3$ trong không gian ba chiều của nguyên tử carbon.

GÓC TOÁN HỌC

Phân tử CH_4 tạo thành một hình tứ diện đều với carbon nằm ở giữa và bốn nguyên tử hydro nằm ở bốn đỉnh. Tính góc giữa hai liên kết C–H.

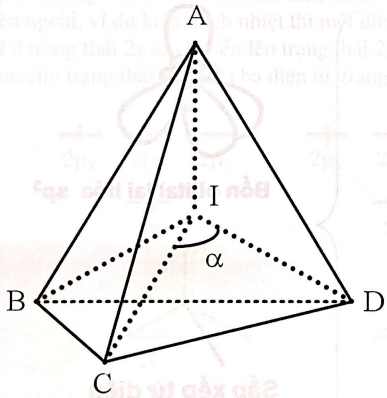
Phương pháp hình học

Ta sẽ dùng các biểu thức của hình học không gian và hệ thức lượng trong tam giác để tính một cách gần đúng góc giữa hai liên kết hydro của phân tử nước. Góc này bằng góc nhìn từ tâm của một tứ diện đều đến hai đỉnh bất kỳ. Thể tích của tứ diện $IBCD$ bằng $1/4$ thể tích của tứ diện đều $ABCD$. Thể tích của một tứ diện bất kỳ được cho bởi

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{M+N+P-Q},$$

trong đó

$$M = a^2d^2(b^2+e^2+c^2+f^2-a^2-d^2)$$
$$N = b^2e^2(a^2+d^2+c^2+f^2-b^2-e^2)$$
$$P = c^2f^2(a^2+d^2+b^2+e^2-c^2-f^2)$$
$$Q = (abc)^2+(aef)^2+(bdf)^2+(cde)^2$$
$$BC=a, CA=b, AB=c, AD=d, BD=e, CD=f.$$



Tứ diện đều ABCD với tâm I.

Trường hợp hình tứ diện $ABCD$ đều $BC = CA = AB = AD = BD = CD = a$

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

I là tâm của tứ diện đều $ABCD$. Khi đó, hình tứ diện $IBCD$ có hai loại cạnh bằng nhau $BC = BD = CD = a$ và $IB = IC = ID = h$.

$$M' = a^2h^2(h^2+a^2)$$
$$N' = h^2a^2(a^2+h^2)$$
$$P' = h^2a^2(a^2+h^2)$$
$$Q' = (ahh)^2+(aaa)^2+(hha)^2+(hha)^2,$$
$$V_{IBCD} = \frac{a^2\sqrt{3h^2-a^2}}{12},$$
$$V_{ABCD} = 4\cdot V_{IBCD} \Rightarrow h = \frac{3a}{\sqrt{24}}.$$

Xét tam giác ICD, áp dụng định lý cosin của hệ thức lượng trong tam giác, ta thu được:

$$\cos(\widehat{CID}) = \cos(\alpha) = \frac{h^2+h^2-a^2}{2h^2} = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \alpha = 109,47°.$$

Phương pháp vector

Vì I là tâm của một tứ diện đều nên tổng bốn vector có gốc tại I và điểm đầu là A, B, C, D sẽ bằng $\vec{0}$. Ta có

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Bốn vector này có độ lớn bằng nhau và bằng δ, và góc giữa hai vector bất kỳ bằng nhau và bằng α. Khi đó, ta lấy bình phương của biểu thức trên:

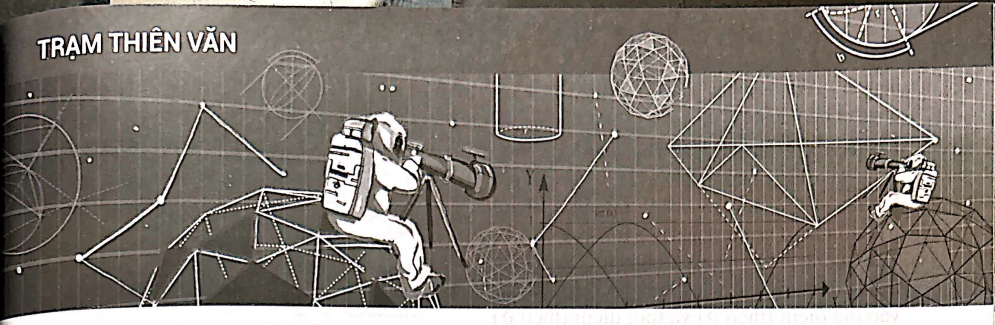
$$(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}) = 0.$$

Biết rằng

$$\overrightarrow{IX}\cdot\overrightarrow{IX} = \delta^2 \text{ với } X \in \{A,B,C,D\},$$
$$\overrightarrow{IX}\cdot\overrightarrow{IY} = \delta^2\cos(\alpha)$$
$$\text{với } X \neq Y \text{ và } X, Y \in \{A,B,C,D\}.$$

Từ biểu thức bình phương trên, ta thu được

$$4\cdot\delta^2 + 3\cdot 4\cdot\delta^2\cos(\alpha) = 0$$
$$\cos(\alpha) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 109,47°.$$



Quỹ tích bóng nắng (tiếp)

Phạm Vũ Lộc

Ở số trước, ta đã lập được phương trình đường conic là quỹ tích của đầu bóng cọc thẳng đứng trong ngày tại một nơi trên mặt đất. Lần này, ta khảo sát các trường hợp áp dụng cụ thể phương trình đó theo hai tham số là vĩ độ địa điểm ϕ và xích vĩ Mặt Trời δ. Trong bài này, ta chỉ xét cho bán cầu Bắc ($\phi > 0$) vì bán cầu Nam thì bài toán cũng tương tự, đối xứng qua Xích đạo.

Ta nhắc lại hai phương trình tương đương của quỹ tích đầu bóng cọc đã lập được ở kỳ trước:

$$(\cos^2\phi - \sin^2\delta)x^2 - \sin^2\delta y^2 - 2l\tan\phi\cos^2\phi x + l^2(\sin^2\phi - \sin^2\delta) = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\left(x - \dfrac{l\sin\phi\cos\phi}{\cos^2\phi - \sin^2\delta}\right)^2}{\dfrac{l^2\sin^2\delta\cos^2\delta}{(\cos^2\phi - \sin^2\delta)^2}} - \frac{y^2}{\dfrac{l^2\cos^2\delta}{\cos^2\phi - \sin^2\delta}} = 1. \quad (2)$$

1. Vào hai ngày Phân, $\delta = 0$, ở mọi nơi trên Trái Đất, phương trình (1) trở thành:

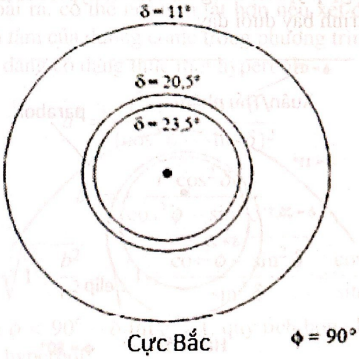
$$\cos^2\phi x^2 - 2l\sin\phi\cos\phi x + l^2\sin^2\phi = 0$$
$$\Rightarrow (\cos\phi x - l\sin\phi)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = l\tan\phi.$$

Quỹ tích bóng là một đường thẳng theo phương Đông–Tây. Người ta có thể vận dụng nó để xác định chính xác phương Đông Tây vào ngày này. Riêng ở hai cực vĩ độ $\phi = 90°$ thì đường thẳng này không xác định vì Mặt Trời cả ngày chạy vòng quanh chân trời.

2. Ở hai cực, $\phi = 90°$, phương trình (2) thành:

$$\frac{x^2\sin^4\delta}{l^2\sin^2\delta\cos^2\delta} + \frac{y^2}{l^2\cot^2\delta} = 1$$
$$x^2 + y^2 = l^2\cot^2\delta.$$

Tức là nếu dựng cọc ở đúng hai địa cực, bóng nắng của nó trong nửa năm (hiện tượng đêm trắng) là một đường tròn có bán kính $l\cot\delta$ (hình 1).



Hình 1

3. Ở vùng hàn đới, trong hai vòng cực, vĩ độ $\phi \geq 90° - 23,5°$ còn xích vĩ Mặt Trời trong năm thì luôn dao động trong khoảng $-23,5° \leq \delta \leq +23,5°$ nên có thời điểm trong

năm $\delta \geq 90^\circ - \phi$ hay $\sin\delta \geq \sin(90^\circ - \phi) = \cos\phi$ và do đó $\cos^2\phi - \sin^2\delta \leq 0$.

Khi $\cos^2\phi - \sin^2\delta < 0$: Dấu của đơn thức chứa y^2 trong phương trình (2) sẽ dương, tức là đầu bóng cọc chạy thành đường elip với trục lớn theo phương Bắc–Nam, hay là Mặt Trời không lặn trong ngày hôm đó. Đó là hiện tượng đêm trắng ở vùng hàn đới, kéo dài tùy vào địa điểm (theo ϕ) và thời điểm (theo δ) trong năm.

