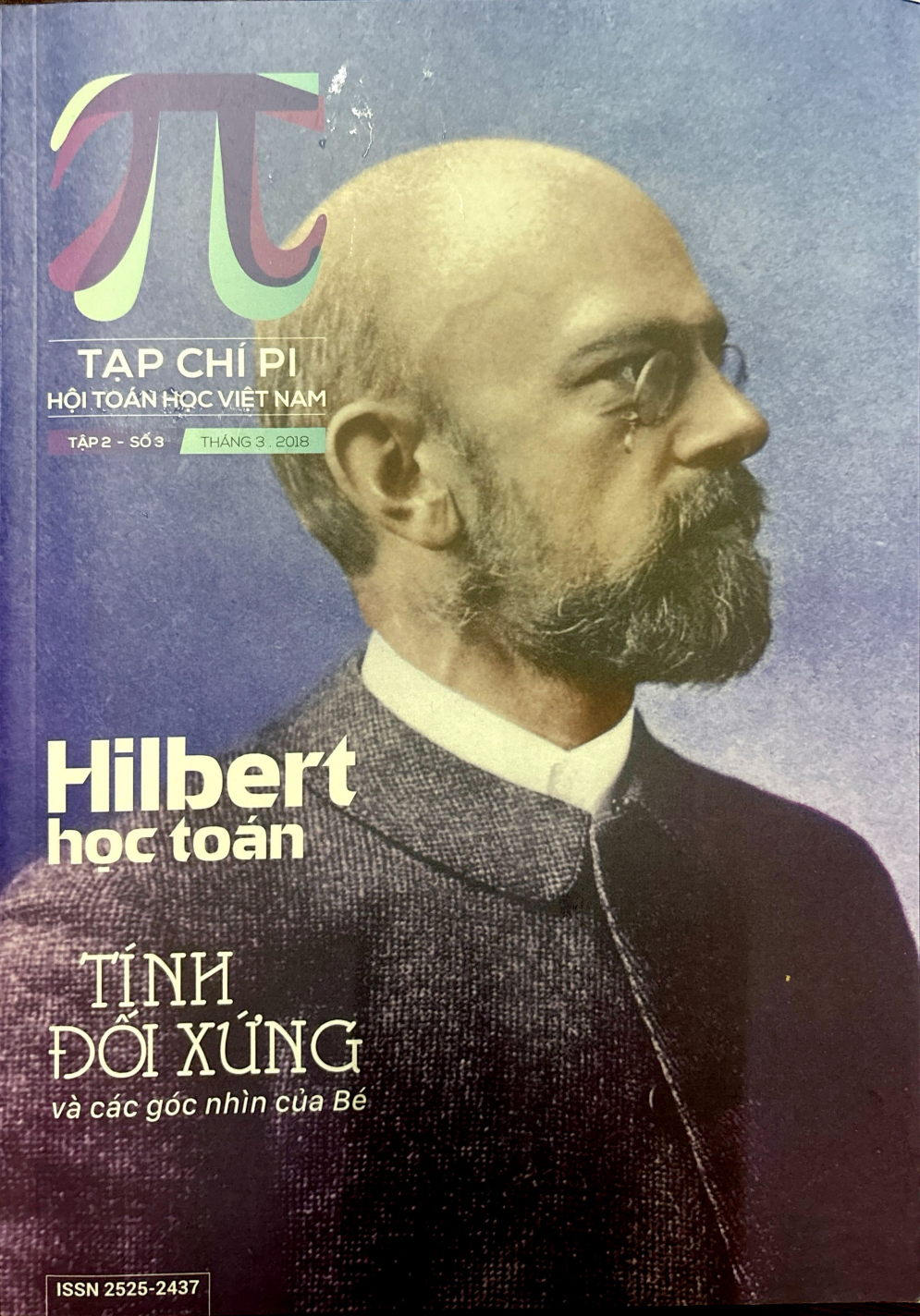
TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
TẬP 2 - SỐ 3 THÁNG 3 . 2018



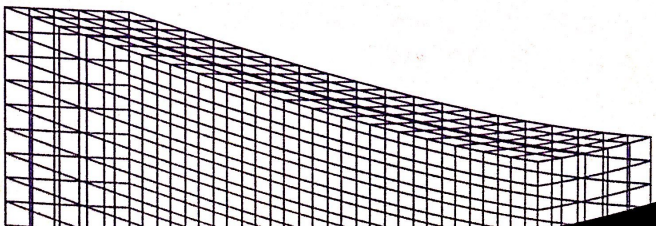
Hilbert học toán

TÍNH ĐỐI XỨNG

và các góc nhìn của Bé

ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY



BÁO VỀ TRƯỜNG CŨ

Tạp chí Pi rất vui mừng và biết ơn nhiều tổ chức, cá nhân đã gửi tạp chí đến các em học sinh và thầy cô giáo ở vùng sâu, vùng xa, gửi về trường học cũ của mình:

- **Quỹ Lê Văn Thiêm** mua 140 cuốn/kỳ làm phần thưởng cho học sinh giỏi toán.
- **Bà Hoàng Ly** mua 5 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Nguyễn Thượng Hiền, Quận Tân Bình, TP. HCM; 5 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Lê Quý Đôn, Quận 3, TP. HCM; 5 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Ngô Sĩ Liên, Quận Tân Bình, TP. HCM.
- **Bà Chu Cẩm Thơ** mua 5 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức, Hà Nội.
- **Bà Trần Lưu Vân Hiền** mua 3 cuốn/kỳ tặng trường THPT Nguyễn Tri Phương, Phú Vang, Thừa Thiên Huế; 3 cuốn/kỳ tặng Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.
- **Ông Cao Kim Ánh** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Cao Xá. Lâm Thao, Phú Thọ và 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Long Châu Sa, Lâm Thao, Phú Thọ.
- **Ông Nguyễn Quốc Khánh** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Nguyễn Khuyến, Duy Xuyên, Quảng Nam và 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Lê Hồng Phong, Duy Hoà, Duy Xuyên, Quảng Nam.
- **Bà Lê Thị Như Bích** mua 2 cuốn/kỳ tặng khoa toán Trường Đại học Sư Phạm Huế.
- **Ông Ngô Huy Cẩn** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Lê Lợi, TP Tam Điệp, Ninh Bình.
- **Bà Đinh Thị Thu Cúc** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Diễn Thái, Diễn Châu, Nghệ An.
- **Ông Nguyễn Ngọc Khôi** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội.
- **Ông Nguyễn Hùng Khương** phó Hiệu trưởng Trường THPT Bùi Thị Xuân, TP. HCM mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Thống Nhất A, Trảng Bom, Đồng Nai.
- **Ông Nguyễn Trương Hoàng Nhật** mua 1 cuốn/kỳ tặng Tổ toán Trường THPT Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên Huế.
- **Ông Lê Lương Tài** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS xã An Ninh, Bình Lục, Hà Nam.

Chúng tôi biết rằng còn có nhiều bạn đọc cũng làm như vậy, nhưng Toà soạn không có được thông tin. Mong các bạn tiếp tục cung cấp thông tin để giúp Toà soạn hiểu rõ hơn về mức độ phổ cập của Tạp chí.

Nghĩa cử của các bạn đã giúp Pi đến gần hơn với các bạn học sinh và thầy, cô giáo.

Tạp chí Pi hy vọng phong trào BÁO VỀ TRƯỜNG CŨ ngày càng được hưởng ứng rộng rãi!

THỂ LỆ CUỘC THI "Cùng π giải toán"

1. Mục đích:

Khuyến khích phong trào học Toán qua các bài toán.

2. Thời gian tổ chức cuộc thi:

Hằng năm, bắt đầu từ tháng 1 năm 2018.

3. Đối tượng dự thi:

Học sinh phổ thông và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

4. Các bài toán thi:

Tất cả các bài toán được đăng tải trong mục Thách thức kì này và Quán Toán của Tạp chí Pi, từ số 1 đến số 12 của năm tổ chức cuộc thi (sau đây gọi chung là bài toán thi).

5. Bài dự thi hợp lệ:

Tất cả lời giải cho các bài toán thi, được gửi tới Tòa soạn trước ngày mùng 1 của tháng phát hành số Tạp chí đăng tải các lời giải đó.

6. Phương thức chấm bài:

Chỉ cho điểm các lời giải đúng. Mỗi lời giải đúng (không phụ thuộc cách giải, cách trình bày) được cho 1 điểm; lời giải đúng và cách giải ngắn gọn được thưởng thêm không quá 1 điểm (nghĩa là được cho đến 2 điểm), lời giải đúng, cách giải ngắn gọn và đồng thời lời giải được trình bày mạch lạc, sáng sủa được thưởng thêm không quá 2 điểm (nghĩa là được cho đến 3 điểm).

7. Phương thức tính điểm xét giải:

Điểm để xét giải của mỗi học sinh dự thi, kí hiệu là s, là điểm tổng hợp các điểm của mỗi lời giải cho mỗi bài toán thi và được tính theo công thức sau:

– Đối với học sinh cấp THCS:

$$s = a + b \cdot \frac{\pi}{2} + c,$$

– Đối với học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất:

$$s = a \cdot \frac{\pi}{4} + b + c,$$

trong đó, a là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán dành cho cấp THCS, b là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán dành cho cấp THPT và c là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán trong Chuyên mục Quán Toán.

8. Phương thức xét giải:

– Chỉ xét giải đối với các học sinh có điểm xét giải không ít hơn:

+ 9π điểm, đối với học sinh cấp THCS;

+ 23π điểm, đối với học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

– Xét giải riêng cho mỗi nhóm đối tượng:

+ Nhóm 1: Học sinh cấp THCS;

+ Nhóm 2: Học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

9. Cơ cấu giải và mức thưởng:

Mỗi nhóm đối tượng được xét trao:

– Không quá π giải Nhất, mỗi giải được thưởng 9π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 3π giải Nhì, mỗi giải được thưởng 6π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 10π giải Ba, mỗi giải được thưởng 3π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 15π giải Pi (π), mỗi giải được thưởng 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi.

Ghi chú: 1π tiền mặt = 314.159 đồng

Căn cứ kết quả cuộc thi của từng năm, Ban giám khảo cuộc thi có thể xem xét trao giải Đặc biệt cho những học sinh có lời giải hay, độc đáo. Mỗi giải Đặc biệt được thưởng 15π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi.

Ngoài các giải chính và phần thưởng nêu trên, có thể có các giải phụ, các phần quà do các đơn vị tài trợ hoặc các nhà hảo tâm ấn định cho cuộc thi từng năm.

Học sinh đạt giải Nhất và giải Đặc biệt sẽ được GS. Ngô Bảo Châu viết thư giới thiệu với các trường đại học ở nước ngoài, nếu học sinh đó có nhu cầu.

Học sinh đạt từ giải Nhì trở lên sẽ được ưu tiên xét tuyển vào Hệ đào tạo cử nhân Toán học chất lượng cao thuộc Chương trình Đào tạo Toán học Trường Đại học Thăng Long - Viện Toán học.

10. Thời gian công bố giải và trao thưởng:

– Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên Tạp chí Pi số tháng 3 của năm liền sau năm tổ chức cuộc thi.

– Phần thưởng sẽ được trao cho các học sinh đạt giải vào ngày 31 tháng 3 của năm liền sau năm tổ chức cuộc thi, tại hai địa điểm: Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh.

11. Ban giám khảo:

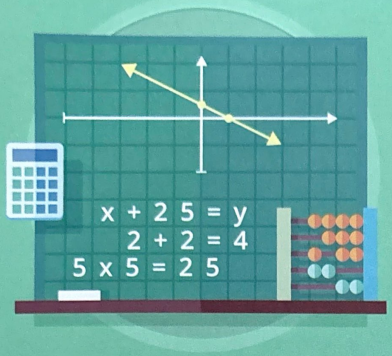
– Trưởng ban: GS. Hà Huy Khoái, Tổng biên tập Tạp chí Pi;

– Phó Trưởng ban thường trực: Nguyễn Khắc Minh, Phó Tổng biên tập kiêm Trưởng ban biên tập Tạp chí Pi;

– Phó Trưởng ban: Trần Nam Dũng, Phó Tổng biên tập Tạp chí Pi;

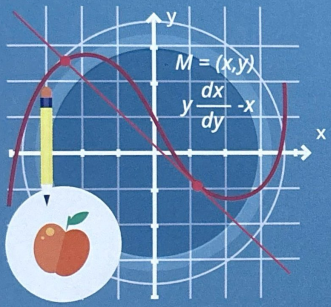
– Thư kí: Nguyễn Thị Lê Hương, Phó Tổng biên tập kiêm Thư kí Tòa soạn Tạp chí Pi;

– Các ủy viên: Thành viên của Nhóm Thách thức Toán học Tạp chí Pi.



THỂ LỆ GỬI BÀI:

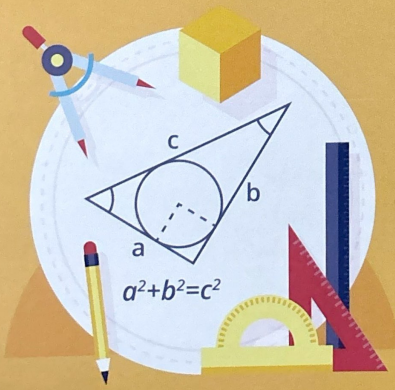
- Bài gửi email đến **bbt@pi.edu.vn** cần ghi rõ ở Chủ đề (Subje của email: Lời giải của bài toán nào; Bài toán đề xuất; Bài vi cho chuyên mục gì; hoặc Bài viết không theo chuyên mục n
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, địa chỉ thư tín, e-mail và số điện thoại để tiện liên
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, củ với file định dạng pdf.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: **bbt@pi.edu.vn**
- Qua bưu điện:

  Tòa soạn Tạp chí Pi
  Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
  Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
  Đường Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.



THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

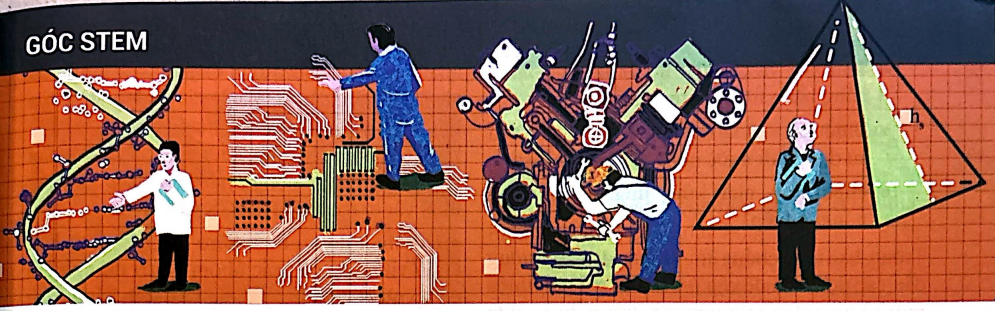
Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại bưu điện gần nhất:** Mã của Tạp chí Pi là C057. (có thể đặt các số đã ra).

  Bạn đọc gặp vướng mắc trong đặt và nhận báo qua bưu điệ xin gọi đường dây nóng 1900 545481 để được hỗ trợ.
- **Đặt tại website *www.pi.edu.vn*:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:** điền vào biểu mẫu tại đường dẫn ***http://gg.gg/DatTapChiPi.***

  Thanh toán vào tài khoản của Tạp chí Pi:
  Tài khoản số: 0851000012293
  Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành.
  (trong nội dung chuyển tiền cần ghi rõ họ tên, điện thoại người chuyển)

  Sau khi thanh toán xong gửi email đến ***info@pi.edu.vn*** để được xác nhận.
- **Đặt mua bản điện tử tại *Alezaa.com*.**



DỰ ÁN STEM:
KHAI THÁC NHIỆT NĂNG CỦA NĂNG LƯỢNG MẶT TRỜI

Đặng Văn Sơn

Năng lượng mặt trời được coi là nguồn năng lượng vô tận và sạch, năng lượng mặt trời đã được loài người để ý từ xa xưa thể hiện qua truyền thuyết nổi tiếng Archimedes đốt cháy thuyền của quân La Mã sử dụng năng lượng mặt trời vào năm 212 trước công nguyên. Mặt trời mang năng lượng khoảng 3,8 x 1023 KW và theo ước tính, tại bề mặt trái đất ở mực nước biển, năng lượng mặt trời chiếu xuống trái đất khoảng 1000W/m2. Tất nhiên, con số này thay đổi theo mùa, theo vị trí và theo thời tiết. Năng lượng mặt trời cũng là một chủ đề dạy học STEM rất được chú ý bởi tính ứng dụng thực tế cũng như kiến thức phù hợp với học sinh phổ thông. Năng lượng mặt trời được khai thác bằng hai cách, hoặc khai thác trực tiếp nhiệt tỏa ra của năng lượng mặt trời, hoặc thông qua năng lượng ánh sáng chuyển hóa thành điện năng. Trong chủ đề dự án này, học sinh sẽ học cách khai thác năng lượng mặt trời sử dụng trực tiếp nhiệt năng của mặt trời. Tất cả các thông tin về mặt trời bạn đọc quan tâm có thể tra cứu trực tiếp tại trang web của NASA: https://helios.gsfc.nasa.gov/sun.html

Bối cảnh

Trong thế kỉ 21 con người đối diện với hàng loạt vấn đề về ô nhiễm môi trường, cạn kiệt nguồn tài nguyên, đặc biệt là sự suy giảm nghiêm trọng của nguồn năng lượng hóa thạch (than đá và dầu khí). Việc tìm nguồn năng lượng thay thế đã được con người nghiên cứu từ rất lâu như năng lượng từ gió, từ sóng biển, từ nhiệt dưới lòng đất, đặc biệt là từ mặt trời.

Trong hai cách khai thác năng lượng từ mặt trời, mỗi cách đều có những ưu và nhược điểm riêng về công nghệ và giá cả. Trong dự án này, chúng tôi hướng dẫn các thầy cô giáo tập trung vào dự án dạy học thông qua việc xây dựng các dự án và hoạt động trải nghiệm nhỏ hơn liên quan đến khai thác năng lượng nhiệt của mặt trời. Dự án này phù hợp cho học sinh khối THCS và THPT.

Giới thiệu dự án

Dự án khai thác năng lượng nhiệt của mặt trời là một dự án dạy học lớn bao gồm nhiều tiết học và các dự án nhỏ, tuy nhiên, trong khuôn khổ của bài báo này, chúng tôi tập trung giới thiệu và hướng dẫn các thầy cô giáo tổ chức một số hoạt động trải nghiệm liên quan đến năng lượng mặt trời, các dự án nhỏ hơn chúng tôi có sẽ giới thiệu ở những số sau.

Một số dự án nhỏ trong dự án khai thác năng lượng nhiệt của mặt trời mà giáo viên có thể cho học sinh tiến hành bao gồm:

- Chế tạo lò nướng mặt trời.
- Chế tạo hệ thống lọc nước biển thành nước ngọt sử dụng năng lượng mặt trời.

- Thiết kế và chế tạo hệ thống đun nước nóng bằng nhiệt từ mặt trời.
- Thiết kế, chế tạo mô hình máy phát điện sử dụng hơi nước nóng từ nhiệt mặt trời.
- Hiệu ứng nhà kính ứng dụng trong nông nghiệp.

Trong bài này, chúng tôi không đi vào hướng dẫn các dự án đã đề cập ở trên mà chỉ giới thiệu một số hoạt động thí nghiệm, trải nghiệm đơn giản liên quan đến việc khai thác năng lượng nhiệt của mặt trời. Từ đó, các thầy cô có thể thiết kế các hoạt động học tương ứng trên lớp; các quý phụ huynh có thể cùng con trải nghiệm tại nhà.