Khi dấu bằng xảy ra, phương trình (1) trở thành:

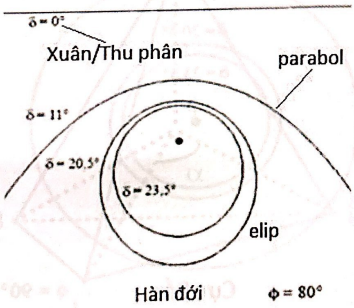
$$\sin^2\delta y^2 + 2l\sin\phi\cos\phi x - l^2(\sin^2\phi - \sin^2\delta) = 0.$$

Vì $\sin\delta = \cos\phi$ nên:

$$y^2 + 2l\tan\phi x - l^2(\tan^2\phi - 1) = 0$$

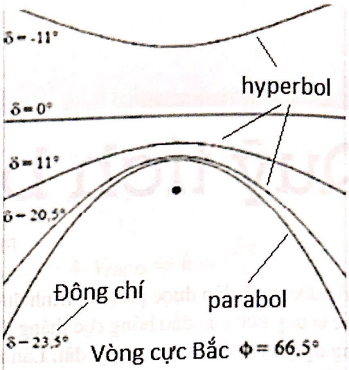
$$y^2 = -2(l\tan\phi)\left[x - \frac{l(\tan^2\phi - 1)}{2\tan\phi}\right].$$

Đây là phương trình của đường parabol quay bề lõm về phía cực. Đó là quỹ tích đầu bóng vào hai ngày bắt đầu và kết thúc của chuỗi đêm trắng, Mặt Trời lặn và mọc lại ngay vào lúc nửa đêm ở vùng hàn đới (hình 2). Đỉnh parabol cách chân cọc một khoảng bằng $l(\tan^2\phi - 1)/(2\tan\phi)$. Ngoài khoảng đêm trắng, quỹ tích bóng sẽ là hình hyperbol như sẽ trình bày dưới đây.



Hình 2

4. Ở vòng cực, $\phi = \pm(90^\circ - 23,5^\circ)$, dấu bằng ở trên chỉ xảy ra một lần trong năm (vòng cực Bắc thì vào Hạ chí, vòng cực Nam thì vào Đông chí ($\delta = \pm 23,5^\circ$)). Cũng cần lưu ý rằng số ngày có đêm trắng ở một nơi trong vùng hàn đới cũng bằng số ngày có ngày tối (Mặt Trời không mọc) trong năm và đối xứng qua hai ngày Phân.



Hình 3

5. Ở ngoài vòng cực (và ở vùng hàn đới ngoài những ngày bị đêm trắng, ngày tối như vừa nói), Mặt Trời luôn mọc lặn hàng ngày. Khi đó, $\delta < 90^\circ - \phi$, đơn thức chứa y^2 trong phương trình (1) sẽ âm, tức là có dạng một hyperbol có tiêu điểm nằm trên trục Bắc–Nam. Để tìm tọa độ đỉnh hyperbol (vị trí đầu bóng vào giữa trưa), ta cho $y = 0$:

$$[x(\cos^2\phi - \sin^2\delta) - l\sin\phi\cos\phi]^2 = l^2\sin^2\delta\cos^2\delta$$

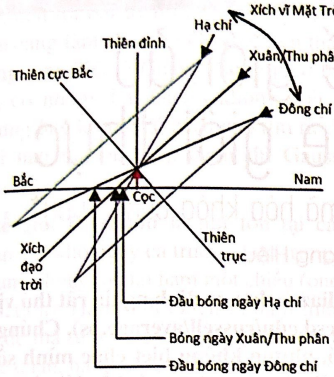
$$x = \frac{\pm l\sin\delta\cos\delta + l\sin\phi\cos\phi}{\cos^2\phi - \sin^2\delta} = \frac{l\sin\phi\cos\phi}{\cos^2\phi - \sin^2\delta} \pm \frac{l\sin\delta\cos\delta}{\cos^2\phi - \sin^2\delta}. \quad (3)$$

Ta thấy các biểu thức chứa δ đều bị bình phương, tức là phép tính cho mùa hè và mùa đông đối xứng nhau. Nhưng trong thực tế, bóng nắng vào mùa hè sẽ gần chân cọc hơn vào mùa đông (vì Mặt Trời mùa hè vào giữa trưa có cao độ lớn hơn, hình 4). Nên thực tế, vào mùa hè ta thấy nhánh hyperbol phía Nam trong khi mùa đông ta thấy nhánh phía Bắc. Mùa đông thì $\delta < 0$ nên $\sin 2\delta < -\sin 2\delta$. Vì vậy biểu thức bên phải trong (3) có giá trị lớn

hơn nếu có dấu âm:

$$\frac{l\sin\delta\cos\delta}{\cos^2\phi-\sin^2\delta}=\frac{\frac{l}{2}\sin 2\delta}{\cos^2\phi-\sin^2\delta}$$

$$<-\frac{\frac{l}{2}\sin 2\delta}{\cos^2\phi-\sin^2\delta}=-\frac{l\sin\delta\cos\delta}{\cos^2\phi-\sin^2\delta}.$$



Hình 4

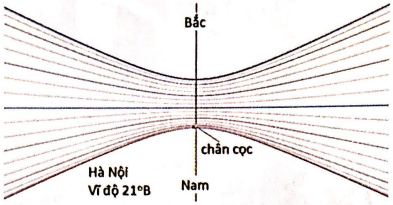
Vì bóng mùa đông ở bán cầu Bắc dài hơn bóng mùa hè nên ta chọn dấu âm trong (3) cho đỉnh của nhánh hyperbol thực tế:

$$x=\frac{l(\sin\phi\cos\phi-\sin\delta\cos\delta)}{\cos^2\phi-\sin^2\delta}.$$

Ta thấy $x<0$ khi $\sin\phi\cos\phi<\sin\delta\cos\delta$ hay $\frac{1}{2}\sin 2\phi<\frac{1}{2}\sin 2\delta$ hay $\phi<\delta$, tức là ở vùng nhiệt đới, nơi mà xích vĩ Mặt Trời có thể vượt qua vĩ độ. Ví dụ ở bán cầu Bắc, Mặt Trời có thể vượt qua đỉnh đầu vào giữa trưa về phía Bắc. Khi đó, bóng sẽ đổ về phía Nam ($x<0$).

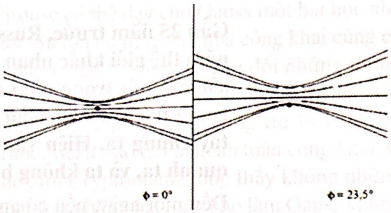
Tương tự, $x>0$ thì đỉnh hyperbol nằm về phía Bắc cọc khi $\phi>\delta$ ở các vĩ độ ngoại chí tuyến và ở vùng nhiệt đới trong một thời gian dài ngắn tùy theo vĩ độ.

Hình 5, là một mặt đồng hồ Mặt Trời cho thấy các đường hyperbol quỹ tích dựng cho Hà Nội ở vĩ độ 21°B. Vì Hà Nội ở gần chí tuyến Bắc nên các nhánh hyperbol có đỉnh nằm về phía Nam cọc chỉ có rất ít so với các nhánh có đỉnh ở phía Bắc.



Hình 5

6. Ở vùng nhiệt đới, có hai ngày trong năm (và ở chí tuyến Bắc thì chỉ vào ngày Hạ chí, ở chí tuyến Nam chỉ vào ngày Đông chí), $\phi=\delta$ và hệ số tự do ở phương trình (1) bằng 0, dẫn đến $y=0$ thì $x=0$. Tức là vào ngày đó, Mặt Trời nằm đúng trên thiên đỉnh vào giữa trưa, cọc không có bóng. Hình 6 cho thấy quỹ tích bóng ở chí tuyến Bắc và Xích đạo.



Hình 6

Ngoài ra, có thể nói tóm tắt hơn nếu xét độ lệch tâm của đường conic trong phương trình (1), đang có dạng thức một hyperbol:

$$a^2=\frac{l^2\sin^2\delta\cos^2\delta}{(\cos^2\phi-\sin^2\delta)^2}$$

$$b^2=\frac{l^2\cos^2\delta}{\cos^2\phi-\sin^2\delta}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{\cos^2\phi-\sin^2\delta}{\sin^2\delta}}=\frac{\cos\phi}{\sin\delta}.$$

Nếu $\phi<90^\circ-\delta$ thì $e>1$, quỹ tích bóng là một hyperbol.

Nếu $\phi=90^\circ-\delta$ thì $e=1$, quỹ tích bóng là một parabol.

Nếu $\phi>90^\circ-\delta$ thì $e<1$, quỹ tích bóng là một elip.

Nếu $\phi=90^\circ$ thì $e=0$, quỹ tích bóng là một đường tròn.

Bốn thế giới ảo và một thế giới thực

[Từ "P=NP" đến Mật mã hóa khóa công khai]*

Phan Dương Hiệu

Gần 25 năm trước, Russell Impagliazzo đưa ra định nghĩa rất thú vị về năm thế giới khác nhau (cseweb.ucsd.edu/russell/average.ps). Chúng ta sống ở một trong năm thế giới đó, nhưng không biết chắc mình sống trong thế giới nào. Gần 20 năm trôi qua, vẫn chưa có thế giới nào chia tay chúng ta. Hiện vẫn đang có bốn thế giới ảo và một thế giới thực quanh ta, và ta không biết là mình đang ở đâu.

Đến một ngày, nếu có anh hùng nào may mắn chứng minh chúng ta đang thực sự sống ở đâu, thì cũng là ngày tận thế của bốn thế giới ảo còn lại, điều đó thật buồn và những người còn lại thật kém may... Chẳng hạn, một chứng minh $P = NP$ sẽ là ngày tận thế của bốn thế giới. Tuy nhiên, ta sẽ thấy rằng, một chứng minh P khác NP thì chỉ làm một thế giới tận thế và vẫn còn lại bốn thế giới lung linh :) Vì vậy, nếu Bụt hiện xuống và cho chọn giữa "$P = NP$" hay "P khác NP" thì mình sẽ chọn P khác NP :-)

Impagliazzo minh họa năm thế giới một cách rất xuất sắc để ai cũng hiểu được, thông qua câu chuyện tưởng tượng giữa thầy giáo Grouse và cậu học trò Gauss. Cậu trò Gauss thông minh nổi tiếng, trên lớp thầy giao bài nào cũng giải ngon ơ rồi rỗi rãi chọc phá các bạn làm thầy giáo rất là phiền lòng. Ông thầy Grouse quyết tâm tìm những bài toán siêu khó để nhằm mục đích làm cho Gauss bớt kiêu.

Và do đó dẫn tới năm thế giới theo định nghĩa của Impagliazzo:

Thế giới Algorithmica (thuật toán), là nơi $P = NP$. Khi đó, bài toán nào có khả năng kiểm tra lời giải cũng có khả năng tìm ra lời giải. Tức là mọi bài toán thực tế (là bài toán mà ta có thể kiểm tra xem một lời giải là đúng hay sai) đều giải được dễ dàng. Đó là thế giới chán ngán nhất, cái gì cũng giải được. Thật tội cho ông thầy Grouse, dù cố công cũng không thể tìm ra bài toán nào làm Gauss bó tay cả.

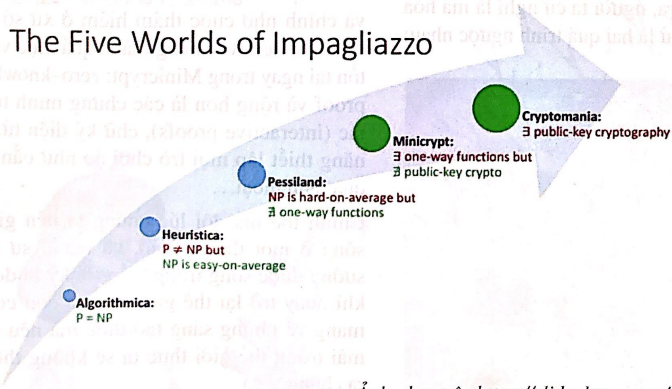
**P, NP: Xem bài viết "P và NP", Tạp chí Pi tập 3, số tháng 1.2019, trang 52 –54.*

Thế giới Heuristica là nơi tuy *NP* khác *P* nhưng mọi bài toán *NP* đều có lời giải trong trường hợp trung bình (đầu vào của bài toán – instance – được chọn ngẫu nhiên theo một phân bố xác suất nào đó). Tức là sẽ có những bài toán khó giải trong trường hợp xấu nhất, nhưng mà không có cách gì tìm ra cái trường hợp xấu nhất đó. Mọi cách chọn bài toán đều dẫn tới bài toán dễ giải. Đây là trường hợp càng làm cho ông Grouse cảm thấy cay đắng: ông biết là Gauss không phải thượng đế, có những bài Gauss không giải được, nhưng ông không có cách nào tìm ra chúng. Bài nào mà ông lựa chọn thì Gauss đều giải được.

Thế giới Pessiland là nơi tồn tại các bài toán *NP* khó ngay cả trường hợp trung bình, nhưng không tồn tại hàm một chiều (one–way function). Hàm một chiều là hàm tính xuôi thì dễ mà tính ngược thì khó. Nói một cách trực quan, hàm một chiều cho phép ta sinh ra một bài toán khó giải từ lời giải của nó, tức là ta có thể sinh ra một bài toán khó kèm theo lời giải. Thế nhưng, trong Pessiland, giả thiết là không tồn tại hàm một chiều. Điều đó có nghĩa ông thầy Grouse có thể tìm ra những bài toán khó mà Gauss không giải được (vì tồn tại bài toán *NP* khó trong trường hợp trung bình), nhưng bản thân ông Grouse cũng không thể giải được bài toán đó (vì không tồn tại hàm một chiều). Đưa ra cho cả lớp một bài toán mà bản thân mình cũng không giải được, liệu ông Grouse có dám không?

Thế giới Minicrypt là nơi tồn tại hàm một chiều one–way function nhưng không tồn tại mã hóa khóa công khai (public–key encryption). Cuối cùng cũng đã tới một thế giới mà ông Grouse có thể hài lòng: ông có thể ra những bài toán khó, Gauss không thể giải được và ông thì đĩnh đạc trình bày lời giải cho cả lớp! Tuy thế, ông chưa thật thỏa mãn, vì Gauss tuy không giải được, nhưng các bạn khác cũng chẳng ai giải được nên Gauss vẫn còn có thể tinh tướng.

Thế giới Cryptomania là nơi tồn tại mã hóa khóa công khai (public–key encryption). Với sự tồn tại mã hóa khóa công khai, ông thầy Grouse có thể dạy cho Gauss một bài học nhớ đời. Sự tồn tại mã hóa khóa công khai cũng có nghĩa là hai bên có thể trao đổi những thông điệp bí mật với nhau mà không cần phải chia sẻ, thống nhất bất cứ thông tin bí mật nào trước, và sự trao đổi là hoàn toàn công khai. Ở thế giới Cryptomania, ông thầy không những có thể ra những bài toán khó làm Gauss không thể giải được mà còn có thể đưa ra các gợi ý trên bảng để cho tất cả các học sinh đều giải được, trừ Gauss. Đây quả là một tình huống lý tưởng – Gauss trở thành cậu học sinh duy nhất trong lớp không giải được bài!



Ảnh: dựa trên https://slideplayer.com/slide/14910818/

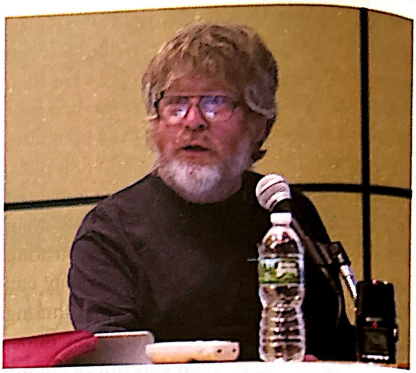
NÓI RIÊNG VỀ MẬT MÃ:

Minicrypt là thế giới tối thiểu để có thể nói tới từ mật mã, mật mã chỉ tồn tại nếu có one–way function (xem thêm bài "Mật mã dưới góc nhìn độ phức tạp tính toán" tại **http://procul.org/blog/2009/09/20/mật-ma-d\T5\uhornới-goc-nhin-độ-phức-tạp-tinh-toan/**).

Chúng ta đang được giả thuyết là sống trong thế giới Cryptomania. Các giao dịch ngân hàng, việc sử dụng thẻ tín dụng... đều có sử dụng public–key encryption. Tuy nhiên, độ an toàn của các hệ mã này đều dựa trên một giả thuyết nào đó, như là bài toán phân tích thành thừa số nguyên tố là khó, bài toán logarithm rời rạc trên nhóm các điểm trên đường cong elliptic là khó, hay tổng quát lên là tồn tại các hoán vị xuôi dễ ngược khó và có cửa lật (trapdoor permutation)...

Điều gì sẽ xảy ra khi một đêm, một siêu nhân từ đâu rơi xuống giải hết tuốt các bài toán tưởng là khó này, hủy diệt Cryptomania, đưa chúng ta trở lại thế giới Minicrypt?

Minicrypt, đó là thế giới nguyên thủy của mật mã, khi mật mã chưa là một ngành khoa học, tức là khi chưa có mật mã hóa khóa công khai. Ấy thế mà trong Minicrypt lại vẫn có rất nhiều thứ thú vị: vẫn sẽ tồn tại zero–knowledge proof, vẫn sẽ tồn tại chữ ký điện tử. Điều đặc biệt hay là chữ ký điện tử ra đời trên xương sống của mã hóa khóa công khai. Khi hệ mã RSA được đưa ra, người ta cứ nghĩ là mã hóa và chữ ký điện tử là hai quá trình ngược nhau:



Russell Impagliazzo

mã hóa thì dùng khóa công khai để mã và khóa bí mật để giải mã; còn chữ ký thì dùng khóa bí mật để ký và dùng khóa công khai để kiểm thử chữ ký. Tưởng vậy mà không phải là vậy, chúng nó ở hai thế giới khác nhau. (xem thêm bài "Vẻ đẹp bất định của mật mã hiện đại" tại **http://procul.org/blog/2012/02/29/vẻ-đẹp-bất-định-trong-mật-ma-hiện-đại/**)

Nếu tương lai chúng ta quay lại Minicrypt, đó không phải là thảm họa, mà sẽ là sự kỳ thú. Mật mã được đánh dấu bước chuyển mình từ nghệ thuật thành một ngành khoa học kể từ khi ra đời mật mã hóa khóa công khai. Để rồi khi nếu có chứng minh mã hóa công khai không tồn tại, mật mã lại trở về thời kỳ chỉ có mã hóa khóa bí mật. Lúc đó, có nghĩa chúng ta đi một vòng qua thế giới ảo Cryptomania, và chính nhờ cuộc thám hiểm ở xứ sở diệu kỳ đó sẽ đem về những thành quả thực vẫn sẽ tồn tại ngay trong Minicrypt: zero–knowledge proof và rộng hơn là các chứng minh tương tác (interactive proofs), chữ ký điện tử, khả năng thiết lập mọi trò chơi ảo như oẳn tù tì qua điện thoại...

Chính thế mà đôi lúc chúng ta nên giả vờ sống ở một thế giới ảo, và ngoài sự sung sướng được sống trong thế giới kỳ bí đó, thì khi quay trở lại thế giới thực ta còn có khi mang về những sáng tạo thực mà nếu sống mãi trong thế giới thực ta sẽ không thể tạo ra chúng.

Alice ở Xứ sở Diệu kỳ

- CHUYỆN CHƯA KỂ -

Nguyễn Thị Nhung - Phan Thanh Hồng

Alice cảm thấy rất bất an, cô vẫn chưa tìm được thuốc uống cho người nhỏ lại mà anh Thợ Làm Mũ thì cũng không thấy đâu cả. Bỗng nghe thấy tiếng ồn ào, Alice nhòm vào một khung cửa sổ của lâu đài thấy Hoàng hậu Q Cơ đang rất bực tức, mặt mũi đỏ gay, còn anh thợ đang nằm sấp dưới sàn nhà. Hoàng hậu thét lên như mỗi lần bà ta phật ý:

– Đem hắn chém đầu cho ta!