Hoạt động 1: Đốt giấy bằng kính lúp hoặc gương cầu lõm

Lưu ý:

- Điều kiện thời tiết: trời nắng to.
- Trẻ dưới 14 tuổi cần có người lớn hướng dẫn

Chuẩn bị:

- Một số loại kính lúp có độ phóng đại khác nhau: 5x, 8x, 10x...
- Mảnh báo cũ, hoặc giấy cũ khô
- Một số vụn giấy hoặc vụn gỗ nhỏ
- Nhiệt kế và kẹp nhiệt kế
- Giá kẹp kính lúp

Tiến hành:

B1: Đặt giấy/báo cũ nơi ánh sáng mặt trời chiếu mạnh

B2: Điều chỉnh khoảng cách từ kính lúp đến vị trí đặt tờ giấy hoặc báo cũ, sao cho ta thu được một điểm sáng nhỏ và sáng nhất trên tờ giấy/báo, đó chính là tiêu điểm của kính lúp. Đặt thêm một số vụn giấy, gỗ xung quanh điểm cần đốt nếu cần để tăng nhanh khả năng bốc cháy của tờ giấy. Tùy thuộc vào độ phóng đại của kính lúp và nhiệt độ ngoài trời, thời gian tờ giấy bốc cháy sẽ khác nhau.

Các hoạt động học có thể tiến hành:

- Xác định tiêu cự, độ phóng đại của kính lúp:

Giáo viên phát cho mỗi nhóm học sinh một số loại kính lúp có tiêu cự (độ phóng đại) khác nhau (xóa hoặc che độ phóng đại của kính trên tay cầm). Yêu cầu học sinh xác định tiêu cự của kính lúp bằng cách đo khoảng cách từ tâm của kính lúp đến tiêu điểm nói trên. Đây là phần kiến thức trong chương trình giáo dục phổ thông môn vật lý ở cả khối THCS và THPT.

- Đo nhiệt độ tại tiêu điểm của các kính lúp:

Giáo viên yêu cầu các nhóm bố trí thí nghiệm để đo nhiệt độ tại tiêu điểm của kính bằng cách phát cho mỗi nhóm học sinh các dụng cụ: nhiệt kế, giá kẹp, kính lúp, giá đỡ kính lúp.

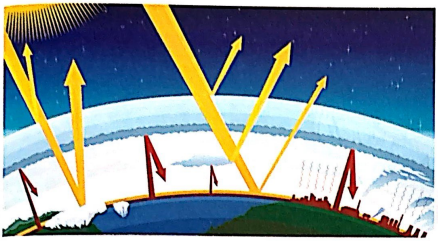
Hình ảnh thí nghiệm đốt giấy bằng kính lúp

Giáo viên yêu cầu học sinh xác định tiêu điểm của kính lúp và lắp nhiệt kế sao cho điểm nhận nhiệt của nhiệt kế nằm đúng ở tiêu điểm của kính lúp. Lưu ý, nếu lắp nhiệt kế không đúng vị trí thì sai số sẽ rất lớn. Học sinh đo nhiệt độ và ghi vào bảng theo dõi dưới đây:

Loại kính lúp	T(°C) sau 5p	T(°C) sau 10p	T(°C) sau 15p	T(°C) sau 20p
Loại 1				
Loại 2				
Loại 3				

Sau khi đo được nhiệt độ, giáo viên yêu cầu học sinh vẽ đồ thị sự phụ thuộc của nhiệt độ vào thời gian, thời gian đo có thể tăng lên 30, hoặc 40 phút để thu được nhiều số liệu hơn. Sau đó so sánh với nhiệt độ thực ngoài trời. Học sinh so sánh nhiệt độ tại tiêu điểm của từng loại kính lúp và rút ra nhận xét mối liên hệ giữa độ phóng đại và nhiệt độ tại tiêu điểm của kính lúp.

Hoạt động 2: Hiệu ứng nhà kính



Hiệu ứng nhà kính là một hiệu ứng liên quan đến sự nóng lên của trái đất, dựa trên nguyên lý nhà kính trong nông nghiệp. Trong nông nghiệp, nhà kính rất cần thiết để trồng một số loại cây và giữ ổn định nhiệt độ cho cây trồng vào mùa đông. Tuy nhiên, hiệu ứng nhà kính trong môi trường lại là hiệu ứng có tính bất lợi cho trái đất. Điều thú vị là hiệu ứng nhà kính lại do một nhà toán học người Pháp Jean Baptiste Joseph Fourier lần đầu tiên đặt tên vào năm 1824 thông qua một vụ nổ mạnh trong khí quyển làm nhiệt độ của một vùng tăng lên. Hiệu ứng nhà kính dùng để chỉ hiệu ứng xảy ra khi năng lượng bức xạ của tia sáng mặt trời, xuyên qua các cửa sổ hoặc mái nhà bằng kính, được hấp thụ và phân tán trở lại thành nhiệt lượng cho bầu không gian bên trong, dẫn đến việc sưởi ấm toàn bộ không gian bên trong chứ không phải chỉ ở những chỗ được chiếu sáng. Ta coi trái đất được bao bọc bởi một cái nhà kính khổng lồ, trong đó "kính" là các lớp không khí của bầu khí quyển. Khi bức xạ mặt trời chiếu vào trái đất sẽ có một phần bị phản xạ ngược lại, một phần "chui" qua bầu khí quyển trái đất và chiếu xuống bề mặt trái đất. Bình thường bức xạ nhiệt chiếu xuống trái đất một phần bị phản xạ trở lại bầu khí quyển và thoát ra ngoài. Tuy nhiên, hiện nay, bầu khí quyển của trái đất đang chứa một lượng lớn các loại khí thải như CO2 và các loại khí ô nhiễm khác như metal, CO... Các loại khí này tạo thành một lớp "kính" ngăn không cho nhiệt của trái đất thoát ra ngoài gây ra sự nóng lên của trái đất.

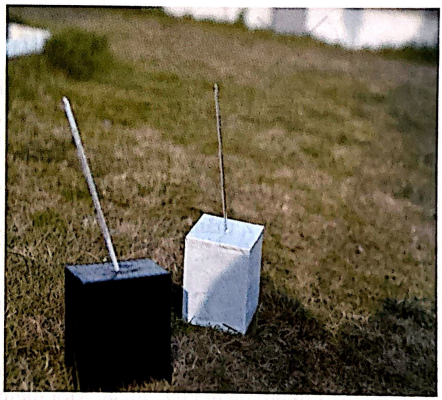
Trong hoạt động này, học sinh sẽ thực hiện các thí nghiệm chứng minh nguyên lý hoạt động của nhà kính.

- Chuẩn bị:
  - Nhiệt kế (2)
  - Hộp bằng kính có lỗ để nhiệt kế vào (1)
- Tiến hành:

Nhét nhiệt kế vào trong hộp kính (Có thể thay bằng hộp làm bằng giấy bóng kính) sau đó bịt kín miệng lại. Để hộp thí nghiệm ra ngoài nắng và quan sát nhiệt độ của nhiệt kế trong hộp và so sánh với nhiệt độ bên ngoài và điền vào bảng theo dõi.

Nhiệt kế bên trong	T(°C) sau 15p	T(°C) sau 30p	T(°C) sau 45p	T(°C) sau 60p	T(°C) sau 75p
Nhiệt kế ngoài trời					

Ngoài các hoạt động cơ bản này, giáo viên có thể tổ chức các hoạt động thêm, ví dụ như cho học sinh làm các hộp kính với màu sắc khác nhau (sơn màu) và đo nhiệt độ trong từng hộp để học sinh kết luận về nhiệt độ của từng hộp và xem nhiệt độ của hộp nào nóng nhất, từ đó giáo viên đưa ra câu hỏi cho học sinh trả lời, ví dụ: Vào mùa hè ta nên mặc áo màu trắng hay màu đen thì mát nhất? Dựa vào thực nghiệm, học sinh có thể trả lời được câu hỏi này.



Thí nghiệm đo nhiệt độ trong hộp kính có màu trắng và đen.

LÝ THUYẾT NÚT VÀ ĐA THỨC JONES

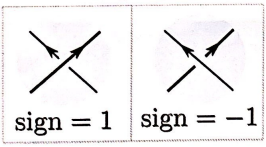
(tiếp theo và hết)

Lê Tự Quốc Thắng

IV. MỘT SỐ BẤT BIẾN KẾT

4. Chỉ số kết

Giả sử D là một lược đồ kết định hướng và c là một điểm kép của D. Ta định nghĩa dấu $\mathrm{sign}(c) \in \{1, -1\}$ như trong hình 11. Tức là nếu ta xoay đoạn trên tại c ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi đoạn trên trùng với đoạn dưới, khi đó nếu hướng của chúng trùng nhau thì lấy $\mathrm{sign}(c) = 1$, nếu không thì $\mathrm{sign}(c) = -1$.



Hình 11. *Dấu của một điểm kép trong lược đồ kết định hướng.*

Giả sử D có đúng 2 thành phần là D_1 và D_2. Định nghĩa

$$\mathrm{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{c \in D_1 \cap D_2} \mathrm{sign}(c). \qquad (1)$$

Chú ý trong tổng này c là điểm kép mà 2 đoạn tại c thuộc 2 thành phần khác nhau. Một điểm kép c mà 2 đoạn tại c cùng thuộc một thành phần không đóng góp vào công thức trên.

Mệnh đề sau đây rất dễ chứng minh.

Mệnh đề 4.1. *Nếu D' là một kết nhận được từ D bởi một trong các phép biến đổi $\vec{R}_i$ với $i = 0, 1, 2, 3$, thì $\mathrm{lk}(D') = \mathrm{lk}(D)$.*

■ **Bài tập 4.2.** *(a) Chứng minh mệnh đề trên.*

(b) Chứng minh rằng nếu D' nhận được từ D bằng cách đảo hướng của một thành phần của D thì $\mathrm{lk}(D') = -\mathrm{lk}(D)$.

(c) Chứng minh rằng $\mathrm{lk}(D)$ là số nguyên.

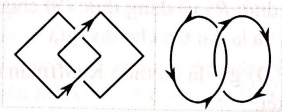
Từ bổ đề 4.1 ta có kết quả sau.

Định lý 4.3. *Giả sử L là một kết định hướng có 2 thành phần có lược đồ D. Khi đó $\mathrm{lk}(D)$ chỉ phụ thuộc vào lớp tương đương của L.*

Tức là nếu định nghĩa $\mathrm{lk}(L) = \mathrm{lk}(D)$, thì lk, được gọi là chỉ số kết, là một bất biến của kết định hướng có 2 thành phần.

Ví dụ 4.4. (a) Nếu U_2 là không-kết có 2 thanh phần thì $\mathrm{lk}(U_2) = 0$, vì ta có một lược đồ của U_2 không có điểm kép nào.

(b) Ký hiệu H là kết định hướng Hopf của hình 12. Dễ dàng tính được $\mathrm{lk}(H) = 1$. Vì $\mathrm{lk}(H) \neq \mathrm{lk}(U_2)$, ta đã chứng minh được H không tương đương với không-kết. Tức là bằng cách dịch chuyển liên tục trong không gian, ta không thể "tách rời" hai thành phần của H.



Hình 12. *Kết Hopf (bên trái). Thông thường ta vẽ kết Hopf như hình bên phải, sử dụng nguyên tắc "gấp khúc hóa đường cong trơn" (xem Tạp chí Pi tập 2, số 2 tháng 2.2018 trang 15 cột 2 dòng 9-27).*

(c) Ký hiệu W là kết định hướng Whitehead trong hình 13. Ta có $\mathrm{lk}(W) = 0 = \mathrm{lk}(U_2)$, mặc dù trực giác cho ta thấy W không thể là không-kết. Ta nói rằng chỉ số kết lk không thể phân biệt được W và không-kết. Trong mục sau ta sẽ dùng bất biến khác để phân biệt W và không-kết.

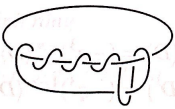
Hình 13. *Kết Whitehead.*

Nếu L là một kết không định hướng có hai thành phần, ta định nghĩa chỉ số kết bằng

$$\mathrm{lk}(L) = |\mathrm{lk}(\vec{L})|.$$

mà $\vec{L}$ là kết L với bất kỳ định hướng nào. Từ bài tập 4.2 ta thấy rằng $|\mathrm{lk}(\vec{L})|$ không phụ thuộc vào hướng được chọn. Xem thí dụ hình 14.

Về mặt trực giác, chỉ số kết $\mathrm{lk}(L)$ biểu thị số lần *đại số* một thành phần quấn chung quanh thành phần kia, xem hình 14. Ở đây *đại số* nghĩa là nếu quấn theo một chiều được tính 1 lần thì quấn theo chiều ngược lại được tính -1 lần.



Hình 14. *Chỉ số kết của kết không định hướng này là 3. Trực giác cho thấy, từ trái qua phải, thành phần dưới quấn quanh thành phần trên 4 lần rồi lại quấn thêm một lần nữa theo chiều ngược lại.*

Chỉ số kết của kết có 2 thành phần được Gauss định nghĩa vao khoảng năm 1830, bằng một công thức tích phân. Công thức này được Kontsevich phát triển lên thành một bất biến có nhiều bậc của kết định hướng năm 1991, mà bậc đầu tiên cho trường hợp kết có 2 thành phần là chỉ số kết. Một phần nhờ công trình này mà Kontsevich được giải thưởng Fields năm 1998.

4.2 Đa thức Kauffman của lược đồ kết

Ký hiệu $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ là tập hợp tất cả các đa thức Laurent biến q với hệ số nguyên. Đặt $\delta = -q^2 - q^{-2} \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$.

Giả sử D là một lược đồ kết không định hướng. Ta định nghĩa đa thức $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ theo các quy tắc sau

$$\langle U_n \rangle = \delta^n = (-q^2 - q^{-2})^n. \quad (3)$$

Ở đây U_n là lược đồ có n thành phần và không có điểm kép nào. Quy tắc (2) có nghĩa như sau. Giả sử c là một điểm kép của D. Ta xây dựng lược đồ kết $D_{c,+}$ và $D_{c,-}$ bằng cách thay đổi D trong một lân cận nhỏ của c như trong hình 15.

Hình 15. *Ở giữa là điểm kép c. Bên phải là $D_{c,+}$ và bên trái là $D_{c,-}$.*

Quy tắc (2) nói rằng

$$\langle D \rangle = q\langle D_{c,+} \rangle + q^{-1}\langle D_{c,-} \rangle.$$

Ta gọi $D_{c,+}$ và $D_{c,-}$ lần lượt là *giải kỳ dị dương* và *giải kỳ dị âm* của D tại c. Chú ý rằng $D_{c,+}$ và $D_{c,-}$ có ít điểm kép hơn D.

■ **Bài tập 4.5.** *(a) Chứng minh rằng hai quy tắc trên xác định đa thức $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ một cách duy nhất. Ngoài ra nếu C là tập các giao điểm của D thì*

$$\langle D \rangle = \sum_{\varepsilon:\, C \to \{1,-1\}} q^{\sum_{c \in C} \varepsilon(c)} (-q^2 - q^{-2})^{\#(D_\varepsilon)}. \quad (4)$$

Ở đây D_ε nhận được từ D bằng cách giải kỳ dị tại mỗi điểm kép c của D, giải dương nếu $\varepsilon(c) = 1$ và giải âm nếu $\varepsilon(c) = -1$, và $\#(D_\varepsilon)$ là số thành phần của D_ε.

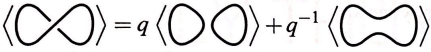
(b) Chứng minh rằng nếu D có một thành phần không có điểm kép nào thì

$$\langle D\rangle = (-q^2 - q^{-2})\langle D'\rangle,$$

mà D' là được nhận từ D bằng cách xóa bỏ một thành phần không có điểm kép.

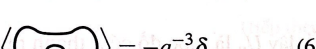
Nhận xét rằng $\langle D\rangle$ là bất biến dưới phép biến đổi R_0.

Ví dụ 4.6. Ta tính $\langle D\rangle$ của một vài lược đồ kết.



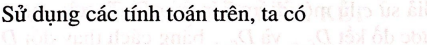
$$= q\delta^2 + q^{-1}\delta = -q^3\delta. \quad (5)$$

Tương tự, ta có



$$= -q^{-3}\delta. \quad (6)$$

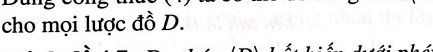
Sử dụng các tính toán trên, ta có



$$= q(-q^3\delta) + q^{-1}(-q^{-3}\delta)$$
$$= (-q^4 - q^{-4})\delta. \quad (7)$$

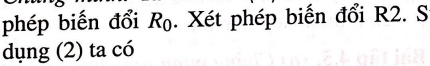
Dùng công thức (4) ta có thể dễ dàng tính $\langle D\rangle$ cho mọi lược đồ D.

Mệnh đề 4.7. *Đa thức $\langle D\rangle$ bất biến dưới phép biến đổi R_0, R_2, và R_3. Về R_1 ta có*

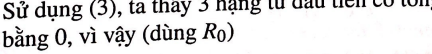


$$-q^3 \quad (8)$$

Chứng minh. Ta đã biết $\langle D\rangle$ là bất biến dưới phép biến đổi R_0. Xét phép biến đổi R2. Sử dụng (2) ta có



Sử dụng (3), ta thấy 3 hạng tử đầu tiên có tổng bằng 0, vì vậy (dùng R_0)



Như vậy $\langle D\rangle$ là bất biến dưới R_2.

Bất biến dưới R_3 và đẳng thức (8) chứng minh tương tự, và là bài tập cho độc giả. □

Đa thức $\langle D\rangle$ gọi là đa thức Kauffman của một lược đồ kết.

4.3 Đa thức Jones.

Dù không bất biến dưới R_1, nhưng đa thức Kauffman biến đổi một cách "trật tự" dưới R_1, vì vậy ta có thể điều chỉnh nó để nhận được bất biến kết như sau.

Giả sử D là một lược đồ kết có hướng. Định nghĩa

$$w(D) = \sum_{c\in C} \operatorname{sign}(c).$$

Ở đây C là tập tất cả các điểm kép của D và $\operatorname{sign}(c)$ được định nghĩa như trong hình 11. Ta tính $\langle D\rangle$ bằng cách quên hướng của D đi, và đặt

$$J(D) = (-q^3)^{-w(D)}\langle D\rangle. \quad (9)$$

Định lý 4.8. *Đa thức $J(D)$ là bất biến dưới các phép biến đổi $\vec{R}_i$ với $i = 0,1,2,3,4$ và vì vậy xác định một bất biến của kết định hướng.*

Chứng minh. Hiển nhiên là $J(D)$ bất biến dưới phép biến đổi $\vec{R}_0$.

Dễ dàng thấy rằng $w(D)$ là bất biến dưới $\vec{R}_2$ và $\vec{R}_3$. Vì $\langle D\rangle$ cũng bất biến dưới $\vec{R}_2$ và $\vec{R}_3$, ta có $J(D)$ bất biến dưới $\vec{R}_2$ và $\vec{R}_3$.

Ta hãy xét $\vec{R}_1$. Giả sử D' nhận được từ D bởi phép $\vec{R}_1$ thứ nhất (bên trái trong hình 10), sao cho

Giả sử $w(D) = n$. Khi đó $w(D') = n - 1$. Theo định nghĩa,

$$J(D) = (-q^3)^{-n}\langle D\rangle$$
$$J(D') = (-q^3)^{1-n}\langle D'\rangle.$$

Theo (8), ta có $\langle D\rangle = -q^3\langle D'\rangle$. Vì vậy $J(D') = J(D)$. Như vậy $J(D)$ bất biến dưới $\vec{R}_1$. Việc chứng minh $J(D)$ bất biến dưới $\vec{R}_1$ kia (bên phải trong hình 10) hoàn toàn tương tự. □

Nếu L là một kết có hướng và D là lược đồ của nó, ta định nghĩa $J(L) = J(D)$. Khi đó $J(L)$ là một bất biến của kết có hướng, và được gọi là đa thức Jones của L.

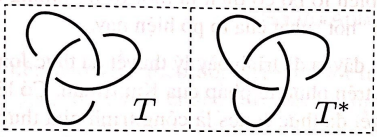
▪ **Bài tập 4.9.** *Chứng minh rằng nếu D là lược đồ nút thì $w(D)$ không phụ thuộc vào hướng của D. Từ đó suy ra rằng nếu K là một nút thì $J(K)$ không phụ thuộc vào hướng của K.*

Tức là $J(K)$ là một bất biến của nút không hướng.