– Xin Hoàng hậu tha tội, xin người cho tôi cơ hội chuộc lỗi.

"Anh ta làm hỏng mũ của Hoàng hậu, phen này chết chắc rồi." Thỏ Trắng thình lình xuất hiện thì thào. "Chỉ vì một chiếc mũ thôi sao?" Alice bất bình nói.

– Chuộc lỗi hả? Xem nào, xem nào... Ta cho ngươi một tấm vải mới, trong ngày hôm nay phải làm xong ba chiếc mũ.

– Thưa vâng ạ.

– Từ từ! Trước hết ngươi phải chia miếng vải ra ba phần như nhau, ngay bây giờ. Mảnh vải hình chữ nhật này rộng 1 mét và dài căn bậc 2 của 2 mét. Ngươi làm ta xem!

Người hầu đặt trước mắt anh Thợ Làm Mũ tấm vải và một cây kéo.

– Chao ôi, căn bậc hai của hai là gì chứ! Thật điên rồ! Anh thợ thốt lên.

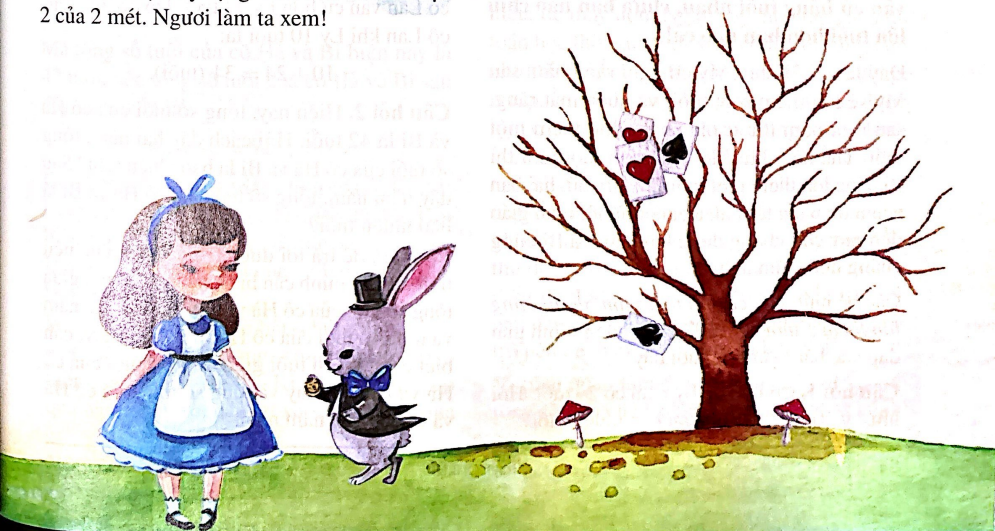
Một ý nghĩ thoáng vụt qua trong đầu, Alice bảo thỏ trắng: "Tôi phải vào đó giúp anh ấy, tôi đã từng làm việc này trên những tờ giấy A4".

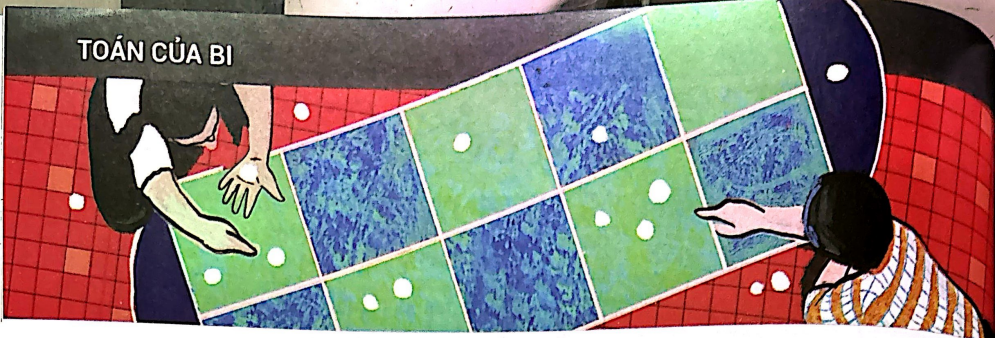
– Cô bảo sao? Không được đâu! Hoàng hậu sẽ chém... Thỏ Trắng cuống quýt đuổi theo Alice đã bỏ xa mình.

Các bạn biết không, bây giờ Alice đang cùng anh Thợ Làm Mũ gấp rút làm cho xong ba chiếc mũ cho Hoàng hậu. Riêng Thỏ trắng thì không tập trung được.

– Tôi thấy cách cô làm, nhưng tôi cần một chứng minh, một chứng minh. Thỏ Trắng lẩm bẩm tự nói với mình.

Các bạn có biết Alice đã chia mảnh vải giúp anh thợ như thế nào không? Hãy giải đáp cho Thỏ Trắng nhé.





LTS. *Ở trường, ở lớp, và ngay cả . . . ở nhà, các bé đã được dạy về cách dùng sơ đồ đoạn thẳng để giải các bài tập toán. Nhưng, vì sao lại dùng sơ đồ đoạn thẳng để giải các bài tập ấy nhỉ? Các bé đã thành thục kĩ năng vẽ sơ đồ đoạn thẳng chưa? Bài viết dưới đây sẽ giúp các bé tìm ra lời giải đáp cho câu hỏi vừa nêu; và đồng thời, giúp các bé rèn luyện kĩ năng vẽ các sơ đồ đoạn thẳng. Các câu hỏi trong bài viết không chỉ giúp các bé ôn luyện cách giải các bài toán tính tuổi, mà còn giúp các bé ôn lại cách giải một số dạng bài toán. Nào, chúng mình cùng đọc bài viết nha.*

SƠ ĐỒ ĐOẠN THẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN TÍNH TUỔI

Đào Thị Thu Hà, Nguyễn Thị Mai Anh, Vũ Thị Hà, Phạm Thị Hương

Hồi còn học mẫu giáo, My có lần tức Bi quá, đã nói: "Bi cứ chờ đến năm sau, tớ sẽ lớn hơn Bi, là chị của Bi cho mà xem". Bi cười phá lên, nói lại: "Ừ thì cứ chờ xem". Thế mà đến tận bây giờ, khi cả hai học chung với nhau ở Tiểu học rồi, Bi và My vẫn cứ bằng tuổi nhau, chưa bạn nào chịu lớn tuổi hơn bạn nào cả!

Đấy là vì hồi nhỏ, My cứ nghĩ rằng năm sau My sẽ lớn thêm một tuổi, và quên mất rằng, sau một năm thì ai mà chẳng lớn thêm một tuổi. Thế nên, khi My lớn thêm một tuổi thì Bi cũng lớn thêm một tuổi. Thành thử, hai bạn vẫn luôn bằng tuổi nhau, suốt từ hồi mẫu giáo đến giờ; My chẳng được làm chị, và Bi cũng chẳng được làm anh.

Các bé nhớ nha, *cứ sau một năm, thì ai cũng lớn thêm 1 tuổi cả*. Bí kíp để chúng mình giải đáp các bài toán tính tuổi đấy!

Câu hỏi 1. Cô Lan đẻ Ly năm cô 24 tuổi. Hỏi khi Ly 10 tuổi, thì cô Lan bao nhiêu tuổi?

Câu hỏi này quá đơn giản, các bé nhỉ.

Theo bí kíp trên đây, cứ sau một năm, cả cô Lan và Ly, ai cũng lớn thêm 1 tuổi. Vì thế, sau mỗi năm, chênh lệch tuổi giữa cô Lan và Ly không hề thay đổi. Vậy nên, khi Ly mới sinh ra, cô Lan hơn Ly 24 tuổi, thì khi Ly 10 tuổi, cô Lan vẫn cứ hơn Ly 24 tuổi. Do đó, tuổi của cô Lan khi Ly 10 tuổi là:

$$10 + 24 = 34 \text{ (tuổi)}.$$

Câu hỏi 2. Hiện nay, tổng số tuổi của cô Hà và Bi là 42 tuổi. Hỏi cách đây hai năm, tổng số tuổi của cô Hà và Bi là bao nhiêu tuổi? Sau đây năm năm, tổng số tuổi của cô Hà và Bi là bao nhiêu tuổi?

Rõ ràng, để trả lời được hai câu hỏi vừa nêu trên, chúng mình cần biết chênh lệch tuổi giữa tổng số tuổi của cô Hà và Bi cách đây hai năm và tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay; cần biết chênh lệch tuổi giữa tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay và tổng số tuổi của cô Hà và Bi sau đây năm năm.

Theo bí kíp thì sau mỗi năm, tuổi của mỗi người sẽ tăng thêm một tuổi. Vì thế, tuổi của cô Hà hiện nay sẽ nhiều hơn tuổi của cô Hà cách đây một năm đúng một tuổi, và ít hơn tuổi của cô Hà sau đây một năm đúng một tuổi; với Bi cũng như vậy, nghĩa là, tuổi của Bi hiện nay sẽ nhiều hơn tuổi của Bi cách đây một năm đúng một tuổi, và ít hơn tuổi của Bi sau đây một năm đúng một tuổi. Như thế:

– Tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay nhiều hơn tổng số tuổi của cô Hà và Bi cách đây một năm là:

$$1 \times 2 = 2 \text{ (tuổi)}.$$

Do đó, tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay nhiều hơn tổng số tuổi của cô Hà và Bi cách đây hai năm là:

$$2 \times 2 = 4 \text{ (tuổi)}.$$

Mà tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay là 42 tuổi, nên tổng số tuổi của cô Hà và Bi cách đây hai năm là:

$$42 - 4 = 38 \text{ (tuổi)}.$$

– Tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay ít hơn tổng số tuổi của cô Hà và Bi sau đây một năm là:

$$1 \times 2 = 2 \text{ (tuổi)}.$$

Do đó, tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay ít hơn tổng số tuổi của cô Hà và Bi sau đây năm năm là:

$$2 \times 5 = 10 \text{ (tuổi)}.$$

Mà tổng số tuổi của cô Hà và Bi hiện nay là 42 tuổi, nên tổng số tuổi của cô Hà và Bi sau đây năm năm là:

$$42 + 10 = 52 \text{ (tuổi)}.$$

Câu hỏi 3. Năm năm trước, tuổi của cô Hương bằng tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki. Hỏi hiện nay, chênh lệch tuổi giữa tuổi của cô Hương và tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki là bao nhiêu tuổi?

Với câu hỏi này, trước hết, chúng mình cần biết tuổi của cô Hương, cũng như tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki, thay đổi ra sao qua năm năm, rồi căn cứ vào đó để biết qua năm năm, chênh lệch tuổi giữa tuổi của cô Hương và tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki thay đổi thế nào, phải không các bé? Từ việc giải đáp Câu hỏi 2, chúng mình biết rằng, qua năm năm, tuổi của cô Hương sẽ tăng thêm 5 tuổi, còn tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki sẽ tăng thêm:

$$3 \times 5 = 15 \text{ (tuổi)}.$$

Như thế, qua năm năm, tổng số tuổi được tăng thêm của ba bạn Bi, Ti, Ki nhiều hơn số tuổi được tăng thêm của cô Hương là:

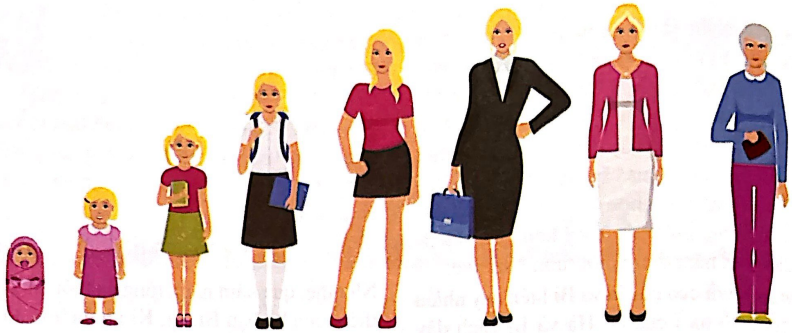
$$15 - 5 = 10 \text{ (tuổi)}.$$

Vì vậy, do năm năm trước đây, tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki bằng số tuổi của cô Hương, nên hiện nay, tổng số tuổi của ba bạn ấy nhiều hơn tuổi của cô Hương là 10 tuổi.

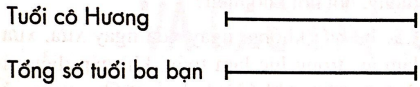
Hình như ở chỗ này, các bé cảm thấy có cái gì đó hơi hơi khó hình dung, hơi hơi khó tưởng tượng, hơi hơi khó hiểu?

Các bé biết không, ngày xửa ngày xưa, xưa lắm ấy, trong lúc làm toán, khi gặp điều gì đó trừu tượng, khó hình dung, tưởng tượng ở trong đầu, các nhà toán học đã đều tìm cách thể hiện những điều ấy bằng các hình vẽ (vẽ trên mặt đất, vẽ trên mặt giấy, ...), để có thể nhìn thấy bằng mắt những điều mình đang hình dung, tưởng tượng trong đầu khi suy nghĩ. Bằng cách ấy, các nhà toán học đã làm cho những điều khó hiểu, khó thấy trở nên dễ hiểu, dễ thấy hơn. Ngày nay, học tập các nhà toán học thời xửa thời xưa, chúng ta cũng làm như thế khi học toán, làm toán đấy. Ở trường, ở lớp, rồi có lúc ngay ở nhà, các bé đã được học cách dùng sơ đồ đoạn thẳng, dùng hình vẽ, ... để giải các bài tập toán, nhất là các bài tập mà chúng mình hơi khó hình dung, tưởng tượng trong đầu những điều đề bài cho. Đúng không nào? Thế nên, bây giờ chúng mình sẽ thử dùng sơ đồ đoạn thẳng để thể hiện những điều đã được trình bày trên đây, khi tìm lời giải đáp cho Câu hỏi 3, xem những điều ấy có trở nên dễ thấy, dễ hiểu hơn không nha.

Vì phải quan tâm đến tuổi của cô Hương và tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki, nên chúng

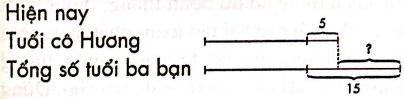


mình sẽ thể hiện tuổi của cô Hương năm năm trước bằng một đoạn thẳng, và tổng số tuổi của ba bạn ấy năm năm trước bằng một đoạn thẳng khác. Vì trước đây năm năm, tuổi của cô Hương bằng tổng số tuổi của ba bạn nên chúng mình có hai đoạn thẳng bằng nhau:



Hình 1

Tiếp theo, chúng mình sẽ nối thêm vào đoạn thẳng, thể hiện tuổi của cô Hương năm năm trước, một đoạn thẳng, thể hiện số tuổi cô được cộng thêm sau năm năm, để có được một đoạn thẳng thể hiện tuổi của cô hiện nay. Sau đó, chúng mình lại làm đúng như thế, đối với đoạn thẳng thể hiện tổng số tuổi của ba bạn Bi, Ti, Ki. Bằng cách này, từ sơ đồ ở Hình 1, chúng mình sẽ có sơ đồ sau:



Hình 2

Nhìn sơ đồ trên, chúng mình thấy ngay, chênh lệch tuổi giữa tuổi của cô Hương hiện nay và tổng số tuổi của ba bạn hiện nay đúng bằng chênh lệch tuổi giữa số tuổi cô Hương được cộng thêm sau năm năm và số tuổi cả ba bạn được cộng thêm sau năm năm. Đúng không nào? Thật là dễ thấy, phải không các bé?

Để củng cố, hiểu kĩ hơn những điều vừa trao đổi trên đây, các bé hãy tự mình giải đáp câu hỏi sau nhé.

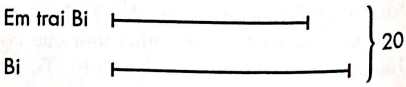
Câu hỏi 4. Cách đây ba năm, tuổi của bố Bi hơn tổng số tuổi của hai mẹ con Bi 1 tuổi. Hỏi sau đây ba năm, chênh lệch tuổi của bố Bi và tổng số tuổi của hai mẹ con Bi là bao nhiêu tuổi?

Tiếp theo, chúng mình sẽ giúp Bi giải đáp các câu hỏi dưới đây nha.

Câu hỏi 5. Hiện nay, em trai Bi kém Bi 2 tuổi. Hỏi khi tổng số tuổi của hai anh em là 20, thì em trai Bi mấy tuổi, và Bi mấy tuổi?

Thấy được lợi thế của sơ đồ đoạn thẳng rồi, nên chúng mình sẽ dùng sơ đồ đoạn thẳng để tìm ra lời giải đáp cho câu hỏi này nhé.

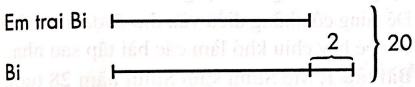
Vì quan tâm đến tuổi của hai anh em Bi lúc tổng số tuổi của hai người là 20 nên chúng mình sẽ thể hiện tuổi của mỗi người lúc ấy bằng một đoạn thẳng. Vì tuổi của Bi nhiều hơn (do Bi là anh mà) nên đoạn thẳng thể hiện tuổi của Bi phải dài hơn đoạn thẳng thể hiện tuổi của em Bi:



Hình 3

Vấn đề bây giờ là, trong câu hỏi có cho một thông tin về chênh lệch tuổi của hai anh em Bi, mà chúng mình chưa thể hiện được thông

tin ấy trên sơ đồ. Đọc lại câu hỏi, chúng mình thấy, chênh lệch tuổi hiện nay của hai anh em Bi là 2 tuổi, còn sơ đồ lại thể hiện tuổi của hai anh em lúc tổng số tuổi của hai người là 20 tuổi. Vậy nên điều chúng mình cần làm là dựa vào chênh lệch tuổi hiện nay để xác định chênh lệch tuổi lúc tổng số tuổi của hai người là 20 tuổi. Điều này dễ ợt, các bé nhỉ? Vì chúng mình có bí kíp mà (bé nào quên thì xem lại bí kíp ở phần đầu của bài viết này nha)! Theo bí kíp, vì sau mỗi năm, mỗi người đều được thêm 1 tuổi, nên *chênh lệch tuổi giữa hai người sẽ không hề thay đổi theo năm, tháng*. Vì thế, chênh lệch tuổi của hai anh em Bi lúc tổng số tuổi của hai người là 20 vẫn cứ là 2 tuổi, như hiện nay. Do đó, từ sơ đồ ở Hình 3, chúng mình có sơ đồ sau, thể hiện tuổi của Bi và em trai Bi, lúc tổng số tuổi của hai người là 20 tuổi:



Nhìn sơ đồ, chúng mình thấy ngay, hai lần tuổi của em trai Bi bằng:

$$20 - 2 = 18 \text{ (tuổi)}.$$

Vì vậy, khi tổng số tuổi của hai anh em là 20 tuổi, thì tuổi của em trai Bi là:

$$18 : 2 = 9 \text{ (tuổi)};$$

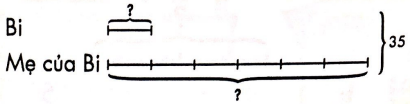
và tuổi của Bi là:

$$9 + 2 = 11 \text{ (tuổi)}.$$

Câu hỏi 6. Hiện nay, tổng số tuổi của hai mẹ con Bi là 35 tuổi, và tuổi của mẹ gấp 6 lần tuổi của Bi. Hỏi hiện nay, Bi mấy tuổi, và mẹ Bi bao nhiêu tuổi?