Ví dụ 4.10. Ta hãy xét nút ba lá phải T và ba lá trái T^*, xem hình 16. Chú ý rằng T^* là ảnh của T qua phép đối xứng qua mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Sau một tính toán đơn giản, ta có

$$J(T) = (q^2+q^{-2})(q^{-16}-q^{-12}-q^{-4}) \quad (10)$$
$$J(T^*) = (q^2+q^{-2})(q^{16}-q^{12}-q^{4}). \quad (11)$$

Với không nút U ta có $J(U) = \delta = -q^2-q^{-2}$. Vì $J(U), J(T), J(T^*)$ là khác nhau, ta kết luận rằng mỗi T, T^* không phải là không-nút, và T và T^* là không tương đương.



Hình 16. *Nút ba lá phải T và nút ba lá trái T^*.*

4.4. Đối xứng gương.

Nếu L là một kết (có thể định hướng hoặc không), và P là một mặt phẳng, ký hiệu L^* là ảnh của L qua phép đối xứng qua mặt phẳng P. Ở đây L^* là định hướng nếu L định hướng. kết L^* được gọi là đối xứng gương của kết L.

▪ **Bài tập 4.11.** *(a) Chứng minh rằng lớp tương đương của L^* không phụ thuộc mặt phẳng P.*

(b) Chứng minh rằng

$$J(L^*)(q) = J(L)(q^{-1}). \quad (12)$$

Nếu L^* tương đương L thì ta L được gọi là *tự đối xứng gương*, nếu không L được gọi là *bất đối*. Ở trên ta đã thấy nút ba lá là bất đối.

▪ **Bài tập 4.12.** *Chứng minh rằng nút số 8 là tự đối xứng gương.*

Từ (12) ta thấy L là bất đối nếu

$$J(L)(q) \neq J(L)(q^{-1}). \quad (13)$$

Xác định tính bất đối của một kết không những thú vị trong tô pô mà còn rất quan trọng trong sinh hóa. Nếu hai kết L và L^* không tương đương, trong sinh học phân tử người ta gọi chúng là "đồng phân quang học". Ở thời kỳ đầu của lý thuyết nút, người ta rất khó biết được một nút tự đối xứng gương hay bất đối. Lý do là các bất biến được phát hiện ban đầu như nhóm cơ bản không thể phân biệt được một nút và đối xưng gương của nó. Lần đầu tiên năm 1914 Dehn chứng minh một nút (là nút ba lá) là bất đối, nhưng chứng minh này không áp dụng được cho các nút phức tạp hơn. Chứng minh của Dehn rất hay, và kết quả này vào thời điểm đó là nổi tiếng nhất trong tất cả các bài báo của Dehn, thậm chí hơn cả lời giải bài toán Hilbert số 3 của Dehn, xem [1].

Đa thức Jones, qua tiêu chuẩn (13), cho phép dễ dàng nhận biết nhiều nút là bất đối. Đa thức Jones phát hiện tất cả các nút bất đối có số điểm kép ít hơn 9, điều mà không một bất biến nào trước Jones làm được.

▪ **Bài tập 4.13.** *Tính đa thức Jones của kết Whitehead và chứng minh rằng nó không phải là không-kết. kết Whitehead có phải là bất đối không?*

4.5 Quan hệ skein.

Định lý về đa thức Jones thường được phát biểu như sau.

Định lý 4.14. *Tồn tại duy nhất một bất biến kết định hướng J thỏa mãn các đẳng thức*

$$q^4 J\Big(\times\Big) - q^{-4} J\Big(\times\Big) = (q^{-2}-q^2) J\Big)\Big(\quad (14)$$

$$J(U) = -q^2 - q^{-2}. \quad (15)$$

Chứng minh. 1/ *Tồn tại.* Ta định nghĩa $J(L)$ như ở mục 4.4. Ta có ngay (15).

Đẳng thức (2) và hình xoay của nó 90° cho ta

$$\Big\langle \times \Big\rangle = q \Big\langle)(\Big\rangle + q^{-1} \Big\langle \asymp \Big\rangle$$
$$\Big\langle \times \Big\rangle = q^{-1} \Big\langle)(\Big\rangle + q \Big\langle \asymp \Big\rangle$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với q, thứ hai với $-q^{-1}$, rồi cộng lại,

$q\langle$  $\rangle - q^{-1}\langle$  $\rangle = (q^2 - q^{-2})\langle$  $\rangle$. (16)

Trong (14) có 3 lược đồ kết có hướng, ký hiệu chúng lần lượt từ trái qua phải là D_+, D_-, D_0. Vì $\langle D\rangle$ không phụ thuộc hướng, theo (16) ta có

$$q\langle D_+\rangle - q^{-1}\langle D_-\rangle = (q^2 - q^{-2})\langle D_0\rangle. \quad (17)$$

Dễ thấy $w(D_+) - 1 = w(D_0) = w(D_-) + 1$. Nhân (17) với $(-q^3)^{-w(D_0)}$ và sử dụng định nghĩa $J(D) = (-q^3)^{-w(D)}\langle D\rangle$, ta nhận được (14).

2/ *Duy nhất* (sơ lược chứng minh). Để chứng minh tính duy nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng dùng hai quy tắc (14) và (15) ta có thể tính $J(L)$ của bất kỳ kết có hướng L nào. Từ (14), ta có thể tính $J(D_+)$ nếu ta biết $J(D_-)$ và $J(D_0)$. Vì vậy ta có thể quy nạp trên một độ phức tạp nào đó sao cho độ phức tạp của $J(D_-)$ và $J(D_0)$ là ít hơn của $J(D_+)$. Độc giả có thể làm bài tập 4.15 để có chứng minh chi tiết.

Đẳng thức (14) được gọi là quan hệ skein của đa thức Jones. Cùng với giá trị của không nút nó xác định đa thức Jones một cách duy nhất.

■ **Bài tập 4.15.** *(a) Chỉ sử dụng đẳng thức* (14) *và* (15) *chứng minh rằng* $J(U_n) = (-q^2 - q^{-2})^n$.

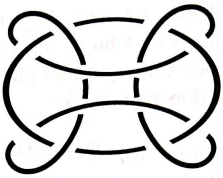
(b) Giả sử D là một lược đồ kết có hướng có k thành phần $D_1, \ldots, D_k$. *Trên mỗi thành phần* D_i *chọn một điểm* X_i *không là điểm kép. Đi quanh D, bắt đầu tại* X_1, *đi theo hướng của D cho đến khi quay lại* X_1, *rồi nhảy qua* X_2 *đi theo hướng của D cho đến khi quay lại* X_2, *rồi nhảy qua* X_3.... *Đặt* $\alpha(D)$ *là lược đồ kết có hình chiếu kết như D nhưng các đoạn trên/dưới là như sau: tại mỗi điểm kép, đoạn mà ta đi qua trước được xem là đoạn trên. Chứng minh rằng* $\alpha(D)$ *là không-kết.*

(c) Chứng minh phần (b) của định lý 4.14 bằng cách quy nạp trên số điểm kép và sử dụng* $\alpha(D)$.

Mặc dù có nhiều cặp nút khác nhau có cùng đa thức Jones, cho đến nay giả thuyết sau của Jones vẫn chưa ai chứng minh hay phủ định được.

Giả thuyết 1. *Đa thức Jones phân biệt được không-nút. Tức là nếu đa thức Jones của một nút K bằng đa thức Jones của không-nút thì K là không nút.*

Trong bài báo nổi tiếng của mình năm 1957, Milnor (Giải thưởng Fields 1962) chỉ ra rằng tất cả bất biến kết lúc ấy không thể phân biệt được kết ở hình 17 và không-kết.



Hình 17. *Kết Milnor.*

Trong khi đó đa thức Jones phân biệt ngay kết Milnor và không-kết. Như vậy đa thức Jones đã "nắm bắt" được những tính chất tô pô rất "tinh". Bài toán tìm liên hệ giữa đa thức Jones và các bất biến tô pô cổ điển là một trong những bài toán "hot" nhất của tô pô hiện nay.

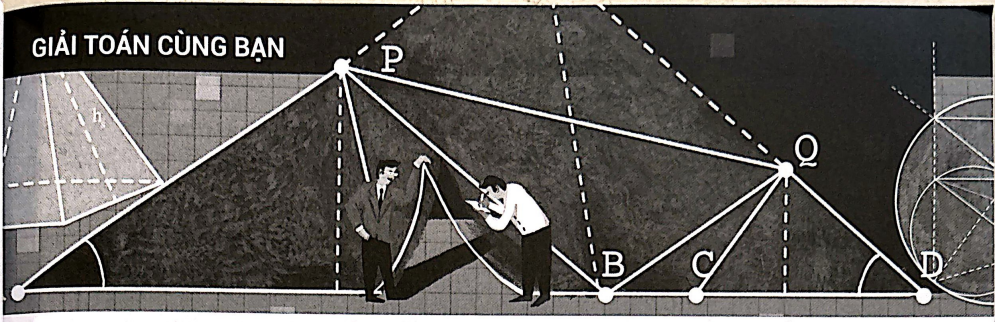
Trên đây ta đã trình bày lý thuyết đa thức Jones, dựa trên phương pháp của Kauffman. Có lẽ lý thuyết đa thức Jones là công trình giải thưởng Fields duy nhất có một phương pháp chứng minh sơ cấp thế này. Bản thân Jones tìm ra đa thức Jones khi đang nghiên cứu các đại số Von Neumann trong ngành giải tích hàm. Phát hiện đa thức Jones đã có ảnh hưởng rất lớn đến ngành tô pô và nhiều ngành lân cận, đồng thời sự đơn giản của nó đã giúp nhiều nhà khoa học không phải toán học (thí dụ sinh vật học) sử dụng lý thuyết nút trong nghiên cứu của mình. Độc giả có thể tìm hiểu thêm về đa thức Jones và ứng dụng của nó trong [2, 3].

Tài liệu tham khảo

[1] B. Chandler, W. Magnus, *The history of combinatorial group theory*, Springer-Verlag 1982.

[2] E. Flapan, *When topology meets chemistry: A topological look at molecular chirality* , Cambridge University Press, 2000.

[3] K. Murasugi, *Knot theory & its applications*, Birkhäuser, 2008.



LTS. Thông qua các lời giải cho bài **P121** *(Tạp chí Pi tập 1, số tháng 12.2017), các tác giả bài viết sẽ trao đổi cùng bạn đọc đôi điều xung quanh việc giải toán.* **P121** *là một "thách thức hình học" dành cho các bạn học sinh cấp THCS. Vì thế, để hiểu toàn bộ bài viết, bạn đọc chỉ cần có kiến thức hình học lớp 8 cấp THCS hiện hành; thậm chí,* ***nếu bạn mới chỉ có kiến thức hình học lớp 6, bạn vẫn có thể hiểu được một phần (quan trọng) của bài viết.***

Vội vàng một li, đi một dặm

Hạ Vũ Anh - Nguyễn Khắc Minh

Để tiện cho việc theo dõi của mọi đối tượng bạn đọc, trước hết, chúng tôi nhắc lại một kí hiệu toán học thông dụng: *Khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng YZ (tức, độ dài đoạn vuông góc hạ từ X xuống YZ) được kí hiệu bởi* $d(X,YZ)$.

Xét bài toán sau:

P121. *Cho M là trung điểm của cạnh huyền AB của tam giác vuông ABC. Trên cạnh góc vuông CB, lấy điểm P sao cho CP : PB = 1 : 2. Một đường thẳng đi qua B cắt các đoạn thẳng AC, AP và PM tương ứng tại các điểm X, Y và Z.*

Chứng minh rằng phân giác trong của góc ∠PZY đi qua điểm C khi và chỉ khi phân giác trong của góc ∠PYX đi qua C.

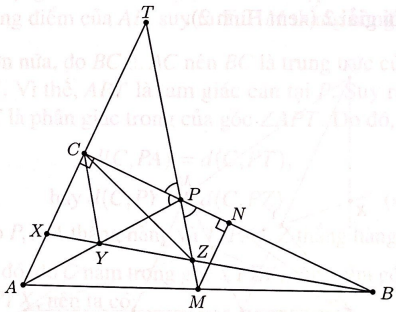
Khá nhiều bạn đọc đã gửi lời giải cho bài toán tới Tòa soạn. Đa phần các bạn trong số đó đã giải bài toán theo một trong hai cách sau:

Lời giải 1 (xem Hình 1).

Gọi T là giao điểm của MP và AC. Khi đó, do

$$\frac{PC}{PB}=\frac{1}{2}<1=\frac{MA}{MB}$$

nên P nằm giữa M và T, C nằm giữa A và T.



Hình 1.

Gọi N là trung điểm của BC. Khi đó, MN là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó, $MN \parallel AC$ và

$$\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}. \qquad (1.1)$$

Vì $MN \parallel AC$, mà $AC \perp BC$ nên $MN \perp BC$. Vì thế, tam giác MNP vuông tại N.

Do $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{2}$ nên P nằm giữa C và N. Do đó

$$\frac{1}{2}=\frac{PC}{PB}=\frac{NC-NP}{NB+NP}=\frac{NC-NP}{NC+NP}.$$

Suy ra, $NC=3NP$. Vì thế

$$\frac{PN}{PC} = \frac{PN}{NC - NP} = \frac{1}{2} = \frac{MN}{AC} \text{ (theo (1.1)).}$$

Suy ra, tam giác vuông (tại N) MNP đồng dạng với tam giác vuông (tại C) ACP. Do đó

$$\angle APC = \angle MPN = \angle TPC.$$

Vì thế, PC là phân giác trong của góc $\angle TPA$; suy ra

$$d(C,PA) = d(C,PT),$$

$$\text{hay } d(C,PY) = d(C,PZ) \qquad (1.2)$$

(do P,Y,A thẳng hàng và T,P,Z thẳng hàng).

Do C nằm trong góc $\angle PZY$, cũng như góc $\angle PYX$ nên ta có:

C thuộc phân giác trong của góc $\angle PZY$

$\Leftrightarrow d(C,ZP) = d(C,ZY)$, hay $d(C,PZ) = d(C,YX)$

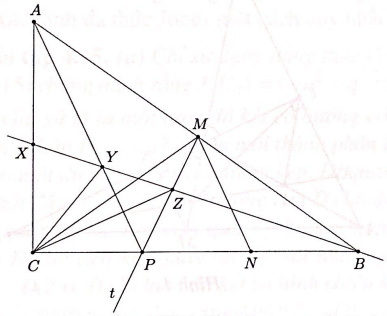
(do Z,Y,X thẳng hàng)

$\Leftrightarrow d(C,PY) = d(C,YX)$ (do (1.2))

$\Leftrightarrow C$ thuộc phân giác trong của góc $\angle PYX$.

Kết luận của bài toán được chứng minh.

Lời giải 2 (xem Hình 2).



Hình 2.

Gọi N là trung điểm của PB. Từ giả thiết $PC : PB = 1 : 2$, suy ra $CP = PN = NB$.

Nối CM, MN; kéo dài MP về phía P để được tia Mt.

Vì CM là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông ACB nên

$$MC = MB \qquad (2.1)$$

Do đó, tam giác CMB cân tại M. Suy ra

$$\angle MCP = \angle MBN. \qquad (2.2)$$

Từ (2.1), (2.2) và $CP = BN$ (chứng minh trên), suy ra

$$\Delta MCP = \Delta MBN.$$

Do đó, $MP = MN$. Vì thế, tam giác PMN cân tại M. Suy ra

$$\angle MPN = \angle MNP. \qquad (2.3)$$

Từ định nghĩa các điểm M,N suy ra MN là đường trung bình của tam giác APB. Do đó $MN \parallel AP$. Suy ra

$$\angle MNP = \angle APC \text{ (hai góc đồng vị).} \qquad (2.4)$$

Lại có: $\angle MPN = \angle CPt$ (hai góc đối đỉnh). (2.5)

Từ (2.3), (2.4) và (2.5), suy ra

$$\angle APC = \angle CPt.$$

Từ đó, do C nằm trong góc $\angle CPt$ nên PC là phân giác trong của $\angle APt$. Suy ra

$$d(C,PA) = d(C,PT),$$

$$\text{hay } d(C,PY) = d(C,PZ) \qquad (2.6)$$

(do P,Y,A thẳng hàng và Z thuộc đường thẳng Pt).

Do C nằm trong góc $\angle PZY$, cũng như góc $\angle PYX$ nên ta có:

C thuộc phân giác trong của góc $\angle PZY$

$\Leftrightarrow d(C,ZP) = d(C,ZY)$, hay $d(C,PZ) = d(C,Y$

(do Z,Y,X thẳng hàng)

$\Leftrightarrow d(C,PY) = d(C,YX)$ (do (2.6))

$\Leftrightarrow C$ thuộc phân giác trong của góc $\angle PYX$.

Kết luận của bài toán được chứng minh.

Trong số các lời giải được gửi tới Tòa soạn, có một số lời giải có sự nhầm lẫn trong việc gọi tên các điểm (nghĩa là, chỉ cần thay tên gọi của một số điểm bằng tên gọi khác thì sẽ có ngay một lời giải hoàn hảo). Một cách xuề xòa, có thể coi sự nhầm lẫn ấy là "lỗi của thằng đánh máy", và do đó có thể châm chước, bỏ qua, coi những lời giải như thế là lời giải đúng. Tuy nhiên, nếu xét một cách nghiêm túc (như khi chấm bài kiểm tra trên lớp hoặc chấm bài thi chẳng hạn) thì vì các điểm được gọi tên đều là các điểm có trong hình nên các kết luận được nêu ra là các kết luận sai về mặt toán học, và do đó không thể coi những lời giải như vậy là lời giải đúng.

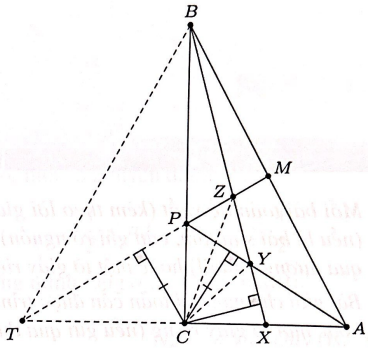
Trên tinh thần "yêu cho roi cho vọt, ghét cho ngọt cho bùi", chúng tôi coi những lời giải mắc lỗi như vừa nêu trên là những lời giải sai! Theo đó, trong số các lời giải mà Pi nhận được, chỉ những lời giải của các bạn có tên sau đây là lời giải đúng: *Lê Minh Quỳnh Anh* (lớp 8F, trường THCS Trần Mai Ninh, không rõ của quận/huyện và tỉnh/thành phố nào); *Lê Đức Minh* (lớp 8T1, trường THCS Đoàn Thị Điểm, TP. Hà Nội); *Vũ Văn Dũng* (lớp 9B, trường THCS Lý Tự Trọng, huyện Vị Xuyên, Hà Giang); *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, TP. Hồ Chí Minh); *Nguyễn Thuý Kim Ngân* và *Bùi Khánh Vĩnh* (lớp 10CT1, trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh).

Trở lại việc tìm lời giải cho bài **P121.**

Với việc hiểu định nghĩa đường phân giác của một góc, dễ thấy kết luận của bài **P121** có thể được phát biểu dưới dạng: "*Điểm C cách đều các đường thẳng ZP và ZY khi và chỉ khi C cách đều các đường thẳng YP và YX*". Từ cách phát biểu này, với lưu ý rằng ba điểm Z, Y, X thẳng hàng, có thể thấy *kết luận của bài* **P121** *tương đương với khẳng định "C cách đều các đường thẳng ZP và YP"*, hay nói một cách khác, "*PC là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của góc* $\angle YPZ$". Từ đây, với lưu ý rằng điểm C nằm ngoài góc $\angle YPZ$, sẽ suy ra kết luận của bài **P121** tương đương với khẳng định "*PC là phân giác ngoài của góc* $\angle YPZ$". Phải chăng, từ cách tiếp cận này mà nảy sinh ý tưởng xét phần kéo dài về phía P của đoạn thẳng MP, dẫn tới việc dựng thêm điểm T trong lời giải 1 hoặc điểm N trong lời giải 2?

Nghĩ như trên, thêm một chút để ý tới giả thiết "$CP : PB = 1 : 2$" (nhằm cố gắng tận dụng, ở mức tối đa có thể, tất cả các giả thiết, khi dựng thêm đường, thêm điểm, ...), có thể bạn sẽ thấy vẫn với điểm T trong lời giải 1, nhưng "mô tả" khác đi một xíu (tức, dựng theo cách khác đi một xíu), ta sẽ kết nối được giả thiết vừa nêu với giả thiết "M là trung điểm của AB"; nhờ thế, sẽ có một cách đi tới đích nhanh hơn và đồng thời, "tiết kiệm" kiến thức hơn đáng kể, so với hai cách đi, thể hiện ở hai lời giải trên đây. Cụ thể, ta có:

Lời giải 3 (xem Hình 3).