Với câu hỏi này, khi vẽ sơ đồ đoạn thẳng, chúng mình cần lưu ý vẽ sao cho đoạn thẳng thể hiện tuổi của mẹ Bi dài gấp 6 lần độ dài đoạn thẳng thể hiện tuổi của Bi nhé (vì tuổi của mẹ gấp 6 lần tuổi của Bi mà).

Chúng mình có sơ đồ sau:



Nhìn sơ đồ, chúng mình thấy, nếu coi tuổi của Bi hiện nay là một phần tuổi, thì tuổi của mẹ Bi hiện nay sẽ là 6 phần tuổi. Do đó, tổng số tuổi của hai mẹ con Bi hiện nay sẽ là:

$$1 + 6 = 7 \text{ (phần tuổi)}.$$

Mà tổng số tuổi của hai mẹ con Bi hiện nay là 35 tuổi, nên 35 tuổi chính là 7 phần tuổi, tức, là 7 lần tuổi của Bi hiện nay. Vì thế, tuổi của Bi hiện nay là:

$$35 : 7 = 5 \text{ (tuổi)};$$

và tuổi của mẹ Bi hiện nay là:

$$5 \times 6 = 30 \text{ (tuổi)}.$$

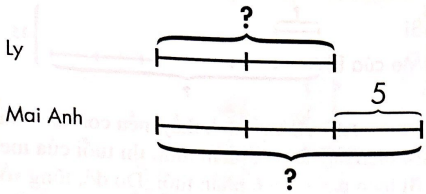
Câu hỏi 7. Cách đây ba năm, tổng số tuổi của hai mẹ con My là 39 tuổi. Hiện nay, tuổi của mẹ My gấp 4 lần tuổi của My. Hỏi hiện nay, My mấy tuổi, và mẹ My bao nhiêu tuổi?

Từ việc đi tìm lời giải đáp cho Câu hỏi 2, và cả các Câu hỏi 3, 4, chúng mình hiểu rằng, khi biết tổng số tuổi của hai mẹ con My cách đây ba năm thì chúng mình sẽ xác định được tổng số tuổi của hai mẹ con My hiện nay. Và một khi đã biết tổng số tuổi của hai mẹ con My hiện nay thì cách tìm ra lời giải đáp cho Câu hỏi 7 đâu có khác gì cách tìm ra lời giải đáp cho Câu hỏi 6. Thế nên, các bé hãy tự mình tìm ra lời giải đáp cho Câu hỏi 7 nha.

Câu hỏi 8. Hiện nay, chị Mai Anh hơn Ly 5 tuổi, và tuổi của Ly bằng 2/3 tuổi của chị Mai Anh. Hỏi hiện nay Ly mấy tuổi và chị Mai Anh mấy tuổi?

Theo các bé, nếu chúng mình vẽ sơ đồ đoạn thẳng cho câu hỏi này thì độ dài của hai đoạn thẳng, một đoạn thể hiện tuổi của chị Mai Anh và một đoạn thể hiện tuổi của Ly, phải có quan hệ với nhau như thế nào nhỉ?

Đúng rồi, các bé trả lời đúng rồi đấy. Đoạn thẳng thể hiện tuổi của Ly chỉ dài bằng 2/3 đoạn thẳng thể hiện tuổi của chị Mai Anh thôi (vì tuổi của Ly bằng 2/3 tuổi của chị Mai Anh mà).



Nhìn sơ đồ, chúng mình thấy, nếu coi phần chênh lệch tuổi giữa tuổi của chị Mai Anh và tuổi của Ly là một phần tuổi thì tuổi của Ly sẽ là hai phần tuổi. Từ đó, vì một phần tuổi là 5 tuổi nên tuổi của My hiện nay là:

$$5 \times 2 = 10 \text{ (tuổi)};$$

và tuổi của chị Mai Anh hiện nay là:

$$10 + 5 = 15 \text{ (tuổi)}.$$

Câu hỏi 9. Chị Ly nói với Bi: "Mẹ chị sinh anh chị năm 32 tuổi. Bi biết không, 12 năm nữa, tuổi của mẹ chị sẽ gấp đôi tuổi của anh chị. Đố Bi biết năm nay mẹ chị bao nhiêu tuổi?"

"Mẹ chị sinh anh chị năm 32 tuổi". Thế tức là mẹ chị Ly hơn anh chị Ly 32 tuổi.

Ở trên, chúng mình đã biết, chênh lệch tuổi giữa hai người không thay đổi theo thời gian. Vì thế, sau 12 năm nữa, mẹ chị Ly vẫn cứ hơn anh chị Ly 32 tuổi! Biết thế này rồi thì cách tìm ra lời giải đáp cho Câu hỏi 9 đâu có khác gì cách tìm ra lời giải đáp cho Câu hỏi 8, các bé nhỉ? Các bé tự mình tìm ra lời giải đáp cho Câu hỏi 9 nha.

Thế là chúng mình đã cùng nhau tìm lời giải đáp cho 9 câu hỏi rồi. Đã đến lúc nhìn nhận lại, xem chúng mình đã thu hoạch được gì, từ việc giải đáp 9 câu hỏi ấy.

Thứ nhất, chúng mình đã biết một bí kíp quan trọng, giúp giải đáp những câu hỏi về tính toán tuổi tác. Chẳng hạn, nhờ bí kíp ấy, chúng mình đã hiểu tại sao hiệu số tuổi (hay còn gọi là chênh lệch tuổi) của hai người không hề thay đổi theo năm tháng. Hay như, nhờ bí kíp ấy, chúng mình đã biết cách xác định tổng số tuổi của một nhóm người ở một năm tùy ý, khi biết tổng số tuổi của nhóm người ấy ở một năm nào đó; ....

Thứ hai, chúng mình đã thấy rằng, phương pháp sơ đồ đoạn thẳng giúp được chúng mình rất nhiều trong việc giải các bài tập toán. Nhờ có sơ đồ đoạn thẳng, chúng mình sẽ hình dung được bài toán rõ hơn, dễ dàng nhìn ra được những mối quan hệ giữa các đại lượng được cho trong đề bài, ...

Thứ ba, việc giải đáp các câu hỏi trên đây đã giúp chúng mình ôn tập cách giải các bài toán thuộc các dạng: tìm hai số khi biết tổng và hiệu của chúng (nói vắn tắt là, *tìm hai số khi biết tổng và hiệu*), tìm hai số khi biết tổng số và tỉ số của chúng (nói vắn tắt là, *tìm hai số khi biết tổng và tỉ*), tìm hai số khi biết hiệu số và tỉ số của chúng (nói vắn tắt là, *tìm hai số khi biết hiệu và tỉ*). Các bé hãy tìm xem, trong các câu hỏi ở trên, câu hỏi nào thuộc dạng nào, trong các dạng vừa nêu.

Để củng cố những điều vừa thu được nêu trên, các bé hãy chịu khó làm các bài tập sau nha.

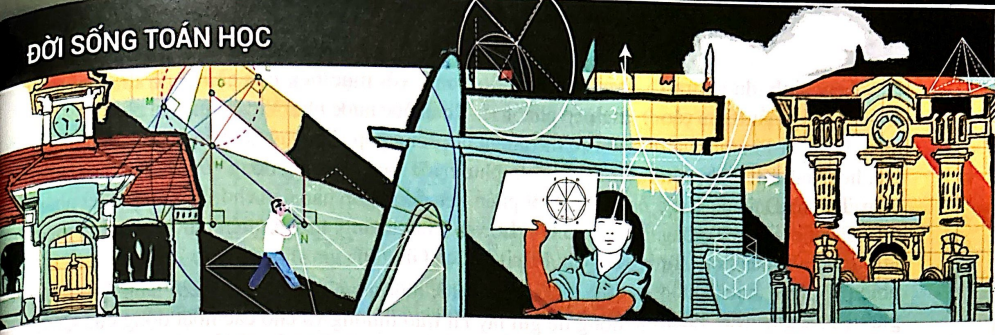
Bài tập 1. Mẹ Sumi sinh Sumi năm 28 tuổi. Hỏi khi tổng số tuổi của hai mẹ con Sumi là 40 tuổi thì Sumi mấy tuổi và mẹ Sumi bao nhiêu tuổi?

Bài tập 2. Hiện nay, tổng số tuổi của hai chị em là 25 tuổi. Cách đây năm năm, tuổi của em bằng một nửa tuổi của chị. Hỏi hiện nay chị mấy tuổi và em mấy tuổi?

Bài tập 3. Hiện nay, tuổi của bố gấp 5 lần tuổi của con. Biết rằng, khi con bằng tuổi của bố hiện nay, thì tổng số tuổi của hai bố con là 98 tuổi. Hỏi hiện nay con mấy tuổi?

Bài tập 4. Năm năm trước, tuổi của bố Ly bằng năm lần tổng số tuổi của hai chị em Ly. Sau đây một năm, tuổi của của bố Ly chỉ còn bằng hai lần tổng số tuổi của hai chị em Ly. Hỏi năm nay, bố Ly bao nhiêu tuổi?

Bài tập 5 (Bài thi MYTS năm 2018). Có hai bình đựng nước, I và II. Đầu tiên, Hải rót 1/3 số lít nước ở bình I sang bình II. Sau đó, Hải rót 10 lít nước từ bình II sang bình I. Bây giờ, số lít nước ở bình I gấp đôi số lít nước ở bình II. Hỏi ban đầu bình II có bao nhiêu lít nước?



Giải thưởng Lê Văn Thiêm và Chủ tịch đầu tiên - Giáo sư Hà Huy Khoái

Lê Tuấn Hoa [1]

SƠ LƯỢC LỊCH SỬ HÌNH THÀNH GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM

Giáo sư Lê Văn Thiêm (1918–1991) là Chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học Việt Nam. Là một trong những người đặt nền móng cho nền giáo dục đại học ở nước ta, Ông đã có những đóng góp to lớn trong nghiên cứu và ứng dụng toán học, là người thầy của nhiều thế hệ các nhà toán học Việt Nam. GS. Lê Văn Thiêm luôn giành sự quan tâm đặc biệt đến việc giảng dạy toán học ở các trường phổ thông. Ông đã được Nhà nước tặng Huân chương Độc lập hạng nhất và Giải thưởng Hồ Chí Minh. Giải thưởng Lê Văn Thiêm do Hội Toán học Việt Nam đặt ra nhằm góp phần ghi nhận những thành tích xuất sắc của những thầy giáo, cô giáo và học sinh phổ thông trong việc dạy Toán và học Toán giỏi. Giải thưởng cũng là sự ghi nhận công lao của GS. Lê Văn Thiêm, một nhà toán học lớn, một người thầy đã hết lòng vì sự nghiệp giáo dục [1].

Ý tưởng thành lập và trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm được Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam đưa ra từ năm 1989. Đích thân GS. Đỗ Long Vân, khi đó là Tổng thư ký Hội, đã vào thăm GS. Lê Văn Thiêm ở TP. Hồ Chí Minh để thông báo và xin phép Giáo sư về việc này. Giáo sư đã vui vẻ nhận lời [2].

[1] *Viện Toán học, Chủ tịch Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm.*

Hai học sinh được trao Giải thưởng đầu tiên vào năm 1990 là Phạm Xuân Du, học sinh Khối chuyên toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội) và Phan Thị Hà Dương, học sinh trường THPT Hà Nội – Amsterdam, Hà Nội.

Tuy nhiên, vì không có nguồn kinh phí để trao nên Giải thưởng bị gián đoạn, đến năm 1997 mới được tổ chức trao lại. Từ đó đến nay, Giải thưởng được trao đều đặn hàng năm, vào dịp đón Xuân hàng năm của Hội Toán học Việt Nam. Tổng cộng đã có 106 giải thưởng được trao cho 27 thầy cô giáo và 79 học sinh. Danh sách chi tiết xem [3].

QUỸ LÊ VĂN THIÊM

Giải thưởng Lê Văn Thiêm được duy trì và trao đều đặn từ năm 1997 là nhờ có Quỹ Lê Văn Thiêm. Quỹ được thành lập năm 1997. Đó cũng là năm Thông tin Toán học ra đời – làm cầu nối cho các hoạt động của Hội Toán học Việt Nam.

Quỹ Lê Văn Thiêm được thành lập theo quyết định của Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam, nhằm động viên sự đóng góp vật chất của các nhà toán học, các tập thể, cơ quan nhiệt tình với việc khuyến khích thầy và trò phổ thông dạy và học tốt môn Toán, với mục tiêu cao cả hơn là thúc đẩy sự nghiệp phát triển Toán học nước nhà. Vì vậy, một cá nhân hay tập thể có thể nhiều lần đóng góp cho Quỹ. Số tiền ủng hộ nhiều hay ít là tùy tâm, phụ thuộc vào khả năng đóng góp và đều được trân trọng. Một phần tiền đóng góp ban đầu cho Quỹ là do Phu nhân của cố GS. Lê văn Thiêm tặng, trích từ tiền thưởng Giải thưởng Hồ Chí Minh của cố Giáo sư.

Đặc biệt, năm 2015, một doanh nhân (giấu tên) tặng Quỹ 1 tỷ đồng để gửi lấy lãi trao thưởng và cho các hoạt động của Quỹ. Từ đó, Quỹ có nguồn tài chính ổn định. Tuy nhiên, với tinh thần không thay đổi của Quỹ là khích lệ sự hưởng ứng của cộng đồng toán học và các doanh nhân, cơ quan, tổ chức đối với sự phát triển của Toán học Việt Nam, Quỹ vẫn thiết tha mong tiếp tục nhận được sự ủng hộ rộng khắp. Danh sách ủng hộ Quỹ được cập nhật trên trang web của Hội (xem [1]).

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG GIẢI THƯỞNG VÀ QUỸ LÊ VĂN THIÊM

Giải thưởng và Quỹ Lê Văn Thiêm do Chủ tịch Hội đồng Giải thưởng phụ trách – người do Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam chỉ định. Tham gia Hội đồng xét Giải thưởng thường có Chủ tịch và Phó chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Toán học, cùng với 1–2 thành viên khác do Chủ tịch Hội đồng Giải thưởng mời. Từ khi thành lập đến năm 2018, Chủ tịch Hội đồng Giải thưởng là Giáo sư Hà Huy Khoái.

GS. Hà Huy Khoái là một trong những thành viên đầu tiên của Viện Toán học. Ông học Đại học Tổng hợp Hà Nội, được trực tiếp nghe GS. Lê Văn Thiêm giảng bài. Năm 1978, ông bảo vệ luận án Tiến sĩ tại Viện Toán học Steklov nổi tiếng thuộc Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô, dưới sự hướng dẫn của một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất và cũng có ảnh hưởng nhất thế giới trong mấy chục năm qua là GS. I. Manin. Cũng tại đó, ông bảo vệ luận án Tiến sĩ Khoa học vào năm 1984. Hướng nghiên cứu của Ông là Giải tích p–adic và Giải tích phức. Ông được phong Phó Giáo sư năm 1983 và Giáo sư năm 1991. Được bầu là Viện sĩ Viện Hàn lâm thế giới thứ ba – nay là Viện Hàn lâm Thế giới vì sự tiến bộ khoa học của các nước đang phát triển (TWAS) – vào năm 2004. Ông là Viện trưởng Viện Toán học nhiệm kì 2001 – 2007, Chủ tịch Hội đồng Chức danh Giáo sư ngành Toán từ năm 2009 – 2018. Năm 2012, sau khi nghỉ hưu ở Viện Toán học, ông chuyển sang làm việc tại Đại học Thăng Long. Tại đó, ông đã và đang dành nhiều tâm huyết để xây dựng Đại học Thăng Long thành một cơ sở giảng dạy và nghiên cứu tốt về Toán và ứng dụng Toán học.

Hơn hai mươi năm tham gia Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam, một trong những đóng góp to lớn nhất của ông là vận động

xây dựng và phát triển Quỹ Lê Văn Thiêm, tổ chức tốt việc trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm hàng năm. Nghe có vẻ đơn giản, nhưng thực ra là những công việc cực kỳ khó khăn. Quỹ Lê Văn Thiêm ra đời trong hoàn cảnh kinh tế khó khăn, và nền Toán học đứng trước nguy cơ bị tan rã. Với uy tín cao trong cộng đồng, cộng với tài năng thuyết phục, vận động hiếm có, ông đã từng bước vận động được rất nhiều người ủng hộ Quỹ. Với tinh thần nhiều ít đều quý, đến nay đã có gần 200 lượt người ủng hộ Quỹ, có người ủng hộ ba bốn lần. Chú ý cả diện rộng lẫn chiều sâu, sự diễn thuyết thấu tình đạt lý của ông đã mê hoặc nhiều người, mà đỉnh cao là năm 2015 một doanh nhân thành đạt – vốn là một học sinh giỏi Toán – đã ủng hộ Quỹ một số tiền rất lớn, làm cơ sở trường tồn cho Quỹ. Lại vẫn lấy tinh thần của Quỹ là ủng hộ vô tư, nên doanh nhân đó đề nghị được giấu tên – cho dù vẫn đều đặn quan sát sự hoạt động của Quỹ và Giải thưởng.

Việc trao Giải thưởng sao cho những người được trao là xứng đáng – để qua đó mới khích lệ phong trào học Toán và dạy Toán – là một việc làm công phu. Không hành chính, hàng năm ông phải theo dõi phong trào và thành tích học Toán ở các trường, trực tiếp liên hệ với các cơ sở để biết rõ các ứng viên. Trên cơ sở đó, mời những chuyên gia có uy tín cùng dự phiên họp để nghiên cứu hồ sơ và trao giải thưởng. Giải thưởng có quy định cơ cấu, tổ chức giải rõ ràng. Đó là mỗi năm trao từ một đến hai giáo viên và từ hai đến bốn học sinh có thành tích xuất sắc, trong đó có một giải thưởng giành cho học sinh vượt khó khăn đạt thành tích cao trong học Toán. Mỗi người chỉ được trao Giải thưởng một lần. Mười năm gần đây, Hội đồng Giải thưởng quyết định: ứng viên là học sinh đạt thành tích xuất sắc năm lớp 12, thì khi xét phải đang theo học ngành Toán. Tuy nhiên, với tinh thần khuyến khích tài năng là chủ đạo, Giải thưởng được trao một cách linh hoạt. Vì vậy có năm hai thầy, cô được trao, nhưng có năm không có giáo viên nào; có năm tới sáu học sinh được giải, nhưng có năm chỉ một. Nhìn vào danh sách những học sinh được trao giải, ta có thể tự hào thấy các em thuộc các địa phương trải dài khắp các tỉnh từ Bắc tới Nam. Nhiều người được trao giải giờ đây đã trở thành những nhà khoa học có tên tuổi. Điểm qua có thể thấy những cái tên: PGS. Phan Thị Hà Dương (Giải năm 1990; hiện ở Viện Toán học), TS. Đỗ Quốc Anh (1997, Pháp), TS Lê Quang Nẫm (1998, Mỹ), PGS. Lê Thái Hoàng (1999, Mỹ), PGS. Lê Anh Vinh (2001, Viện Khoa học Giáo dục), TS. Lê Hùng Việt Bảo (2003, Mỹ) và nhiều người khác mà người viết không biết hết – và cũng không thể điểm hết.