Hình 3.

Lấy điểm T đối xứng với A qua C. Khi đó, BC là trung tuyến xuất phát từ B của tam giác ABT. Mà P thuộc đoạn BC và $PB : PC = 2 : 1$ nên P là trọng tâm của tam giác đó. Kết hợp với M là trung điểm của AB, suy ra T, P, M thẳng hàng.

Hơn nữa, do $BC \perp AC$ nên BC là trung trực của AT. Vì thế, APT là tam giác cân tại P. Suy ra, PC là phân giác trong của góc $\angle APT$. Do đó,

$$d(C, PA) = d(C, PT),$$

$$\text{hay } d(C, PY) = d(C, PZ) \qquad (*)$$

(do P, Y, A thẳng hàng và T, P, M, Z thẳng hàng).

Từ đó, do C nằm trong góc $\angle PZY$, cũng như góc $\angle PYX$, nên ta có:

C thuộc phân giác trong của góc $\angle PZY$

$\Leftrightarrow d(C, ZP) = d(C, ZY)$, hay $d(C, PZ) = d(C, YX)$

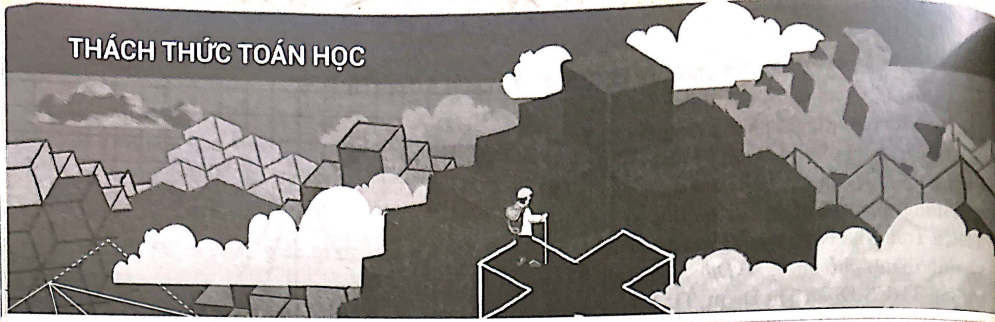
(do Z, Y, X thẳng hàng)

$\Leftrightarrow d(C, PY) = d(C, YX)$ (do $(*)$)

$\Leftrightarrow C$ thuộc phân giác trong của góc $\angle PYX$.

Kết luận của bài toán được chứng minh.

Bạn thấy đấy, có những khi tuy có ý tưởng đúng, nhưng chỉ một thoáng lơ đãng thôi, một chút nóng vội thôi, bạn sẽ làm cho việc thực hiện ý tưởng đó trở nên khá vất vả và "tốn kém", thậm chí còn có thể sa vào bế tắc. Vội vàng một li, đi một dặm là thế!



- *Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kì này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).*
- *Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.*
- *Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của "Thách thức kì này" chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.*

THÁCH THỨC KÌ NÀY

Dành cho cấp THCS

P151. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn bán kính 1 và có $\angle BAC = 45°$. Gọi E và F là chân các đường cao hạ từ B và C của tam giác đó. Hãy tính độ dài đoạn thẳng EF.

Hà Minh Thơ (Phú Thọ) st.

P152. Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại ba số thực khác 0, đôi một khác nhau x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x - \frac{y}{z} - \frac{z}{y} = y - \frac{z}{x} - \frac{x}{z} = z - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = a.$$

Igor Voronovich (CH Belarus)

P153. Tìm số nguyên dương $k \geq 4$ nhỏ nhất sao cho trong k số nguyên dương tùy ý, mà mỗi số đều chỉ có các ước nguyên tố không vượt quá 5, luôn tồn tại 4 số có tích là một số chính phương.

Nguyễn Tiến Lâm (Hà Nội)

P154. Trên mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm có tọa độ (x, y), với x và y là các số nguyên mà $1 \leq x \leq 19$ và $1 \leq y \leq 4$, được tô bởi màu đỏ, hoặc màu tím, hoặc màu vàng. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ mà tất cả các đỉnh của nó được tô bởi cùng một màu.

Hà Thanh (Cần Thơ) st.

Dành cho cấp THPT

P155. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC cố định. Xét một điểm P di động trong mặt phẳng sao cho P không nằm trên các đường thẳng CA và AB. Gọi (ω_b) là đường tròn đi qua các hình chiếu vuông góc của B trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác PCA. Gọi (ω_c) là đường tròn đi qua các hình chiếu vuông góc của C trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam

giác PAB. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn (ω_b) và (ω_c) luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trong mặt phẳng.

Trần Quang Hùng (Hà Nội)

P156. Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực, có tính chất: Với mọi $a \in \mathbb{R}, P(a)$ là số nguyên khi và chỉ khi $Q(a)$ là số nguyên. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai đa thức $P(x)+Q(x)$ và $P(x)-Q(x)$ là đa thức hằng.

Võ Quốc Bá Cẩn (Hà Nội) st.

P157. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x^2+f(xy)) = x \cdot f(x+y)$$

với mọi số thực x, y.

Trần Văn Trí (Bình Dương)

P158. Cho dãy số nguyên $(x_n)_{n\geq 1}$ và dãy số nguyên dương $(y_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1/ $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$;

2/ $x_{n+2} = \begin{cases} x_{n+1} \cdot y_{n+1} + x_n & \text{nếu } y_n = 1 \\ x_{n+1} \cdot y_{n+1} - x_n & \text{nếu } y_n > 1 \end{cases}$

với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh rằng $\max\{x_{2018}, x_{2019}\} \geq 2018$.

Lê Huy (Nam Định) st.

P159. Cho dãy số nguyên $(a_n)_{n\geq 1}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1/ $a_1 = 2$ và $a_2 = 7$;

2/ Với mọi số nguyên dương n,

$$-\frac{1}{2} < a_{n+2} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng $a_{2018} \equiv 7 \pmod 9$.

Nguyễn Văn Quý (Hà Nội)

P160. Cho số nguyên dương n và cho n số thực đôi một phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Gọi K là tập hợp các số thực y thỏa mãn:

$$|y-a_1| \cdot |y-a_2| \cdots |y-a_n| < 1.$$

Chứng minh rằng có thể chọn được trên trục số thực n khoảng có tổng độ dài bằng 12 mà hợp của chúng chứa K.

Hà Huy Khoái (Hà Nội)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

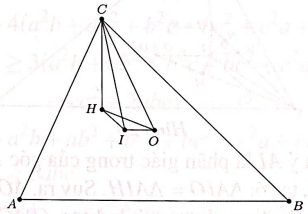
P73. Gọi O, I, H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm của tam giác nhọn, không đều ABC. Chứng minh rằng không có đỉnh nào của tam giác ABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH.

(*Tam giác nhọn* là tam giác có tất cả các góc trong đều là góc nhọn).

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*). Từ giả thiết tồn tại đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH, suy ra tam giác ABC không cân.

Ta sẽ chứng minh kết luận của bài ra bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử ngược lại, tồn tại một đỉnh của tam giác ABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH. Do tam giác ABC nhọn và không cân nên không mất tổng quát, có thể giả sử đỉnh đó là C.



Vì H, I và O tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên CI là phân giác trong của góc $\angle HCO$. Do đó, với lưu ý $IHCO$ là tứ giác nội tiếp, ta có:

$$\angle IHO = \angle ICO = \angle ICH = \angle HOI.$$

Suy ra, tam giác HIO cân tại I. Vì thế, $IH = IO$. Đặt $t = IH = IO$.

Gọi M và N tương ứng là hình chiếu vuông góc của I trên AO và AH.

Trên đường thẳng AO, lấy các điểm O_1 và O_2 sao cho

$$IO_1 = IO_2 = t,$$

và O_1 nằm giữa A và M, O_2 nằm trên tia đối của tia MO_1.

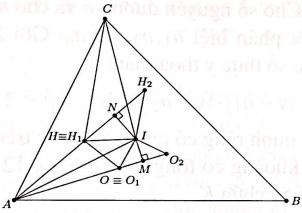
Trên đường thẳng AH, lấy các điểm H_1 và H_2 sao cho

$$IH_1 = IH_2 = t,$$

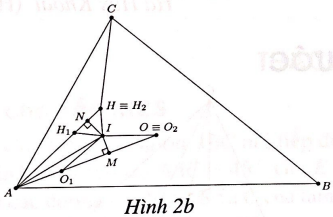
và H_1 nằm giữa A và N, H_2 nằm trên tia đối của tia NH_1.

Vì trên đường thẳng AO, cũng như trên đường thẳng AH, chỉ có đúng 2 điểm cách I một khoảng bằng t nên chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: $O \equiv O_1$ và $H \equiv H_1$* (xem Hình 2a) *hoặc $O \equiv O_2$ và $H \equiv H_2$* (xem Hình 2b).



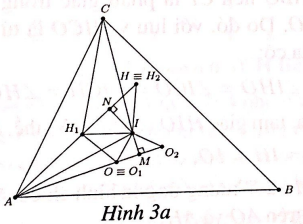
Hình 2a



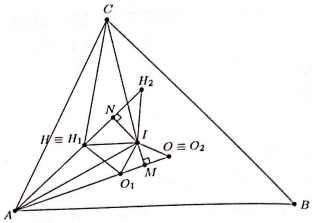
Hình 2b

Với lưu ý AI là phân giác trong của góc $\angle HAO$, dễ thấy, ta có: $\Delta AIO = \Delta AIH$. Suy ra, $AO = AH$. Từ đây, dễ dàng chứng minh được $\angle BAC = 60°$.

• *Trường hợp 2: $O \equiv O_1$ và $H \equiv H_2$* (xem Hình 3a) *hoặc $O \equiv O_2$ và $H \equiv H_1$* (xem Hình 3b).



Hình 3a



Hình 3b

Với lưu ý AI là phân giác trong của góc $\angle HAO$, ta có:

$$\angle IO_1O_2 \angle IO_2O_1 = \angle IH_1H_2 = \angle IH_2H_1.$$

Suy ra $AOIH$ là tứ giác nội tiếp.

Từ việc xét hai trường hợp trên hiển nhiên suy ra nếu A không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH thì $\angle BAC = 60°$. (1)

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được nếu B không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH thì $\angle ABC = 60°$. (2)

Do vai trò của A và B đối với C là như nhau nên hoặc cả hai đỉnh A, B cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH hoặc cả hai đỉnh đó cùng không nằm trên đường tròn vừa nêu. (3)

Từ (1), (2) và (3), với lưu ý ABC là tam giác không đều (theo giả thiết), suy ra phải có cả A và B cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH, và vì thế O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, là điều không thể. Điều vô lí vừa nhận được chứng tỏ giả sử phản chứng ở phần đầu lời giải là sai và vì thế ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. Việc phải dùng phương pháp phản chứng để giải bài đã ra là hiển nhiên. Điểm khó chịu của bài toán là khai thác giả thiết phản chứng đó như thế nào. Do ở bài toán này, bạn không thể vẽ chính xác hình nên bạn sẽ chỉ vượt qua được sự khó chịu vừa nêu nếu ***không có*** thói quen khi giải các bài toán hình học phải vẽ hình thật chính xác, làm chỗ dựa quan trọng cho việc dự đoán quan hệ giữa các yếu tố trong hình.

2. Cho tới thời điểm bản thảo vào nhà in, tuy đã hơn nửa năm trôi qua kể từ khi bài toán được đăng tải trên Tạp chí, Tòa soạn chỉ nhận được

hai lời giải cho bài toán. Trong hai bạn gửi lời giải tới Tòa soạn, có một bạn, do không ý thức được rằng vai trò của A và B đối với C là như nhau nên nhận xét rằng bài đã ra không đúng, cần thay giả thiết "tam giác ABC không đều" bởi giả thiết "không có góc nào bằng 60°" và bạn đó đã giải bài toán tự chỉnh sửa. Vì thế, lời giải mà Tòa soạn nhận được là một lời giải sai. Lời giải còn lại cũng là lời giải sai do sử dụng một số kết quả được "chứng minh" bằng cách "nhìn hình ta thấy"!

Hà Thanh

P121. Xem lời giải và các nhận xét về các lời giải mà Tòa soạn nhận được trong bài viết "Vội vàng một li, đi một dặm" ở Chuyên mục "Giải Toán cùng bạn" của số Tạp chí này (trang 13 - 15).

P122. Chứng minh rằng, với mọi số thực dương a,b,c, ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{b(c+a)}}+\sqrt{\frac{c^2+ab}{c(a+b)}}\geq 3.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải.

Kí hiệu P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Tiếp theo, có thể giải bài đã ra theo một trong các cách sau:

Cách 1 (*theo lời giải của bạn Lê Tuấn Tú, lớp 9T, trường THPT Dân lập Lương Thế Vinh, Hà Nội*).

Vì $a,b,c>0$ nên ta có:

$$P=\frac{a^2+bc}{\sqrt{a(b+c)\cdot(a^2+bc)}}+\frac{b^2+ca}{\sqrt{b(c+a)\cdot(b^2+ca)}}+\frac{c^2+ab}{\sqrt{c(a+b)\cdot(c^2+ab)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số thực dương $a(b+c)$ và (a^2+bc), ta được:

$$\sqrt{a(b+c)\cdot(a^2+bc)}\leq\frac{ab+ac+a^2+bc}{2}=\frac{(a+b)(a+c)}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{a^2+bc}{\sqrt{a(b+c)\cdot(a^2+bc)}}\geq\frac{2(a^2+bc)}{(a+b)(a+c)}\quad(1.1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b^2+ca}{\sqrt{b(c+a)\cdot(b^2+ca)}}\geq\frac{2(b^2+ca)}{(b+c)(b+a)}.\quad(1.2)$$

$$\frac{c^2+ab}{\sqrt{c(a+b)\cdot(c^2+ab)}}\geq\frac{2(c^2+ab)}{(c+a)(c+b)}.\quad(1.3)$$

Cộng, vế theo vế, các bất đẳng thức (1.1), (1.2) và (1.3), ta được:

$$P\geq 2\left(\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}\right).\quad(1.4)$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{2}.\quad(1.5)$$

Thật vậy, vì $a,b,c>0$ nên

$$\begin{aligned}(1.5)&\Leftrightarrow 2[(a^2+bc)(b+c)+(b^2+ca)(a+c)+(c^2+ab)(a+b)]\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)\\&\Leftrightarrow 4(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)\geq 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)\\&\Leftrightarrow a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geq 6abc\\&\Leftrightarrow a(b^2+c^2-2abc)+b(c^2+a^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)\geq 0\\&\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0.\quad(1.6)\end{aligned}$$

Hiển nhiên, (1.6) là bất đẳng thức đúng. Vì thế, (1.5) được chứng minh.

Từ (1.4) và (1.5), suy ra $P\geq 3$.

Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (1.1), (1.2), (1.3) và (1.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2 (*dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Phương Thảo, lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh*).

Vì $a,b,c>0$ nên ta có:

$$P=\frac{\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}}{a(b+c)}+\frac{\sqrt{(b^2+ca)(bc+ba)}}{b(c+a)}+\frac{\sqrt{(c^2+ab)(ca+cb)}}{c(a+b)}. \quad (2.1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ 2 số $(a,\sqrt{bc})$ và $(\sqrt{ab},\sqrt{ac})$, ta được:

$$(a^2+bc)(ab+ac)\geq(a\cdot\sqrt{ab}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac})^2=ab\cdot(a+c)^2.$$

Suy ra

$$\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}\geq\sqrt{ab}\cdot(a+c). \quad (2.2)$$

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt{(b^2+ca)(bc+ba)}\geq\sqrt{bc}\cdot(b+a). \quad (2.3)$$

$$\sqrt{(c^2+ab)(ca+cb)}\geq\sqrt{ca}\cdot(c+b). \quad (2.4)$$

Từ (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4), suy ra

$$P\geq\frac{\sqrt{ab}\cdot(a+c)}{a(b+c)}+\frac{\sqrt{bc}\cdot(b+a)}{b(c+a)}+\frac{\sqrt{ca}\cdot(c+b)}{c(a+b)}. \quad (2.5)$$

Kí hiệu Q là vế phải của (2.5). Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$Q\geq3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab}\cdot(a+c)}{a(b+c)}\cdot\frac{\sqrt{bc}\cdot(b+a)}{b(c+a)}\cdot\frac{\sqrt{ca}\cdot(c+b)}{c(a+b)}}=3. \quad (2.6)$$

Từ (2.5) và (2.6), suy ra $P\geq3$.

Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (2.2), (2.3), (2.4) và (2.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 3 (*dựa theo lời giải của các bạn Nguyễn Quang Minh, lớp 9/3, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai và Lê Đức Hiếu, lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterđam, Hà Nội*).

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$P\geq3\sqrt[6]{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\cdot\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\cdot\frac{c^2+ab}{c(a+b)}}. \quad (3.1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\cdot\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\cdot\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\geq1. \quad (3.2)$$

Thật vậy, do $a,b,c>0$ nên

$$(3.2)\Leftrightarrow(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\geq abc(a+b)(b+c)(c+a). \quad (3.3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ 2 số $(a,\sqrt{bc})$ và $(b,\sqrt{bc})$, ta được:

$$(a^2+bc)(b^2+bc)\geq(ab+bc)^2.$$

hay $$b(a^2+bc)(b+c)\geq b^2\cdot(a+c)^2. \quad (3.4)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$c(b^2+ca)(c+a)\geq c^2\cdot(b+a)^2. \quad (3.5)$$

$$a(c^2+ab)(a+b)\geq a^2\cdot(c+b)^2. \quad (3.6)$$

Vì các vế của (3.4), (3.5) và (3.6) đều dương nên nhân các bất đẳng thức đó với nhau, vế theo vế, rồi chia cả 2 vế của bất đẳng thức thu được cho $abc(a+b)(b+c)(c+a)$, ta sẽ nhận được bất đẳng thức (3.3). Vì thế, (3.2) được chứng minh.

Từ (3.1) và (3.2), hiển nhiên suy ra $P\geq3$.

Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (3.1), (3.4), (3.5) và (3.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Để tiện cho việc theo dõi của mọi đối tượng độc giả, chúng tôi nhắc lại ở đây:

• *Bất đẳng thức Cauchy cho n số thực không âm (n nguyên lớn hơn 1)* $a_1,a_2,\ldots,a_n$:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1=a_2=\cdots=a_n.$$

• *Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ n số thực* $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *và* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *(n nguyên lớn hơn 1):*

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

(Qui ước, nếu tồn tại i mà $b_i=0$ thì phải có $a_i=0$).

Bất đẳng thức Bunhiacopxki còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacopxki hoặc Cauchy - Schwarz.

2. Hầu hết các bạn gửi lời giải tới Tạp chí đều giải bài đã ra theo Cách 1 hoặc Cách 3; một số bạn đã giải theo cả hai cách, 1 và 3.

Điểm khác biệt của các lời giải theo Cách 1 nằm ở cách chứng minh bất đẳng thức (1.5). Chẳng hạn, có bạn đã chứng minh bất đẳng thức vừa nêu bằng cách sử dụng hằng đẳng thức:

$$\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$
$$=2-\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lưu ý rằng, ở Lời giải Cách 1 trên đây, có thể chứng minh

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geq 6abc$$

bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 6 số hạng của tổng nằm ở vế trái của bất đẳng thức trên. Tuy nhiên, chúng tôi đã lựa chọn cách chứng minh như đã trình bày trong phần Lời giải nhằm khẳng định bài đã ra có thể được giải một cách đơn giản chỉ bằng các kiến thức nằm trong phạm vi nội dung chương trình môn Toán cấp THCS hiện hành.

Điểm khác biệt của các lời giải theo Cách 3 nằm ở cách chứng minh bất đẳng thức (3.2). Ngoại trừ cách đã nêu ở phần Lời giải trên đây, các cách còn lại đều dựa trên việc khai triển các tích có mặt trong bất đẳng thức (3.2).

3. Một số bạn đã phức tạp hóa việc giải bài đã ra bằng việc lựa chọn phương pháp đổi biến.

4. Một số bạn đã mắc các lỗi logic cơ bản trong quá trình lập luận. Chẳng hạn, có bạn đã lập luận như sau:

"$(*)\Rightarrow\ldots\Rightarrow(**)$.

Vì $(**)$là bất đẳng thức đúng nên $(*)$ là bất đẳng thức đúng";

hay, với việc giải bài toán theo Cách 3, có bạn cho rằng "vì có bất đẳng thức (3.1) nên bài toán ***quy về*** việc chứng minh bất đẳng thức (3.2)"; ....

(Các bạn cần nhớ rằng *khi có $A\geq B$ thì để có $A\geq C$* ***không bắt buộc*** *phải có $B\geq C$;* nói cách khác, *khi có $A\geq B$ thì $A\geq C$* ***không tương đương*** *với $B\geq C$*).

5. Một số bạn quên trả lời câu hỏi "đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào" đã nêu trong đề bài.

6. Với việc châm chước (đối với một số lời giải) các lỗi được nêu ở các mục 4 và 5, ngoài các bạn đã được nêu tên ở phần Lời giải trên đây, các bạn có tên sau đây có lời giải đúng: *Lê Minh Quỳnh Anh* (lớp 8F, trường THCS Mai Ninh, không rõ của Quận/Huyện, Tỉnh/Thành phố nào); *Vũ Văn Dũng* (lớp 9B, trường THCS Lý Tự Trọng, Huyện Vị Xuyên, Hà Giang); *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, TP. Hồ Chí Minh); *Trương Tuấn Nghĩa* (lớp 9A, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterđam, Hà Nội); *Nguyễn Xuân Hiếu* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đăk Nông); *Hồ Long Nhật* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa); *Nguyễn Nhật Phi* (lớp 10T, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định); *Nguyễn Thái Bình, Phan Minh Đạt, Nguyễn Quốc Hưng, Trương Hồ Hoài Nam, Nguyễn Thúy Kim Ngân, Trần Hồng Nguyên* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh); *Lê Tuấn Anh* (lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); *Trần Tiến Mạnh* (lớp 12A1, trường THPT Chuyên, ĐH Vinh); *Nguyễn Quang Huy* (không rõ lớp và nơi học) và *N.Đ. Thanh* (không rõ lớp và nơi học).

7. Bạn Lê Tuấn Tú có nhận xét đúng rằng Lời giải Cách 3 cho phép khái quát bài đã ra để thu được kết quả sau:

"Cho số nguyên $n\geq 2$. Khi đó, với mọi số thực dương a,b,c, ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sqrt[n]{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}}+\sqrt[n]{\frac{b^2+ca}{b(c+a)}}+\sqrt[n]{\frac{c^2+ab}{c(a+b)}}\geq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$."

8. Một trong các câu hỏi có thể đặt ra từ việc giải được bài đã ra: **Kết quả sau đây liệu có đúng?**

"Cho các số nguyên m, n, với $m \geq 3$ và $n \geq 2$. Khi đó, với mọi số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_m$, ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2+a_2a_3}{a_1(a_2+a_3)}}+\sqrt[n]{\frac{a_2^2+a_3a_4}{a_2(a_3+a_4)}}+\cdots+$$
$$+\sqrt[n]{\frac{a_m^2+a_1a_2}{a_m(a_1+a_2)}} \geq m.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m."$$

Còn những câu hỏi nào nữa có thể đặt ra? Xin nhường lời cho bạn đọc.

Lê Huy

P123. Chứng minh rằng trong 18 số nguyên dương liên tiếp, mà mỗi số đều có 3 chữ số, tồn tại ít nhất một số có tính chất: số đó chia hết cho tổng các chữ số của nó.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải mà Tòa soạn nhận được*).

Xét 18 số nguyên dương liên tiếp tùy ý, mà mỗi số đều có 3 chữ số.

Ta biết rằng, trong 18 số nói trên có đúng một số chia hết cho 18. Giả sử số đó là $\overline{abc}\,(a \neq 0)$.

Vì chia hết cho 18 nên $\overline{abc} \vdots 9$. Do đó, theo dấu hiệu chia hết cho 9, ta có

$$(a+b+c) \vdots 9. \qquad (1)$$

Vì $a, b, c \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ và $a \neq 0$ nên $0 < a+b+c \leq 27$. Do đó, từ (1) suy ra

$$a+b+c \in \{9; 18; 27\}. \qquad (2)$$

Nếu $a+b+c = 27$ thì $\overline{abc} = 999$ và vì thế, theo định nghĩa của $\overline{abc}$, ta phải có $999 \vdots 18$, là điều không thể. Do đó, $a+b+c \neq 27$. Kết hợp với (2) suy ra $a+b+c \in \{9; 18\}$. Từ đây, do $\overline{abc} \vdots 18$ nên

$$\overline{abc} \vdots (a+b+c).$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Trong lời giải trên, ta đã sử dụng kết quả quen biết sau:

Kết quả 1. *Cho số nguyên $n \geq 2$. Khi đó, trong n số nguyên liên tiếp, luôn có đúng một số chia hết cho n.*

Có thể chứng minh kết quả 1, bằng phương pháp phản chứng, như sau:

Chứng minh: Xét n số nguyên liên tiếp a, $a+1, \ldots, a+(n-1)$, với a là một số nguyên tùy ý.

Trước hết, ta chứng minh trong n số trên có ít nhất một số chia hết cho n.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tất cả n số trên đều không chia hết cho n. Thế thì, khi chia n số đó cho n, ta chỉ có thể nhận được tối đa $n-1$ số dư đôi một khác nhau. Điều đó chứng tỏ tồn tại hai số (trong n số nguyên liên tiếp nêu trên) cho cùng một số dư, khi chia cho n. Giả sử hai số đó là $a+k$ và $a+m$, với k, m là các số tự nhiên và $0 \leq k < m \leq n-1$. Khi đó, ta có

$$(a+m)-(a+k) = m-k$$

là một số nguyên dương nhỏ hơn n (suy ra từ các ràng buộc nêu trên đối với k, m) và chia hết cho n (suy ra từ định nghĩa của các số $a+k$ và $a+m$). Rõ ràng, điều vừa nhận được là một điều vô lí; chứng tỏ giả sử phản chứng ở trên là sai. Vì thế, ta có điều muốn chứng minh.

Tiếp theo, ta chứng minh trong n số nguyên liên tiếp nêu trên không thể có quá một số chia hết cho n.

Thật vậy, giả sử ngược lại, có hai số cùng chia hết cho n; giả sử là $a+p$ và $a+q$, với p, q là các số tự nhiên và $0 \leq p < q \leq n-1$. Khi đó, bằng cách xét tương tự như phần chứng minh vừa nêu trên đối với hiệu $(a+p)-(a+q)$, ta sẽ đi đến một điều vô lí, cho thấy giả sử phản chứng vừa nêu trên là sai. Do đó, ta có điều muốn chứng minh.

Từ các kết quả đã chứng minh được ở trên, hiển nhiên suy ra điều phải chứng minh.

Lưu ý rằng, chứng minh nêu trên không phải là chứng minh duy nhất cho kết quả 1.

2. Trong số các bạn đã gửi lời giải tới Tòa soạn, có một số bạn, thay vì áp dụng kết quả 1 cho $n = 18$, đã áp dụng kết quả đó cho $n = 9$, dẫn tới lời giải bị dài dòng.

3. Các bạn có tên sau đây có lời giải đúng: *Vũ Văn Dũng* (lớp 9B, trường THCS Lý Tự Trọng, Huyện Vị Xuyên, Hà Giang), *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, TP. Hồ Chí Minh), *Trương Tuấn Nghĩa* (lớp 9A, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterđam, Hà Nội), *Nguyễn Đức Anh Khoa* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh) và *Nguyễn Tấn Tài* (lớp 12A, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước).

4. Người chấm bài rất "tò mò" muốn biết lời giải cho bài toán sau, phát sinh từ bài đã ra:

Bài toán phát sinh. *Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong k số nguyên dương liên tiếp, mà mỗi số đều có 3 chữ số, tồn tại ít nhất một số chia hết cho tổng các chữ số của nó.*

Nếu bạn có lời giải cho bài toán trên thì hãy gửi ngay về cho Pi nha.

5. Dễ dàng nhận thấy, chỉ cần thay cụm từ "chia hết cho *n*" ở một số chỗ thích hợp (bạn đọc tự tìm các chỗ đó nhé) trong chứng minh ở mục 1 trên đây bởi cụm từ "chia *n* dư *r*", ta sẽ có một chứng minh cho kết quả khái quát sau đây:

Kết quả 2. *Cho các số nguyên n và r, với* $n \geq 2$ *và* $0 \leq r \leq n-1$. *Khi đó, trong n số nguyên liên tiếp, luôn có đúng một số chia n dư r.*

Như vậy, trong *n* số nguyên liên tiếp (tùy ý), luôn có đúng một số chia *n* dư 0 (tức, chia hết cho *n*), có đúng một số chia *n* dư 1, ..., có đúng một số chia *n* dư $n-1$. Từ đây hiển nhiên suy ra *tập hợp gồm n số nguyên liên tiếp có tính chất: mỗi số nguyên đều có cùng số dư, trong phép chia cho n, với đúng một số thuộc tập hợp đó* (nói cách khác: *mỗi số nguyên đều đồng dư với đúng một số thuộc tập hợp đó, theo modulo n*). Trong Toán học, một tập hợp các số nguyên có tính chất như thế được gọi là một *hệ thặng dư đầy đủ modulo n*. Với khái niệm này, ta có thể phát biểu lại khẳng định vừa nêu dưới dạng:

"Tập hợp gồm n số nguyên liên tiếp là một hệ thặng dư đầy đủ modulo n".

Khái niệm hệ thặng dư đầy đủ là một khái niệm cơ bản, quan trọng trong Số học. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm về khái niệm này, cũng như một số ứng dụng của nó, trong cuốn sách **Số học** (Nhà xuất bản Giáo dục, 2004) do GS. Hà Huy Khoái biên soạn.

Lưu Thanh Hà

P124. Cho $n \geq 5$ điểm nằm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tí và Tèo chơi trò chơi sau: Hai bạn luân phiên nhau kẻ các đoạn thẳng nối hai điểm trong số các điểm đã cho; ở lượt của mình, mỗi bạn chỉ kẻ đúng một đoạn thẳng và không có bạn nào kẻ lại đoạn thẳng đã được kẻ trước đó. Nếu sau lượt kẻ của một bạn nào đó mà mỗi điểm, trong *n* điểm đã cho, đều là đầu mút của ít nhất một đoạn thẳng (trong số các đoạn thẳng đã được kẻ) thì bạn đó được coi là thắng cuộc.

Giả sử Tí là người kẻ đoạn thẳng đầu tiên. Hãy tìm tất cả các số nguyên $n \geq 5$ sao cho Tí có cách chơi để thắng cuộc, cho dù Tèo có thực hiện các lượt kẻ của mình như thế nào đi chăng nữa.

Lời giải (*của người chấm bài*).

Ta sẽ gọi một điểm là *điểm cô lập* nếu điểm đó không được nối với bất kì điểm nào khác trong số $n-1$ điểm còn lại.

Dễ thấy, Tí sẽ là người thắng cuộc khi và chỉ khi trước lượt kẻ cuối của Tí, trên mặt phẳng chỉ còn lại 1 hoặc 2 điểm cô lập.

Rõ ràng, Tèo buộc phải chấp nhận để Tí có được điều trên trước lượt kẻ cuối của Tí khi và chỉ khi trước lượt kẻ của Tèo, trên mặt phẳng còn đúng 3 điểm cô lập và $n-3$ điểm còn lại đôi một đã được nối với nhau bởi các đoạn thẳng. Vì Tí là người thực hiện việc kẻ đầu tiên nên điều vừa nêu chỉ có thể xảy ra khi số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n-3$ điểm là một số lẻ; nghĩa là,

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

phải là số lẻ.

Dễ thấy, điều vừa nêu trên có được khi và chỉ khi *n* có dạng $4k+1$ hoặc $4k+2$, với *k* là một số nguyên dương.

Như vậy, Tí có thể có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng *chỉ khi* $n = 4k+1$ hoặc $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Ngược lại, xét n có các dạng vừa nêu trên, ta có:

• *Trường hợp 1:* $n = 4k+1, k \in \mathbb{N}^*$.

+ Với $k = 1$, hiển nhiên Tí là người thắng cuộc.

+ Xét $k \geq 2$.

Dễ thấy, sau mỗi lượt kẻ của Tí hoặc Tèo, số điểm cô lập (trong số n điểm đã cho) hoặc giữ nguyên, hoặc giảm 1 hoặc giảm 2.

Xét cách chơi sau của Tí:

Ở lượt đầu tiên, Tí kẻ một đoạn thẳng bất kì. Tiếp theo, một khi số điểm cô lập trên mặt phẳng còn lớn hơn 3 vào thời điểm Tèo thực hiện lượt kẻ của mình, sau mỗi lượt kẻ của Tèo, nếu số điểm cô lập giảm đi s (điểm), $s \in \{0;1;2\}$, thì Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng sao cho số điểm cô lập giảm đi $2-s$, bằng cách:

– Nếu $s = 0$ (tức Tèo kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập) thì Tí kẻ đoạn thẳng nối hai điểm cô lập tùy ý;

– Nếu $s = 1$ (tức Tèo một kẻ đoạn thẳng nối một điểm cô lập với một điểm không cô lập) thì Tí cũng kẻ một đoạn thẳng nối một điểm cô lập với một điểm không cô lập;

– Nếu $s = 2$ (tức Tèo kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm cô lập) thì Tí kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập.

Tí có thể thực hiện việc kẻ như trên do số điểm cô lập trên mặt phẳng lớn hơn 3 vào thời điểm Tèo thực hiện lượt kẻ của mình và khi nối hai điểm cô lập với nhau, Tèo đã tạo ra 2 điểm không cô lập mới, mà mỗi điểm chỉ được nối với đúng một điểm trong số các điểm không cô lập có trên mặt phẳng sau khi Tèo thực hiện lượt kẻ của mình.

Với cách chơi nêu trên của Tí, sau lượt kẻ đầu tiên của Tí, cũng như sau mỗi cặp lượt kẻ Tèo – Tí, số điểm cô lập giảm đi đúng 2. Từ đó, do số điểm cô lập ban đầu là một số lẻ $(4k+1, k \geq 2)$ lớn hơn hoặc bằng 9 nên phải tồn tại thời điểm mà sau cặp lượt kẻ Tèo – Tí, số điểm cô lập bằng đúng 3 và người phải thực hiện lượt kẻ ngay sau khi tình huống này xảy ra là Tèo. Lúc này, nếu $n-3$ điểm không cô lập đôi một đã được nối với nhau bởi các đoạn thẳng thì Tí sẽ là người thắng cuộc, theo nhận xét ở phần đầu lời giải. Trường hợp ngược lại, còn các điểm không cô lập chưa được nối với nhau, hiển nhiên, ở mỗi lượt của mình, cả Tèo và Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập (một khi còn có thể). Do sau mỗi lượt kẻ của Tèo, số đoạn thẳng đã được kẻ (kể từ khi hai bạn bắt đầu chơi) luôn là một số chẵn, mà tổng số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n-3$ điểm không cô lập là một số lẻ $((2k-1)\cdot(4k-3))$ nên một khi Tèo còn kẻ được đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập thì Tí cũng làm được điều tương tự, và hơn nữa, phải tồn tại thời điểm mà sau lượt kẻ của Tí, tất cả $n-3$ điểm không cô lập sẽ đôi một được nối với nhau. Điều này, theo nhận xét ở phần đầu lời giải, buộc Tèo phải nhường phần thắng cuộc cho Tí.

• *Trường hợp 2:* $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}^*$.

+ Với $k = 1$, dễ thấy, Tí là người thắng cuộc.

+ Xét $k \geq 2$. Khi đó, sau lượt kẻ đầu tiên của Tí, có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

– Khả năng 1: Tèo kẻ một đoạn thẳng nối một trong hai điểm không cô lập với một điểm cô lập.

– Khả năng 2: Tèo kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm cô lập với nhau.

Nếu khả năng 1 xảy ra, Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng nối hai điểm không cô lập với nhau; nếu khả năng 2 xảy ra, Tí sẽ kẻ một đoạn thẳng nối một điểm không cô lập với một điểm cô lập. Bằng cách này, Tí sẽ làm cho số điểm cô lập bị giảm đi một số lẻ (3 hoặc 5) điểm, sau 3 lượt kẻ đầu tiên (gồm 2 lượt của Tí và 1 lượt của Tèo). Vì thế, do số điểm cô lập ban đầu là số chẵn nên bằng cách kẻ nêu trên, Tí sẽ buộc Tèo phải thực hiện lượt kẻ tiếp theo trong trạng thái số điểm cô lập trên mặt phẳng là một số lẻ lớn hơn 3. Điều này, cùng với việc số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số n – 3 điểm là một số lẻ $((2k-1)\cdot(4k-1))$, hiển nhiên, giúp Tí dùng cách chơi đã mô tả ở trường hợp 1 để trở thành người thắng cuộc.

Tóm lại, khi $n = 4k+1$ hoặc $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}^*$, Tí sẽ có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng.

Vậy, tất cả các giá trị n cần tìm theo yêu cầu đề bài là $n = 4k+1$ và $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}^*$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Cho tới thời điểm bản thảo vào nhà in, Tòa soạn chỉ nhận được 4 lời giải từ 4 bạn học sinh, gồm 2 bạn lớp 9 (một ở Hà Giang và một ở TP. Hồ Chí Minh), 1 bạn lớp 10 (ở Bình Định) và 1 bạn lớp 11 (ở TP. Hồ Chí Minh). Tất cả 4 lời giải đều sai, vì các lí do khác nhau.

2. Bạn học sinh lớp 11 có lời giải sai do cho rằng bài đã ra tương đương và có cùng kết quả với bài toán sau:

"Trên mặt phẳng, có $n-2$ hòn sỏi. Hai bạn, Tí và Tèo, chơi trò chơi sau: ở mỗi lượt chơi của mình, mỗi bạn sẽ bốc 1 hoặc 2 hòn sỏi. Người bốc 1 hoặc 2 hòn sỏi cuối cùng được coi là người thắng cuộc. Biết rằng, Tèo là người đầu tiên thực hiện việc bốc sỏi. Hỏi ai là người có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng cuộc?"

Dễ dàng nhận thấy việc nối hai điểm không cô lập (theo thuật ngữ đã dùng trong lời giải trên) ở bài đã ra không tương ứng với động tác bốc sỏi nào trong bài toán trên. Vì thế, bài đã ra không tương đương với bài toán trên.

3. Bạn học sinh lớp 9 ở Hà Giang và bạn học sinh lớp 10 có lời giải sai do đã lập luận như sau, sau khi tìm ra được điều kiện cần cho các giá trị n cần tìm theo yêu cầu đề bài:

"Vì đều biết cách chơi nên hai bạn (ngầm) "thỏa thuận" với nhau chừa ra 3 điểm không động chạm tới và ở mỗi lượt chơi của mình, mỗi bạn chỉ kẻ một đoạn thẳng (tùy ý) nối hai trong số $n-3$ điểm còn lại. Do số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n-3$ điểm là một số lẻ và Tí là người kẻ đoạn thẳng đầu tiên nên Tí sẽ thắng."

Nếu bạn là Tèo và lại biết cách chơi thì bạn có "thỏa thuận" với Tí như trên hay không, khi đã nhẩm tính được số đoạn thẳng có cả hai đầu mút nằm trong số $n-3$ điểm là một số lẻ?

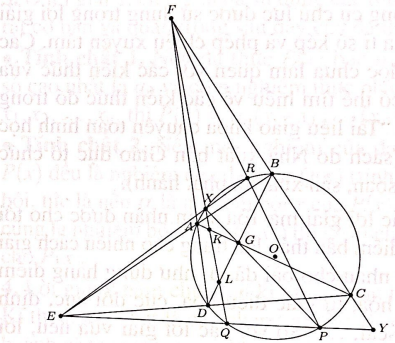
4. Bạn học sinh lớp 9 ở TP. Hồ Chí Minh đã giải bài ra bằng cách xét đầy đủ cả 4 trường hợp có thể đối với n: $n=4k+m, m=0,1,2,3$. Lời giải của bạn đó sai do chỉ ra sai cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng của Tí, trong trường hợp $n=4k+2$.