Tặng hoa và quà lưu niệm cảm ơn GS. Hà Huy Khoái sau hơn hai mươi năm làm Chủ tịch Quỹ (Từ trái: Vũ Hoàng Linh, Vợ chồng GS. Hà Huy Khoái, Ngô Việt Trung, Lê Tuấn Hoa)
Nguồn: Ngô Việt Trung

Thành quả trên có lẽ là niềm vui và động viên lớn nhất giúp GS. Hà Huy Khoái đảm nhiệm vị trí này trên 20 năm – có thể nói là một người không thể thay thế. Tuy nhiên, cuối năm 2018, ông kiên quyết từ nhiệm để Ban Chấp hành Hội chỉ định người khác phụ trách, nhằm tạo tiền đề phát triển vững chắc tiếp theo cho Quỹ. Trong buổi Gặp mặt đầu Xuân Kỷ Hợi của Hội Toán học Việt Nam diễn ra vào ngày 24 tháng 2 năm 2019, GS. Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, đã thay mặt Hội phát biểu cảm ơn sự đóng góp lớn lao và lâu dài của GS. Hà Huy Khoái.

GIẢI THƯỞNG NĂM 2018

Năm 2018, Giải thưởng được trao cho một thầy giáo và ba học sinh:

Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2018
(Từ trái: Nguyễn Quang Bin, Ngô Thị Huế, thầy Huỳnh Chí Hào, Đỗ Hoàng Việt)
Nguồn: Ngô Việt Trung.

1. Thầy Huỳnh Chí Hào, giáo viên Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu, tỉnh Đồng Tháp. Dạy chuyên Toán từ năm 1990. Đã tham gia bồi dưỡng được bảy học sinh đạt Giải quốc gia (hai giải nhì, hai giải ba, ba giải khuyến khích). Đặc biệt, năm 2018 có một học sinh (bạn Đỗ Hoàng Việt), học sinh đầu tiên tại Đồng Tháp, đạt Huy chương Đồng Olympic toán quốc tế IMO.

2. Nguyễn Quang Bin, Lớp 12 Chuyên Toán ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội. Hai lần Giải nhì Kỳ thi học sinh giỏi Toán quốc gia năm học 2016–2017 và 2017–2018. Đặc biệt, đạt Huy chương Vàng Olympic toán quốc tế IMO 2018. Hiện đang học tại Khoa Toán, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG Hà Nội.

3. Đỗ Hoàng Việt, Lớp 12 Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu, tỉnh Đồng Tháp. Hai lần Giải nhì Kỳ thi học sinh giỏi Toán quốc gia năm học 2016–2017 và 2017–2018. Đặc biệt, đạt Huy chương Đồng Olympic toán quốc tế IMO 2018 – là học sinh đầu tiên của Đồng Tháp đạt thành tích này. Hiện đang học tại Khoa Toán, ĐH Khoa học tự nhiên – ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

4. Ngô Thị Huế, Lớp 12 Trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội. Mặc dù hoàn cảnh gia đình khó khăn, đã cố gắng khắc phục để học giỏi. Giải nhì Kỳ thi học sinh giỏi Toán quốc gia năm học 2017–2018. Hiện đang học tại Khoa Toán, ĐH Sư phạm Hà Nội.

Chú thích:

[1] http://vms.org.vn/index.php/vi/gioi-thieu/giai-thuong-le-van-thiem.html và Thông tin Toán học, Tập 1 số 1 (1997), 6–7.

[2] Đỗ Long Vân, "Quá trình thành lập Giải thưởng Lê Văn Thiêm". http://vms.org.vn/index.php/vi/gioi-thieu/giai-thuong-le-van-thiem

[3] Danh sách những người được tặng Giải thưởng Lê Văn Thiêm. http://vms.org.vn/index.php/vi/gioi-thieu/giai-thuong-le-van-thiem/item/1089-danh-sach-nhung-nguoi-duoc-tang-giai-thuong-le-van-thiem.html

[4] Danh sách những người ủng hộ Quỹ Lê Văn Thiêm. http://vms.org.vn/index.php/vi/gioi-thieu/giai-thuong-le-van-thiem/itemlist/category/215-quy-le-van-thiem.html

HỘI THẢO "Trường hè Toán học: Kinh nghiệm Việt Nam và thế giới"

Năm 2010, Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010–2020 được phê duyệt với mục tiêu phát triển nền Toán học Việt Nam đa dạng, bền vững và mạnh mẽ về mọi mặt. Một trong những mục tiêu cụ thể đó là: Nâng cao chất lượng và quy mô đào tạo học sinh giỏi Toán ở các trường phổ thông, đặc biệt là ở các trường chuyên, và có hình thức thích hợp đào tạo tiếp học sinh giỏi Toán ở bậc đại học và sau đại học. Với mục tiêu đó, từ năm 2013, sau khi Chương trình Toán đi vào hoạt động, các trường hè dành cho giáo viên, học sinh THPT chuyên Toán và sinh viên các ngành Toán, Sư phạm Toán được Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán tổ chức hàng năm ở cả ba miền của đất nước. Để tổng kết sáu năm hoạt động, rút ra các bài học kinh nghiệm và đổi mới các hoạt động, ngày 22/12/2018, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán đã tổ chức Hội thảo "Trường hè Toán học: Kinh nghiệm Việt Nam và thế giới". Hội thảo là một phần trong chuỗi các hoạt động chuẩn bị tổng kết Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học, xây dựng đề án, chiến lược phát triển của Toán học Việt Nam trong giai đoạn tiếp theo.

Tham dự Hội thảo có các chuyên gia, nhà khoa học trong lĩnh vực nghiên cứu và giáo dục Toán học, Toán ứng dụng và Khoa học dữ liệu đến từ Hội Toán học Việt Nam, các Trường đại học, Viện nghiên cứu, các Trường THPT chuyên, các nhà khoa học tham gia phụ trách Trường hè, các giảng viên đã tham gia giảng dạy Trường hè.

GS. Trần Văn Nhung phát biểu

Trước khi Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học ra đời, trường hè toán học cho học sinh và sinh viên Toán đã được Viện Toán học tổ chức một số năm, đôi khi có sự phối hợp của Trường ĐH Sư phạm Hà Nội, với sự giúp đỡ về tài chính của một số nhà tài trợ.

Các đại biểu tham dự Hội thảo

Quang cảnh Hội thảo

Mùa hè năm 2012, sau khi Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (VIASM), hạt nhân của Chương trình trọng điểm, bắt đầu đi vào hoạt động, bên lề Hội nghị Toán học quốc tế Việt – Pháp tại Huế, GS. Ngô Bảo Châu đã chủ trì một cuộc họp bàn về việc triển khai các hoạt động của chương trình trọng điểm, trong đó có hoạt động đào tạo bồi dưỡng cho học sinh, sinh viên, giáo viên chuyên Toán. Theo đó, từ năm 2013, các trường hè dành cho học sinh chuyên Toán, sinh viên ngành Toán, giáo viên giảng dạy Toán ở các trường THPT chuyên sẽ được tổ chức thường niên, trong khuôn khổ của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học 2010–2020, dưới sự điều phối của VIASM, với quy mô và địa bàn được mở rộng.

PGS. Trần Văn Tấn phát biểu

Sau sáu năm triển khai, VIASM đã tổ chức được 15 lớp bồi dưỡng HS THPT chuyên (1619 học sinh), 15 lớp bồi dưỡng GV THPT chuyên (546 giáo viên), 7 lớp bồi dưỡng SV (696 sinh viên). Các tham luận tại hội thảo của những chuyên gia có nhiều năm kinh nghiệm đã tập trung phân tích những thành tựu đã đạt được cũng như những điểm còn tồn tại, hạn chế, và đặc biệt là những định hướng mới cho tương lai. Những người tham dự đã nêu các ưu điểm của trường hè, các nhược điểm và đề xuất giải pháp nhằm nâng cao chất lượng trường hè, để trường hè đạt hiệu quả cao trong việc bổ sung nâng cao kiến thức, văn hóa toán học, trao đổi kinh nghiệm giảng dạy bồi dưỡng học sinh giỏi, truyền cảm hứng và sự đam mê Toán học cho học sinh, giáo viên. Đặc biệt, thông qua các lớp bồi dưỡng này, ban tổ chức kỳ vọng sẽ hình thành một mô hình trường hè hiệu quả, giúp các Trường THPT chuyên hoặc nhóm trường trong từng khu vực có thể áp dụng, tự tổ chức trong tương lai.

Tại hội nghị tổng kết, một số mô hình trường hè trên thế giới như PROMYS ở ĐH Boston, Nesin Village ở Thổ Nhĩ kỳ, và Math Circle – câu lạc bộ toán học ở nhiều nơi trên khắp nước Mỹ – cũng đã được giới thiệu và phân tích khả năng áp dụng ở Việt Nam. Các đại biểu cũng nói đến sự cần thiết phải phát triển các lớp bồi dưỡng, tập huấn cho học sinh, sinh viên về toán mô hình, về ứng dụng của toán học nói chung và các nội dung dành cho giáo viên về những điểm mới trong chương trình giáo dục phổ thông mới môn Toán. Ngay trong năm 2019, Viện Nghiên cứu cao cấp về toán sẽ triển khai những nội dung này.

Theo Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. **Email giao dịch:** *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: (024) 3215.1407 Fax: (024) 3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: Adolphe Quetelet, nhà thiên văn học, toán học, thống kê và xã hội học.
Nguồn: Internet

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 30.000 đồng

π JOURNAL

facebook.com/pijournal

8 936514372134 00219

Giá: 30.000 đồng

www.pi.edu.vn