5. Tôn trọng tác giả của trò chơi, Pi đã liệt bài đã ra vào loại "sưu tầm"; tuy nhiên, sự sưu tầm trong trường hợp này không phải là "sao y bản chính". Cụ thể, bài toán gốc chỉ đòi hỏi tìm các giá trị của n sao cho Tí có hi vọng tìm được cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng. Với yêu cầu như thế, lời giải sẽ chỉ là phần tìm ra dạng của n trong lời giải đã trình bày ở trên. Như vậy, về thực chất, bài đã ra là một sự phát triển đáng kể của bài toán gốc.

Nguyễn Khắc Minh

P125. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F. Trên (O), lấy một điểm P tùy ý. Các đường thẳng PE, PF cắt lại đường tròn (O) tương ứng tại Q, R. Chứng minh rằng các đường thẳng QF và RE cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải (*của tác giả bài toán*).



Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD. Đường thẳng PG cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai X. Ta sẽ chứng minh QF và RE cùng đi qua điểm X.

Thật vậy, gọi giao điểm của đường thẳng QX với các đường thẳng AC và BD tương ứng là K và L.

Đường thẳng BC cắt đường thẳng PQ tại Y.

Chiếu xuyên tâm X hàng điểm (G,K,A,C) lên đường tròn (O), ta được:

$$(GK,AC) = X(GK,AC) = (PQ,AC). \quad (1)$$

Chiếu xuyên tâm B hàng điểm (P,Q,A,C) lên đường thẳng PQ, ta được:

$$(PQ,AC) = B(PQ,AC) = (PQ,EY). \quad (2)$$

Chiếu xuyên tâm C hàng điểm (P,Q,E,Y) lên đường tròn (O), ta được:

$$(PQ,EY) = C(PQ,EY) = (PQ,DB). \quad (3)$$

Chiếu xuyên tâm X hàng điểm (P,Q,D,B) lên đường thẳng BD, ta được:

$$(PQ,DB) = X(PQ,DB) = (GL,DB). \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4), suy ra

$$(GK,AC) = (GL,DB).$$

Do đó, các đường thẳng KL, AD và BC đồng quy; nói cách khác, ba điểm Q,X,F thẳng hàng. (5)

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được ba điểm R,X,E thẳng hàng. (6)

Từ (5) và (6), suy ra hai đường thẳng QF và RE cắt nhau tại điểm X nằm trên đường tròn (O). Ta có điều phải chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Công cụ chủ lực được sử dụng trong lời giải trên là tỉ số kép và phép chiếu xuyên tâm. Các bạn đọc chưa làm quen với các kiến thức vừa nêu có thể tìm hiểu về các kiến thức đó trong cuốn "Tài liệu giáo khoa chuyên toán hình học 10" (sách do Nhà xuất bản Giáo dục tổ chức biên soạn, sản xuất và phát hành).

2. Các lời giải mà Tòa soạn nhận được cho tới thời điểm bản thảo lên trang cho nhiều cách giải khác nhau cho bài đã ra, như dùng hàng điểm điều hòa, tứ giác điều hòa, cực đối cực, định lí Pascal, ... So với các lời giải vừa nêu, lời giải trên đây không chỉ ngắn gọn hơn mà còn có một ưu thế nổi trội là giải quyết được đồng thời mọi thế hình có thể. Cho tới thời điểm này, người chấm bài (và cũng đồng thời là tác giả bài toán) vẫn chưa biết có hay không một lời giải "sơ cấp" hơn, đơn giản hơn cho bài đã ra. Vì thế, việc suy nghĩ tìm một lời giải "sơ cấp" hơn, đơn giản hơn cho bài toán vẫn là một thách thức dành cho những người có quan tâm.

3. Các bạn có tên sau đây có lời giải đúng: *Trần Vũ Duy, Bùi Khánh Vĩnh* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh); *Lê Đức Hiếu* (lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội); *Võ Huỳnh* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); *Phan Quốc Kỳ* (lớp 10T, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, không rõ của tỉnh nào); *Phạm Văn Long Phước* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương); *Nguyễn Trung Sơn* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang), *Võ Minh Quân* (lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt).

Trần Quang Hùng

Lời bàn.

Bài đã ra là một ví dụ minh họa hay và đẹp cho việc ứng dụng tỉ số kép và phép chiếu xuyên tâm vào giải toán hình học.

BBT

P126. Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 5 mà trên đồ thị của nó có đúng ba điểm, với hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện:

$$P''(x_1) = P''(x_2) = P''(x_3) = 0.$$

Chứng minh rằng nếu ba điểm nói trên thẳng hàng thì một trong ba điểm đó là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm còn lại.

Lời giải 1 (*của tác giả bài toán*).

Không mất tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < x_3$.

Do ba điểm $(x_1, P(x_1)), (x_2, P(x_2))$ và $(x_3, P(x_3))$ thẳng hàng (theo giả thiết) nên yêu cầu chứng minh của bài toán tương đương với yêu cầu chứng minh $2x_2 = x_1 + x_3$.

Không mất tổng quát, có thể coi hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1. Khi đó, từ giả thiết suy ra

$$P''(x) = 20(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

đồng thời tồn tại các hằng số α, β sao cho $P(x_i) = \alpha x_i + \beta$ với mỗi $i = 1,2,3$.

Xét đa thức $Q(x) = P(x) - \alpha x - \beta$. Ta có

$$Q''(x) = P''(x) \text{ và } Q''(x_i) = Q(x_i) = 0,$$

với mọi $i = 1,2,3$.

Do đó, $20Q(x) = (x^2 + px + q) \cdot Q''(x)$. (1)

Đặt $x = y - \frac{p}{2}$; khi đó, từ (1), ta được:

$$20Q\left(y - \frac{p}{2}\right) = \left(y^2 + q - \frac{p^2}{4}\right) \cdot Q''\left(y - \frac{p}{2}\right) \quad (2)$$

Đặt $R(y) = Q\left(y - \frac{p}{2}\right)$

$$= y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e$$

và $q - \frac{p^2}{4} = s$.

Khi đó, (2) được viết lại dưới dạng:

$$20R(y) = (y^2+s)\cdot R''(y). \quad (3)$$

Đồng nhất hệ số các hệ số của y^4, y^2 và hệ số tự do ở hai vế của (3), ta được:

$$\begin{cases} 20a = 12a \\ 20c = 12as + 2c \\ 20e = 12cs. \end{cases}$$

Suy ra $a = 0, c = 0$ và $e = 0$. Vì vậy, $R(y)$ là hàm số lẻ; suy ra $R''(y)$ cũng là hàm số lẻ. Vì thế, $R''(y)$ có 3 nghiệm y_1, y_2, y_3, với $y_2 = 0$ và $y_1 + y_3 = 2y_2$. Từ đây, vì $x_i = y_i - \frac{p}{2}, i = 1,2,3$, suy ra

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2 (*của người chấm bài*).

Không mất tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < x_3$.

Do ba điểm $(x_1, P(x_1))$, $(x_2, P(x_2))$ và $(x_3, P(x_3))$ thẳng hàng (theo giả thiết) nên yêu cầu chứng minh của bài toán tương đương với yêu cầu chứng minh $2x_2 = x_1 + x_3$.

Không mất tổng quát, có thể giả sử hệ số cao nhất của $P(x)$ bằng 1.

Vì tính chất của đồ thị của $P(x)$ không thay đổi qua phép tịnh tiến theo trục hoành nên ta có thể giả sử hệ số của x^4 bằng 0. Tương tự, nhờ phép tịnh tiến theo trục tung, ta có thể giả sử hệ số tự do bằng 0. Nghĩa là, ta có thể giả sử $P(x)$ có dạng:

$$P(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx.$$

Khi đó, ta có: $P''(x) = 20x^3 + 6ax + 2b$.

Thực hiện phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $P''(x)$, ta được:

$$P(x) = \left(\frac{1}{20}x^2 + \frac{7a}{200}\right)\cdot P''(x) + \frac{9b}{10}\cdot x^2 + \left(c - \frac{21a^2}{100}\right)\cdot x - \frac{7ab}{100}.$$

Do đó, $P(x_i) = \frac{9b}{10}\cdot x_i^2 + \left(c - \frac{21a^2}{100}\right)\cdot x_i - \frac{7ab}{100}$, $i = 1,2,3$.

Như vậy, các điểm $(x_i, P(x_i))$ nằm trên parabol

$$y = \frac{9b}{10}\cdot x^2 + \left(c - \frac{21a^2}{100}\right)\cdot x - \frac{7b}{100}.$$

Theo giả thiết của bài ra, các điểm này nằm trên một đường thẳng. Vì thế, parabol trên phải suy biến thành đường thẳng; tức là, ta phải có $b = 0$. Do đó, $P(x)$ là hàm số lẻ; suy ra $P''(x)$ cũng là hàm số lẻ. Vì thế, ba nghiệm x_1, x_2, x_3 của $P''(x)$ phải thỏa mãn ràng buộc $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Đây là một bài toán giải tích về tính chất của đồ thị hàm đa thức, mà trong lời giải chứa đựng nhiều kỹ thuật cơ bản liên quan đến các phép biến đổi trên đa thức và đồ thị. Các tính toán sẽ khá rắc rối và cồng kềnh, nếu không biết cách xử lý.

2. Hai cách giải trên đây có phần giao là sử dụng phép tịnh tiến theo trục hoành (phép đặt $x = y - \frac{p}{2}$), nhưng cách 1 xây dựng đa thức (ứng với đồ thị nhận được qua phép tịnh tiến) dựa trên các nghiệm, còn cách 2 xây dựng đa thức ở dạng tổng quát dựa trên các hệ số.

3. Ở lời giải 1, chúng ta đã sử dụng các tính chất rất cơ bản và quan trọng sau đây của đa thức:

- **Tính chất 1.** Nếu đa thức $P(x)$ bậc n có hệ số cao nhất là a_n và có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_n$, thì $P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.
- **Tính chất 2.** Nếu mọi nghiệm của đa thức $P(x)$ đều là nghiệm của đa thức $Q(x)$ (tính cả số bội, tức là nếu α là nghiệm bội r của $P(x)$ thì α cũng là nghiệm bội r của $Q(x)$) thì $Q(x)$ chia hết cho $P(x)$.

4. Lời giải 2 hàm chứa hai kĩ thuật quan trọng. Kĩ thuật thứ nhất là các phép tịnh tiến theo trục hoành và theo trục tung. Phép tịnh tiến theo trục tung thì đơn giản; ý tưởng tịnh tiến theo trục hoành được lấy từ ý tưởng khử hệ số của x^{n-1} trong phương trình đại số bậc n:

"Trong phương trình

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

nếu đặt $x = y - \frac{a_{n-1}}{n}$ thì phương trình đó sẽ được đưa về dạng:

$$y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_1y + b_0 = 0."$$

Ý tưởng nêu trên cũng được dùng ở lời giải 1, để đưa tam thức bậc hai $x^2 + px + q$ về dạng $y^2 + s$.

Kỹ thuật thứ hai là kỹ thuật sử dụng phép chia đa thức để viết phương trình đường cong (hoặc đường thẳng) đi qua các điểm cực trị hoặc các điểm uốn của hàm đa thức. Ý tưởng cơ bản là:

"Giả sử chia đa thức $P(x)$ bậc n cho đa thức $P'(x)$ ta được:

$$P(x) = P'(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

trong đó $R(x)$ là một đa thức bậc $n-2$.

Khi đó, đồ thị của $R(x)$ là đường cong đi qua $n-1$ điểm cực trị của đồ thị của $P(x)$."

5. Cho tới thời khắc Giao thừa sang Mậu Tuất, Tòa soạn vẫn chưa nhận được lời giải nào cho bài đã ra, từ bạn đọc.

Trần Nam Dũng

P127. Cho $P(x), Q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng, và thỏa mãn điều kiện:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ [P(x)] = [Q(x)].$$

Chứng minh rằng $P(x) = Q(x)$ với mọi số thực x.

(Với t là số thực, $[t]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá t).

Lời giải (*dựa theo lời giải của bạn Lê Tuấn Anh, lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định*).

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Xét đa thức $P(x)$ với hệ số thực, khác đa thức hằng. Khi đó, tồn tại số thực a để $P(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a, +\infty)$.

Chứng minh. Giả sử

$$P(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n,$$

với $n \in \mathbb{N}^*, c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ và $c_0 \neq 0$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c_0 > 0$. Đặt

$$M = \max\{|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_{n-1}|\}.$$

Khi đó, với mọi $x > 1$, ta có

$$\begin{aligned} P'(x) &= nc_0x^{n-1} + (n-1)c_1x^{n-2} \\ &\quad + (n-2)c_2x^{n-3} + \cdots + c_{n-1} \\ &\geq nc_0x^{n-1} - M \cdot x^{n-2}[(n-1) + (n-2) \\ &\quad + \cdots + 1] \\ &= nx^{n-2}\left(c_0x - \frac{M(n-1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Do đó, chọn $a = \max\{1, \frac{M(n-1)}{2c_0}\}$ thì $P'(x) > 0$ $\forall x > a$. Suy ra, $P(x)$ tăng thực sự trên $(a, +\infty)$. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Xét đa thức $R(x) = P(x) - Q(x)$. Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{aligned} R(x) &= [P(x)] + \{P(x)\} - [P(x)] - \{Q(x)\} \\ &= \{P(x)\} - \{Q(x)\}, \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vì thế, $-1 < R(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Nếu $\deg R \geq 1$ thì tùy theo dấu của hệ số cao nhất, $R(x) \to +\infty$ hoặc $R(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$, mâu thuẫn với (1).

Do đó, $R(x) \equiv c$, với c là một hằng số thực thuộc khoảng $(-1; 1)$, hay

$$P(x) - Q(x) = c\ \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử $c \neq 0$.

+ Xét $c > 0$.

Do $P(x)$ khác đa thức hằng nên theo bổ đề trên, có thể chọn được số thực a sao cho $P(x)$ đơn điệu trên $(a, +\infty)$. Từ đó, do $P(x)$ liên tục trên $(a, +\infty)$ nên tồn tại $x_0 > a$ sao cho $P(x_0)$ là một số nguyên; đặt $P(x_0) = k$. Từ (2), ta có:

$$Q(x_0) = P(x_0) - c = k - c < k.$$

Do đó, $[Q(x_0)] < k = [P(x_0)]$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

+ Xét $c < 0$.

Do $Q(x)$ khác đa thức hằng nên theo bổ đề trên, có thể chọn được số thực b sao cho $Q(x)$ đơn điệu trên $(b, +\infty)$. Từ đó, do $Q(x)$ liên tục trên $(b, +\infty)$ nên tồn tại $x_1 > b$ sao cho $Q(x_1)$ là một số nguyên; đặt $Q(x_1) = m$. Từ (2), ta có:

$$P(x_1) = Q(x_1) + c = m + c < m.$$

Do đó, $[P(x_1)] < m = [Q(x_1)]$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

Vậy, phải có $c = 0$, hay $P(x) = Q(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (theo (2)).

Chú ý: Trong lời giải trên, $\{t\}$ kí hiệu phần lẻ của số thực t; nghĩa là: $\{t\} = t - [t]$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Bài đã ra là một bài toán khó về tính chất của đa thức.

2. Ngoài bạn Lê Tuấn Anh, hai bạn có tên sau đây cũng có lời giải tốt: *Trần Huy Hoàng* và *Lê Huy Hoàng* (lớp 11 Toán 1 và lớp 11 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định).

3. Bổ đề trong lời giải trên là một bổ đề hay và có nhiều ứng dụng trong giải toán.

Võ Quốc Bá Cẩn

P128. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và với mọi $x,y \in \mathbb{R}$, ta luôn có

$$f(x^3+2f(y)) = (f(x))^3+2y.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*).

Giả sử $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số sao cho với mọi $x,y \in \mathbb{R}$, ta luôn có

$$f(x^3+2f(y)) = (f(x))^3+2y. \quad (1)$$

Trước tiên, ta sẽ chứng minh f là một song ánh.

Thật vậy, trong (1), chọn $x=0$ và đặt $a=f(0)$, ta được:

$$f(2f(y)) = 2y+a^3 \quad (2)$$

với mọi $y \in \mathbb{R}$.

Từ đó, nếu $f(y_1)=f(y_2)$ thì

$2y_1+a^3 = f(2f(y_1)) = f(2f(y_2)) = 2y_2+a^3$;

suy ra, $y_1=y_2$. Do đó, f là một đơn ánh.

Hơn nữa, do vế phải của (2) có thể nhận mọi giá trị thực (khi y chạy khắp $\mathbb{R}$) nên f cũng là một toàn ánh. Vì thế, f là một song ánh.

Do đó, tồn tại duy nhất $b \in \mathbb{R}$ để $f(b)=0$. Thay $y=b$ vào (2) ta được:

$$a = 2b+a^3. \quad (3)$$

Trong (1), chọn $x=b, y=0$, ta được:

$$f(b^3+2a) = 0 = f(b).$$

Từ đó, vì f là đơn ánh, suy ra:

$$b^3+2a = b. \quad (4)$$

Rút $b = \dfrac{a-a^3}{2}$ từ (3), rồi thay vào (4), ta được:

$$\frac{(a-a^3)^3}{8}+2a = \frac{a-a^3}{2}$$

$$\Leftrightarrow a[a^2(1-a^2)^3+16-4(1-a^2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^8-3a^6+3a^4-5a^2-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2-3)(a^2+1)(a^4-a^2+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 3a. \quad (5)$$

Do đó, $b = \dfrac{a-a^3}{2} = -a.$ (6)

Trong (1), chọn $y=b$ ta được:

$$f(x^3) = (f(x))^3+2b \quad (7)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Theo (1), (2), (3) và (7), ta có

$$\begin{aligned} f(x^3)+f(2f(y)) &= (f(x))^3+2b+2y+a^3 \\ &= (f(x))^3+2y+2b+a^3 \\ &= f(x^3+2f(y))+a \end{aligned}$$

với mọi $x,y \in \mathbb{R}$.

Từ đó, do x^3 và $2f(y)$ có thể nhận mọi giá trị thực nên ta có:

$$f(x)+f(y) = f(x+y)+a \quad (8)$$

với mọi $x,y \in \mathbb{R}$.

Trong (2), chọn $y=0$ và sử dụng (5), ta được:

$$f(2a) = a^3 = 3a. \quad (9)$$

Trong (8), chọn $x=y=a$ và sử dụng (9), ta được:

$$f(a) = 2a. \quad (10)$$

Trong (8), chọn $x=2a, y=a$ và sử dụng (9), (10), ta được:

$$f(3a) = 4a. \quad (11)$$

Trong (7), chọn $x=a$ và sử dụng (5), (6), (10), (11), ta đi đến

$$\begin{aligned} 4a = f(3a) = f(a^3) &= (f(a))^3+2b \\ &= (2a)^3-2a = 8\cdot 3a-2a = 22a; \end{aligned}$$

suy ra $a=0$, hay $f(0)=0$; do đó, $b=0$. Vì vậy, từ (7) và (8), ta có:

$$f(x^3) = (f(x))^3, \quad (12)$$

$$f(x)+f(y) = f(x+y) \quad (13)$$

với mọi $x,y \in \mathbb{R}$.

Trong (12), chọn $x=1$, chú ý $f(1) \neq 0$ (do f là đơn ánh), ta được:

$$(f(1))^2 = 1. \quad (14)$$

Vì thế, theo (13), ta có:

$$\begin{cases} f((x+1)^3) = f(x^3+3x^2+3x+1) \\ \qquad\qquad = f(x^3)+3f(x^2)+3f(x)+f(1) \\ (f(x+1))^3 = (f(x)+f(1))^3 \\ \qquad\qquad = (f(x))^3+3f(1)(f(x))^2+3f(x)+f(1). \end{cases}$$

Từ đó, do $f((x+1)^3) = (f(x+1))^3$ (theo (12)), suy ra:

$$f(x^2) = f(1)(f(x))^2 \quad (15)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Theo (14), chỉ có thể xảy ra 2 trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* $f(1) = 1$. Lúc này, (15) trở thành:

$$f(x^2) = (f(x))^2$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra, với mọi $x \geq 0$, ta có:

$$f(x) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0.$$

Do đó, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x \geq y$, ta có:

$$f(x) = f(x-y+y) = f(x-y) + f(y) \geq f(y).$$

Vì vậy, f là một hàm không giảm trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (13), suy ra

$$f(x) = f(1) \cdot x = x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• *Trường hợp 2:* $f(1) = -1$. Lúc này, (15) trở thành:

$$f(x^2) = -(f(x))^2$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra, với mọi $x \geq 0$, ta có:

$$f(x) = -(f(\sqrt{x}))^2 \leq 0.$$

Do đó, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x \geq y$, ta có:

$$f(x) = f(x-y+y) = f(x-y) + f(y) \leq f(y).$$

Vì vậy, f là một hàm không tăng trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (13), suy ra

$$f(x) = f(1) \cdot x = -x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy cả hai hàm số, $f(x) = x$ và $f(x) = -x$, đều thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. Vì vậy, chúng là tất cả các hàm cần tìm.

Bình luận và Nhận xét.

1. Cho tới thời điểm bản thảo lên trang, Tòa soạn nhận được cả thảy 6 lời giải từ bạn đọc, nhưng chỉ có hai bạn có lời giải đúng; đó là các bạn: *Phạm Trần Minh Đức* (lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội), *Trần Tiến Mạnh* (lớp 12A1, trường THPT chuyên, Đại học Vinh).

2. Theo người chấm bài, các phương trình hàm có dạng như trong bài ra xuất hiện lần đầu ở IMO 1992 (xem Bài 2, Đề thi IMO 1992). Gần đây, trên Tạp chí Epsilon, số 7, tháng 02/2016, trong bài "Sự bằng nhau của hai đa thức và ứng dụng vào giải phương trình hàm", tác giả Võ Quốc Bá Cẩn đã đưa ra lời giải khá đẹp cho một số bài toán tổng quát hơn thuộc dạng này.

Nguyễn Duy Thái Sơn

P129. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) sao cho với mọi số nguyên n, tổng

$$\frac{n}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{n^3}{z}$$

là một số nguyên.

Lời giải (*dựa theo đa số lời giải mà Tòa soạn nhận được*).

Đặt $T_n = \dfrac{n}{x} + \dfrac{n^2}{y} + \dfrac{n^3}{z}$.

Giả sử (x, y, z) là bộ số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $n = 1$ và $n = -1$, ta có:

$$T_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \text{ và } T_{-1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}.$$

Vì T_1 và T_{-1} là các số nguyên nên

$$T_1 + T_{-1} = \frac{2}{y} \text{ và } T_1 - T_{-1} = \frac{2}{x} + \frac{2}{z}$$

là các số nguyên. (1)

Suy ra y là ước nguyên dương của 2. Vì vậy, $y \in \{1; 2\}$.

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* $y = 1$.

Khi đó, vì T_1 là số nguyên và x, z là các số dương nên suy ra

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

là số nguyên dương. (2)

Nếu $x, z \geq 3$ thì

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1,$$

là điều vô lí. Vì vậy, một trong hai số nguyên dương x, z có giá trị không vượt quá 2; nghĩa là, $x \in \{1; 2\}$ hoặc $z \in \{1; 2\}$.

+ Xét $x \in \{1; 2\}$.

– Với $x = 1$, từ (2) suy ra $z = 1$.

- Với $x = 2$, từ (1) và (2) suy ra $z = 2$.

+ Xét tương tự với $z \in \{1;2\}$, ta cũng được: Với $z = 1$ thì $x = 1$ và với $z = 2$ thì $x = 2$.

Như vậy, trong trường hợp này, ta được

$$(x,y,z) \in \{(1,1,1);(2,1,2)\}.$$

• *Trường hợp 2:* $y = 2$.

Khi đó, vì

$$T_2 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} + \frac{8}{z}$$

là số nguyên và $\frac{4}{y} = 2$ nên

$$\frac{2}{x} + \frac{8}{z}$$

là số nguyên. Kết hợp với (1), suy ra

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{8}{z}\right) - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{z}\right) = \frac{6}{z}$$

là số nguyên. Do đó, $z \in \{1;2;3;6\}$.

+ Với $z = 1$, từ (1) suy ra $x \in \{1;2\}$. Kết hợp với T_1 là số nguyên suy ra $x = 2$.

+ Với $z = 2$, xét tương tự trên, ta được $x = 1$.

+ Với $z = 3$, ta có $\frac{6}{z} = 2$ là số nguyên. Do đó, từ (1) suy ra $\frac{6}{x}$ là số nguyên. Do đó, $x \in \{1;2;3;6\}$.

Kết hợp với T_1 là số nguyên suy ra $x = 6$.

+ Với $z = 6$, xét tương tự trên, ta được $x = 3$.

Như vậy, ở trường hợp 2, ta được

$$(x,y,z) \in \{(2,2,1);(1,2,2);(6,2,3);(3,2,6)\}.$$

Tóm lại, từ việc xét hai trường hợp nêu trên, ta được

$$(x,y,z) \in \{(1,1,1);(2,1,2);(2,2,1);(1,2,2);(6,2,3);(3,2,6)\}. \quad (3)$$

Ngược lại, xét (x,y,z) thỏa mãn (3), ta có:

+ Với $(x,y,z) = (1,1,1)$ thì

$$T_n = n + n^2 + n^3,$$

là một số nguyên với mọi n nguyên.

+ Với $(x,y,z) = (2,1,2)$ thì

$$T_n = \frac{n}{2} + n^2 + \frac{n^3}{2} = n^2 + \frac{n(n^2+1)}{2}$$

là một số nguyên với mọi n nguyên, do trong hai số n và n^2+1 luôn có một số chẵn.

+ Với $(x,y,z) = (2,2,1)$ thì

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} + n^3 = \frac{n(n+1)}{2} + n^3$$

là một số nguyên với mọi n nguyên, do trong hai số n và $n+1$ luôn có một số chẵn.

+ Với $(x,y,z) = (1,2,2)$ thì

$$T_n = n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2} = n + \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2}$$

là một số nguyên với mọi n nguyên, do trong hai số n^2 và $n+1$ luôn có một số chẵn.

+ Với $(x,y,z) = (6,2,3)$ thì

$$T_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

là một số nguyên với mọi n nguyên, do tích của 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6.

Vậy, các bộ số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn (3) là tất cả các bộ số cần tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. Bài đã ra là một bài toán không khó, tuy nhiên đòi hỏi phải rất tỉ mỉ trong việc phân tích, sắp xếp các trường hợp cho hợp lý.

2. Trong số các lời giải mà Tòa soạn nhận được, có không ít lời giải sai, do mắc phải ít nhất một trong các lỗi sau đây:

– Thiếu hoặc thừa nghiệm;

– Coi x,y,z có vai trò như nhau trong biểu thức T_n;

– Không kiểm tra việc thỏa mãn yêu cầu đề bài của các bộ số (x,y,z) tìm được, mặc dù các bộ số đó được tìm ra từ giả thiết T_n là số nguyên khi $n = 1, n = -1, n = 2$, trong khi đề bài đòi hỏi phải có T_n là số nguyên với mọi n nguyên.

3. Các bạn có tên sau đây có lời giải đúng: *Nguyễn Quang Minh*, (lớp 9/3, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hoà, Đồng Nai); *Nguyễn Hữu Danh, Nguyễn Hữu Thịnh, Bùi Khánh Vĩnh* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh); *Lê Tuấn Anh* (lớp 11 Toán 1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định); *Nguyễn Tấn Tài* (lớp 12A, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước).

4. Để ý rằng với x,y,z là các số nguyên dương cho trước, T_n là một đa thức bậc 3 với hệ số hữu tỉ của n. Trong lí thuyết đa thức, có kết quả sau:

"Cho số tự nhiên m. Khi đó, nếu đa thức $P(x)$, bậc m với hệ số hữu tỉ, nhận giá trị nguyên tại mọi điểm nguyên thì $m! \cdot P(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên."

Vì thế, áp dụng kết quả trên cho đa thức T_n (của n), ta sẽ suy ra ngay các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn yêu cầu đề bài phải là các ước nguyên dương của 6.

Dựa vào kết quả nêu trên, bạn đọc có thể tự đề xuất và giải quyết các bài toán cùng kiểu với bài đã ra, nhưng với hệ số của các lũy thừa của n phức tạp hơn hoặc có số ẩn nhiều hơn 3.

5. Qua lời giải đã trình bày trên đây, có thể thấy yêu cầu T_n là số nguyên với mọi n nguyên là quá mạnh. Từ đó, có thể nghĩ tới việc làm yếu đi yêu cầu đó. Người chấm bài xin đề xuất bài toán sau:

Bài toán đề xuất. *Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) sao cho với mọi số nguyên $n > \pi^{2018}$, tổng*

$$\frac{n}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{n^3}{z}$$

là một số nguyên.

Hi vọng Pi sẽ sớm nhận được lời giải của bạn đọc cho bài toán vừa nêu trên.

Hà Duy Hưng

P130. *Do sự cố kĩ thuật (xem Đính chính dưới đây) nên việc nhận lời giải cho bài toán này được gia hạn tới ngày 15/4/2018.*

ĐÍNH CHÍNH

1. Tạp chí Pi Tập 1, số 12, tháng 12.2017, trang 25, cột bên trái, các dòng 5 ↑ - 9 ↑:

◇ Trang 19, cột bên phải, bài P130, các dòng 14 ↓ - 16 ↓:

– **Đã in:** Chứng minh rằng, sau khi biết tổng điểm mà mỗi giáo viên đã cho $n-1$ giáo viên còn lại,

– **Nay sửa thành:** Chứng minh rằng, sau khi biết điểm mà mỗi giáo viên đã cho từng giáo viên trong số $n-1$ giáo viên còn lại,

◇ Trang 25, cột bên trái, các dòng 5 ↑ - 9 ↑:

– **Đã in:**

Gọi R là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại T của đường tròn ω. Ta có R, N, A' thẳng hàng (vì cùng thuộc trung trực của DT). Do đó, $RP \cdot RQ = RA' \cdot RN$.

• *Trường hợp 2: EF không song song BC.*

– **Nay sửa thành:**

• *Trường hợp 2: EF không song song BC.*

Gọi R là giao điểm của BC và tiếp tuyến tại T của đường tròn ω. Ta có R, N, A' thẳng hàng (vì cùng thuộc trung trực của DT). Do đó, $RP \cdot RQ = RA' \cdot RN$.

2. Tạp chí Pi Tập 2, số 2, tháng 2.2018:

◇ Trang 23, cột bên trái, bài P146, các dòng 15 ↓ - 16 ↓:

– **Đã in:** Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác $I_aI_bI_c$ có cùng trực tâm.

– **Nay sửa thành:** Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

◇ Trang 23, cột bên phải, bài P149, các dòng 7 ↓ - 8 ↓:

– **Đã in:** tổng bình phương của p số nguyên liên tiếp là một số chính phương.

– **Nay sửa thành:** tồn tại p số nguyên liên tiếp mà tổng bình phương của chúng là một số chính phương.

◇ Trang 37, cột bên phải, các dòng 10 ↓ - 12 ↓:

– **Đã in:** Khi đó, điều phải chứng minh theo yêu cầu của đề bài tương đương với việc tồn tại chỉ số $1 \le i \le n+1$ sao cho $S_i = p$.

– **Nay sửa thành:** Ta sẽ chứng minh tồn tại chỉ số $1 \le i \le n+1$ sao cho $S_i = p$. Khi đó, hiển nhiên ta sẽ có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Tạp chí Pi chân thành cảm ơn bạn *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh), thầy *Trần Quang Hùng* (trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), cô *Lưu Thị Thanh Hà* (trường THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang) đã phát hiện ra các lỗi nêu trên.

Xin cáo lỗi cùng bạn đọc.

DANH SÁCH BẠN ĐỌC GỬI BÀI VÀ LỜI GIẢI

Từ ngày 18/01/2018 đến 23/02/2018, Tòa soạn đã nhận được

*** Bài toán đề xuất, bài viết của các bạn có tên sau:**

Trương Quang An (GV THCS Nghĩa Thắng, Quảng Ngãi), *Lê Quốc Hán* (GV Đại học Vinh, Nghệ An), *Võ Thục Khánh Huyền* (Trường trung học nội trú Mercersburg Academy, Hoa Kỳ) - *Khổng Minh Thái* (Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị) - *Nguyễn Nam Việt* (Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam), *Nguyễn Quang Minh* (Lớp 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Đồng Nai), *Lê Dũng Mưu* (GV Đại học Thăng Long), *Lê Văn Quang* (Cựu GV Quốc học Huế), *Nguyễn Văn Quý* (Hà Nội), *Nguyễn Trường Sơn* (GV THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình), *Lê Thế Thông* (GV THPT Lê Quảng Chí, Hà Tĩnh), *Hoàng Lê Nhật Tùng* (SV K61 SP Toán, ĐH QG HN).

*** Lời giải của các bạn có tên sau:**

Nguyễn Văn Bảo An (Lớp 9/11, THCS Đặng Trần Côn, TP. HCM), *Vũ Thúy An* (Lớp 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Lê Tuấn Anh* (Lớp 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Lê Gia Bảo* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa), *Nguyễn Thái Bình* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Vũ Văn Dũng* (THCS Lý Tự Trọng, Hà Giang), *Trần Vũ Duy* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Phan Minh Đạt* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Nguyễn Xuân Hiếu* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đắc Nông), *Phạm Hiếu* (Lớp 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng), *Đinh Xuân Hoàn* (Lớp 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Nguyễn Quốc Hưng* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Trần Nguyễn Nam Hưng* (Lớp 9A11, THCS Ngô Tất Tố, TP. HCM), *Tạ Nam Khánh* (Lớp 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc), *Phạm Đình Anh Khoa* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Nguyễn Đức Anh Khoa* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Vũ Hoàng Long* (Lớp 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Nguyễn Quang Minh* (Lớp 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Đồng Nai), *Lê Đức Minh* (Lớp 8T1, THCS Đoàn Thị Điểm, Hà Nội), *Trần Duy Minh* (Lớp 9A5, THCS và THPT Nguyễn Tất Thành, Hà Nội), *Trương Hồ Hoài Nam* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Nguyễn Thúy Kim Ngân* (THPT chuyên Lê Hồng Hồng Phong), *Trương Tuấn Nghĩa* (Lớp 9A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam), *Hoàng Lê Bích Ngọc* (Lớp 7A, THCS Thái Thịnh, Hà Nội), *Trần Hồng Nguyên* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Hồ Long Nhật* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang), *Phạm Văn Long Phước* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương), *Trần Thanh Quang* (Lớp 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Võ Minh Quân* (Lớp 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long), *Nguyễn Văn Thanh Sơn* (THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng), *Nguyễn Trung Sơn* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang), *Doãn Quang Tiến* (Lớp 11A1, THPT Phú Mỹ, Bà Rịa), *Võ Đỗ Hoàng Tín* (Lớp 10CT, THPT Nguyễn Thượng Hiền, TP. HCM), *Quách Minh Tuấn* (Lớp 11 Toán, THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai), *Trương Mạnh Tuấn* (Lớp 12A1 Toán, THPT chuyên KHTN), *Hoàng Lê Nhật Tùng* (SV K61 SP Toán, ĐH QG HN), *Chu Thị Thanh* (Lớp 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc), *Phạm Đức Thành* (Lớp 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Trương Nguyễn Trân* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Nguyễn Mạnh Trung* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đắc Nông), *Đặng Đức Trường* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Võ Tường Vi* (THCS Lê Quang Cường, Bà Rịa), *Bùi Khánh Vĩnh* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. HCM), *Lê Đức Anh Vũ* (Lớp 8A3, THCS Cầu Giấy, Hà Nội).

Tòa soạn xin chân thành cảm ơn và mong tiếp tục nhận được sự cộng tác của các bạn.

PHƯƠNG PHÁP ARCHIMEDES

TÍNH DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CÁC HÌNH, KHỐI QUEN THUỘC

Đỗ Trọng Đạt - Phó Đức Tài

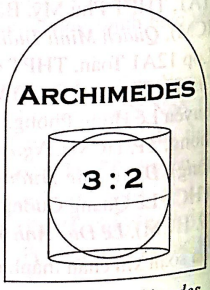
Tính toán độ dài, đo đạc diện tích, thể tích vật thể từ lâu đã là một nhu cầu của loài người. Từ khoảng thế kỉ thứ 3 trước công nguyên, người Hy Lạp đã phát hiện ra cách tính chu vi hình tròn, xấp xỉ số π và tính diện tích của một số mặt. Sau đó đến thế kỉ 17, Newton và Leibniz, hai nhà toán học lớn, đã tìm ra phép tính vi phân, tích phân, mở ra thời đại mới cho ngành giải tích, giúp chúng ta có thể tìm được diện tích, thể tích của hầu hết các vật thể.

Trong bài viết này chúng ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn về lịch sử phép tính diện tích và thể tích thời cổ đại, đặc biệt là hai trong các định lí nổi tiếng của Archimedes mà ông luôn tự hào về chúng.

Giới thiệu

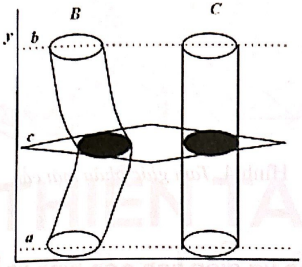
Archimedes (287-212 TCN) là một nhà khoa học người Hy Lạp, tài ba trong nhiều lĩnh vực, bao gồm toán học, vật lý, cơ học và thiên văn học. Từ bé chắc nhiều bạn đã được nghe về các cỗ máy chiến tranh thông minh do Archimedes chế tạo để chống lại quân La Mã. Hoặc các bạn đã biết từ *Eureka* (nghĩa là "tìm thấy", trong câu "Tôi đã tìm ra nó!") trong câu chuyện làm thế nào ông tìm ra lời giải cho câu hỏi của Vua xứ Syracuse (Hy Lạp cổ) về cái vương miện. Nhưng trên tất cả, Archimedes là một nhà hình học, điều này được thể hiện ở trên bia mộ của ông, kết quả mà ông rất tâm đắc về tỉ lệ thể tích của khối trụ ngoại tiếp và khối cầu bằng tỉ lệ diện tích và bằng 3/2 (xem Hình dưới).

Từ thời Ai Cập cổ đại hơn 5000 năm trước, các nhà toán học đã biết thể tích tứ diện bằng 1/3 chiều cao nhân với diện tích đáy, thể tích khối lăng trụ và thể tích khối trụ bằng chiều cao nhân với diện tích đáy. Sau khi có số π (định nghĩa bằng tỉ số giữa chu vi đường tròn và đường kính), người Hy Lạp (trước thời Archimedes) đã biết tính diện tích hình tròn bằng công thức πR^2; một chứng minh của công thức này, bằng cách xấp xỉ diện tích đa giác đều có số cạnh lớn (dần ra vô cùng), có thể tìm thấy trong một cuốn sách của Archimedes. Từ đó có các công thức thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi h R^2$, thể tích khối trụ $V = \pi h R^2$. Tuy nhiên để có được thể tích của một khối cầu hay thể tích của một khối xuyến là một nghệ thuật. Archimedes đã dùng nguyên lý (ngày nay gọi là nguyên lý Cavalieri): Cho hai khối có cùng chiều cao, đặt hai khối nằm kẹp giữa hai mặt phẳng song song, nếu mặt



Định lý của Archimedes trên bia mộ

phẳng bất kỳ song song với hai mặt phẳng này có hai tiết diện với hai khối có cùng diện tích thì hai khối có cùng thể tích. Xem Hình 1.

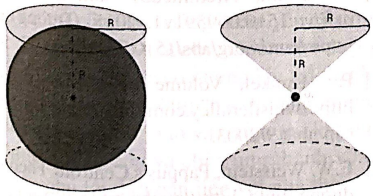


Hình 1. *Nguyên lý Cavalieri*

Ở trường phổ thông chúng ta được học công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu nhưng không có chứng minh. Lên đại học sinh viên ngành toán và kỹ thuật có thể hiểu được chứng minh từ phép tính tích phân. Tuy nhiên, ít ai ngờ rằng có một chứng minh đã được Archimedes tìm ra hơn 2000 năm trước dựa trên qui tắc đòn bẩy trong cơ học (xem [2]). Trong bài báo ngắn này chúng tôi trình bày lại chứng minh của Archimedes (tham khảo [1, 3]) bằng ngôn ngữ toán học để các bạn học sinh phổ thông có thể hiểu được.

Thể tích khối cầu và diện tích mặt cầu

Công thức diện tích hình tròn được suy ra từ công thức chu vi. Nhưng đối với khối cầu, Archimedes đi tính thể tích trước, sau đó mới tính diện tích bề mặt. Trước hết, chúng ta có định lý đầu tiên liên quan đến thể tích.

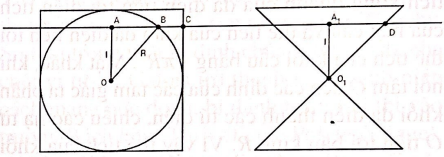


Hình 2. *Khối cầu nội tiếp khối trụ và 2 khối nón*

Định lý 1. *Mọi khối cầu đều có thể tích bằng* $\frac{2}{3}$ *thể tích của khối trụ ngoại tiếp nó.*

Chứng minh. Gọi bán kính của khối cầu là R và tâm của nó là O. Phương pháp của Archimedes chỉ ra thể tích của phần giới hạn bởi mặt cầu và mặt trụ bằng tổng thể tích của hai khối nón đỉnh O_1 có đáy là các đáy của khối trụ và chiều cao là R; xem Hình 2. Ý tưởng này về sau gọi là nguyên lý Cavalier đã nhắc trong phần mở đầu, tổng quát hơn ta có công thức Fubini để tính diện tích, thể tích,...

Xét tại mặt mức có độ cao là l so với O, vẽ mặt phẳng song song với đáy của khối trụ cắt trục tại A, mặt cầu tại B và mặt trụ tại C để ba điểm này thẳng hàng, nó cũng cắt mặt nón tại D và trục của khối nón tại A_1, xem Hình 3.



Hình 3. *Mặt cắt nhìn từ phương ngang*

Ta thấy $O_1A_1 = A_1D = l$. Diện tích của hình tròn tạo bởi AC khi quay quanh trục bằng πR^2. Từ định lí Pythagore, ta có $AB = \sqrt{R^2 - l^2}$, nên diện tích của hình tròn tạo bởi AB khi quay quanh trục bằng $\pi(R^2 - l^2)$. Trừ hai đại lượng trên, ta rút ra diện tích của hình vành khuyên tạo bởi BC khi quay quanh trục bằng πl^2, và đại lượng này đúng bằng diện tích của hình tròn tạo bởi A_1D khi quay quanh trục.

Vậy tại mỗi mặt mức, diện tích mặt cắt (tiết diện) của phần giới hạn bởi mặt cầu và mặt trụ và diện tích mặt cắt của hai khối nón là bằng nhau, hợp tất cả các tiết diện đó lại, Archimedes suy ra thể tích của chúng cũng bằng nhau. Ngoài ra thể tích của một khối chóp bằng $\frac{1}{3}\pi S$, với S là diện tích của đáy. Suy ra thể tích của phần giới hạn bởi mặt cầu và mặt trụ bằng $\frac{2}{3}\pi S$, chính bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của khối trụ. Vậy tóm lại thể tích của khối cầu bằng $2/3$ thể tích của khối trụ.

Từ công thức tính thể tích khối trụ, bằng chiều cao nhân diện tích đáy, trong trường hợp này bằng $(2R)(\pi R^2)$, Archimedes thu được công thức tính thể tích khối cầu:

Hệ quả *Thể tích của khối cầu bằng* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Một điều đáng ngạc nhiên là ta cũng có một kết quả tương tự (cùng chung tỉ số $2/3$) như định lí 1 đối với diện tích bề mặt.

Định lý 2. *Mọi mặt cầu đều có diện tích bằng* $\frac{2}{3}$ *diện tích của mặt trụ ngoại tiếp nó.*

Chứng minh. Để tính diện tích của mặt cầu, Archimedes chia nhỏ mặt cầu bằng "tam giác phân"; xem Hình 4. Khi tăng số điểm ta có tam giác phân mịn hơn, khi số điểm càng lớn thì diện tích xung quanh của đa diện tiến tới diện tích của mặt cầu và thể tích của khối đa diện tiến tới thể tích của khối cầu bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$. Mặt khác, khi nối tâm O đến các đỉnh của các tam giác ta phân khối đa diện thành các tứ diện, chiều cao hạ từ O tiến tới bán kính R. Vì vậy thể tích của khối đa diện bằng tổng thể tích tất cả các tứ diện, và giá trị này tiến tới $(1/3)R$ nhân với diện tích toàn phần của khối đa diện. Từ đó

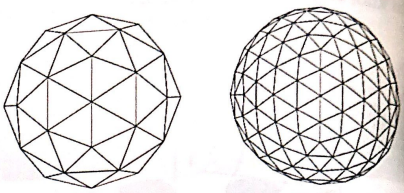
$$V_{\text{khối cầu}} = (1/3)RS_{\text{mặt cầu}}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} S_{\text{mặt cầu}} &= 3V_{\text{khối cầu}}/R = 3\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)/R \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

So sánh với diện tích toàn phần của mặt trụ ta có điều phải chứng minh.

Một chút tính toán, bạn có thể thấy diện tích xung quanh của mặt trụ là $4\pi R^2$, bằng diện tích của mặt cầu. Có thể đến đây bạn sẽ ngạc nhiên: "Ồ, sao lại trùng hợp đến thế". Nhưng đây không phải là một sự trùng hợp ngẫu nhiên đâu, mà là hệ quả của một định lí khác của Archimedes, cũng "lôi cuốn" không kém hai định lí nói trên, đó là về phép chiếu "đẳng diện" (bảo toàn diện tích). Nhờ có phép chiếu đẳng diện từ mặt cầu lên mặt trụ mà chúng ta có các bản đồ địa lý dùng hàng ngày. Chúng tôi hi vọng sẽ viết về chủ đề thú vị này trong một số báo sắp tới.



Hình 4. *Tam giác phân mặt cầu*

Thể tích và diện tích các hình khác?

Tương tự như Định lý 1, như một bài tập, bạn đọc hãy tự đưa ra công thức tính thể tích của một hình xuyến. Nếu không tìm ra lời giải, bạn có thể tham khảo bài viết [4].

Tổng quát hơn, nếu xét các khối tròn xoay, chúng ta cũng có một phương pháp cổ điển có tên gọi "Định lý trọng tâm của Pappus" để tính thể tích và diện tích xung quanh. Pappus cũng là một nhà toán học Hy Lạp thời cổ đại (290-350 sau công nguyên). Thế mới thấy con người từ thuở xưa đã có những ý tưởng chứng minh hình học thật tài giỏi.

Chú thích: Một vài hình ảnh trong bài viết này được lấy từ nguồn Internet.

Tài liệu tham khảo

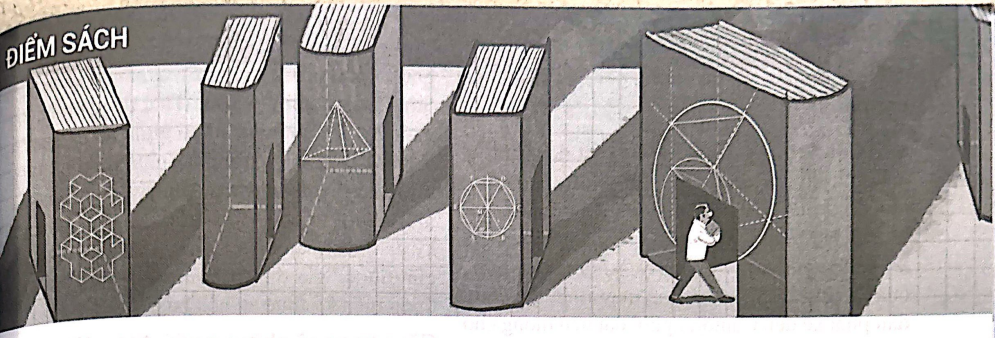
[1] T. M. Apostol, M. A. Mnatsakanian, A fresh look at the method of Archimedes, *Amer Math Monthly.* 111: 496–508, 2004.

[2] A. K. T. Assis, C. P. Magnaghi, *The illustrated method of Archimedes*, C. Roy Keys Inc., 2012.

[3] H. Gouin, Archimedes' famous-theorem, *arXiv:* 1510.069591v1, 2015. (Đường link: https://arxiv.org/abs/1510.06959).

[4] P. Kunkel, Volume of a torus, nguồn http://whistleralley.com/torus/torus.htm, bản cập nhật 9/2003.

[5] E.W. Weisstein, Pappus's Centroid Theorem, đường link: http://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem.html



THIÊN TÀI VÀ SỐ PHẬN

Chuyện kể về các nhà Toán học

Lê Bích Phượng [1]

Nói đến toán học thế kỷ 19, người ta không thể không nói đến những tên tuổi như Cauchy, Galois, Abel và Cantor. Họ là những người đã đặt nền tảng hiện đại vững chắc cho toán học, từ giải tích, đến hình học và đại số hiện đại, đến lý thuyết tập hợp, để cho toán học và tin học được tiếp tục phát triển nở rộ trong thế kỷ 20 và 21.

Hầu hết những người yêu toán được biết đến bất đẳng thức Cauchy-Buniakovsky-Schwarz từ cấp phổ thông cơ sở, hoặc lên bậc đại học thì biết đến những khái niệm như dãy Cauchy và tích phân Cauchy. Nhưng rất ít ai biết rằng, Cauchy không những là một nhà toán học toàn năng với những đóng góp cơ bản cả trong giải tích lẫn hình học và đại số, mà còn là một kỹ sư cầu đường tài năng, một nhà cơ học và vật lý xuất sắc với những lý thuyết về đàn hồi và về quang học. Ngoài ra, ông còn là một người rất hảo tâm, sẵn sàng đem cả năm lương giáo sư của mình phát cho người nghèo. Nhưng kể cả là thiên tài thì cũng có những điểm yếu của mình. Một điểm yếu của Cauchy, khiến cho ông gặp không ít khó khăn và có những lúc trở thành trò cười cho thiên hạ, là ông "bảo hoàng hơn vua", quá bảo thủ về tôn giáo và chính trị, không tin vào thuyết tiến hóa và chỉ trung thành với chế độ quân chủ lỗi thời gắn liền với nhà thờ.

Thần đồng Galois không được may mắn trở thành viện sĩ giàu có sang trọng như Cauchy. Sinh ra trong một ra đình chứa sẵn bi kịch, cha chết vì tự tử, Galois trở thành một thanh niên cách mạng cực đoan, bị đánh trượt khi thi vào trường Bách khoa Paris (Ecole Polytechnique), rồi bị đuổi học từ trường Sư phạm Paris (Ecole Normale), sau đó bị đi tù hai lần, đều vì những hành động quá khích. Cuối cùng, Galois đã chết vì đấu súng, khi tuổi mới 20. Trước khi chết, Galois đã kịp để lại cho thế giới một lý thuyết đại số hiện đại, ngày nay gọi là lý thuyết Galois, mà các nhà toán học thời đó phải mất rất nhiều năm sau mới hiểu và nhận ra giá trị thực của nó.

Nhà toán học Abel của Thụy Điển có tính tình hiền hòa, không chết vì đấu súng như Galois, nhưng cũng không tránh khỏi bi kịch chết trẻ khi mới 28 tuổi, do nghèo đói và bệnh tật. Trước khi qua đời, Abel cũng kịp để lại cho hậu thế một khối công trình toán học đồ sộ, trong cả hình học, đại số và giải tích. Ông chính là người đầu tiên chứng minh được một cách đầy đủ vì sao nghiệm của phương trình đại số tổng quát bậc 5 trở lên không viết được dưới dạng căn thức. (Lý thuyết của Galois sau đó đi sâu hơn, cho biết những khi nào thì nghiệm viết được dưới dạng căn thức). Để tưởng nhớ công lao của ông, Thụy Điển đã lập ra giải thưởng Abel cho toán học từ

[1] *Đại học Mỏ Địa chất.*

cuối thế kỷ 20, tương đương với giải Nobel về ý nghĩa.

Nếu trong thế kỷ 20, người ta biết đến định lý "không đầy đủ" của Gödel trong lôgic (bị rất nhiều người thiếu hiểu biết toán học lạm dụng, xuyên tạc thành lý lẽ cho các học thuyết giả khoa học của họ) và định lý "không xác định" của Turing trong khoa học máy tính, thì công đầu phải kể đến Cantor, người đặt nền móng cho lý thuyết tập hợp và đưa ra phương pháp (gọi là phương pháp chéo hóa) được dùng để chứng minh các định lý này. Có những tác giả nhận định rằng Cantor chính là nhà toán học lớn nhất của nửa sau thế kỷ 19. Nhưng ông cũng không tránh khỏi bi kịch bị những người cùng thời công kích, không công nhận, đến mức phát điên.

Đến đầu thế kỷ 20, xuất hiện một giải thưởng toán học quốc tế rất uy tín, do nhà toán học Fields người Canada khởi xướng. Không may cho Fields, ông đã bị chết trước khi người ta kịp trao giải toán quốc tế này lần đầu tiên, nên để tưởng nhớ ông người ta thường gọi đây là giải Fields, tuy rằng đây không phải là tên gọi chính thức của nó, và huy chương đi kèm với giải in hình một người khác, chính là nhà toán học Archimedes từ thời cổ Hy Lạp. Giải Fields hay được ví như là giải Nobel, tuy rằng nó có một điểm khác biệt khá lớn là hạn chế tuổi, và nhiều nhà toán học lớn tầm cỡ Nobel hay Abel, ví dụ như Zariski, Arnold, Nash, v.v. không được giải này. Tuy nhiên, danh sách những người đoạt giải Fields cũng phản ánh khá trung thực sự phát triển của toán học thế giới kể từ những năm 1930. Cho đến mãi năm 2014 mới có một phụ nữ duy nhất đoạt giải Fields, là Maryam Mirzakhani, giáo sư ĐH Stanford, người gốc Iran. Thật đáng buồn, đến năm 2017 vị nữ giáo sư tài giỏi này đã qua đời vì bệnh ung thư. Trong số những người được trao giải Fields từ trước đến nay, cũng có đúng một người từ chối nhận giải, là "nhà toán học kỳ dị" Perelman người Nga - Do Thái, người đã giải được "giả thuyết Poincaré", một bài toán thiên niên kỷ thực sự hóc búa.

Cũng trong số những người được giải thưởng Fields, có một "nhà toán học kỳ dị" khác, là Grothendieck, người đã làm thay đổi toàn bộ bộ mặt của ngành hình học đại số. Cuộc đời của Grothendieck, từ một cậu bé tị nạn không quốc tịch, bố bị chết trong trại tập trung của Phát xít Đức, đến đỉnh cao toán học, sang miền Bắc Việt Nam giảng bài dưới bom đạn của Mỹ, rồi sau đó trở thành ẩn sĩ từ chối gặp mặt cả con đẻ của mình, cũng hết sức đặc biệt.

Tất cả những điều trên, và rất nhiều điều thú vị khác nữa đều có trong quyển sách *Thiên tài và số phận: Chuyện kể về các nhà toán học* của TS. Lê Quang Ánh. Quyển sách này được TS. Lê Quang Ánh viết, đầu tiên là dưới dạng các bài báo nghiên cứu lịch sử toán học, dựa trên sự tham khảo nhiều tài liệu tiếng Anh và tiếng Pháp. Sau đó nó được Sputnik Education tập hợp và chỉnh sửa lại công phu để thành sách, với sự hỗ trợ của GS. Nguyễn Tiến Dũng về mặt nội dung và sự biên tập của TS. Lưu Thu Hương, cùng với lời giới thiệu của TS. Nguyễn Xuân Sanh.

Quyển sách chứa rất nhiều thông tin và bài học bổ ích với mọi người, đặc biệt là các bạn học sinh yêu toán và các giáo viên toán.

Xin mời các bạn tìm đọc!

HILBERT HỌC TOÁN

Chủ Quán

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Siegel-Albertina-Koenigsber.png

Konigsberg, chắc chắn bạn đã từng nghe đến cái tên này, ít nhất cũng từ bài toán "Bảy cái cầu ở Konigsberg" của Euler.

Đó là thành phố thuộc Đế quốc Phổ, nay là Kaliningrad thuộc Liên bang Nga. Điều đáng ngạc nhiên là cái thành phố bé nhỏ đó lại là nơi sản sinh ra nhiều nhân vật kiệt xuất của Khoa học: Kant, Hilbert, Hurwitz, Minkovski,...

Đại học Konigberg. Nguồn: Internet.

Cách dạy và học của Đại học Konigsberg là nguyên nhân sản sinh ra những thiên tài đó chăng?

Ta thử xem Hilbert từng học đại học Konigsberg thế nào nhé.

Điều may mắn lớn cho Hilbert là trường đại học ở thành phố Konigsberg quê ông, mặc dù xa thủ đô Berlin, nhưng là một trong những trường đại học tốt nhất nước Đức. Jacobi đã từng giảng dạy ở đó, vào thời mà ông được xem là nhà Toán học lớn thứ hai Châu Âu, sau Gauss. Kế tục ông, Richelo chính là người có công lớn trong việc phát hiện ra thiên tài của K. Weierstrass khi đọc công trình của thầy giáo trung học vô danh này. Ông đã thuyết phục được Trường đại học trao bằng danh dự cho Weierstrass, và tìm đến tận thành phố nhỏ bé, nơi Weierstrass đang dạy học để thông báo tin này. "Tất cả chúng tôi đều tìm thấy ở Weierstrass vai trò của người hướng dẫn".

Mùa thu năm 1880, khi Hilbert bước vào Trường thì Weierstrass đã là nhà toán học kiệt xuất nhất nước Đức; Jacobi và Richelo tốt bụng đã qua đời, nhưng Franz Neumann, người sẽ sống đến trăm tuổi, vẫn còn đọc bài giảng ở trường. Sinh viên đều được biết đến cách mà Viện hàn lâm đánh giá các công trình khoa học, và F. Neumann, người có nhiều phát minh không bao giờ công bố, nói về điều đó: "Tìm ra chân lý mới tự nó là niềm hạnh phúc lớn lao; việc thừa nhận dường như không giúp thêm được gì".

Ở trường đại học, Hilbert cảm thấy thoải mái như khi ở trường phổ thông: các giáo sư dạy những gì họ thích dạy, còn sinh viên chọn những gì họ muốn học! Không có một yêu cầu bắt buộc nào, các buổi dạ hội được giảm đến mức tối

thiểu, không có bất cứ kỳ kiểm tra nào, cho đến khi phải thi tốt nghiệp. Tất nhiên với một sự tự do như vậy, nhiều sinh viên đã biến những năm đầu ở đại học thành những cuộc vui triền miên của sinh viên, và những cuộc đấu súng! Nhưng với anh sinh viên 18 tuổi Hilbert thì trường đã cho anh ta cơ hội không thể tuyệt vời hơn: sự tự do mong đợi từ lâu để dành trọn cho Toán học.

David Hilbert. Nguồn: Internet

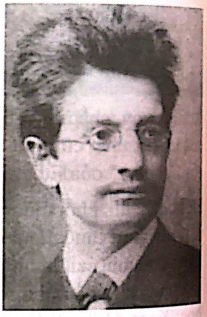
Ngược với mong muốn của cha mẹ, Hilbert không ghi tên vào ngành Luật, mà ghi tên học các bài giảng về Toán, thời đó đang thuộc Khoa Triết học.

Trong học kỳ đầu tiên, Hilbert đi nghe các bài giảng về phép tính tích phân, định thức, độ cong của các mặt. Sang học kỳ thứ hai, như thông lệ phổ biến thời đó là sinh viên đi đến các trường đại học khác để nghe các chuyên đề khác nhau, Hilbert đến Gottingen, "thủ đô Toán học" của nước Đức. Ở đó, ông nghe bài giảng của Fucks, mà tên tuổi gần như đồng nghĩa với lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính. Fucks giảng bài theo phong cách rất lạ. Thường thì ông không chuẩn bị bài giảng, mà "ngẫu hứng" ngay trên lớp. Về sau sinh viên nói rằng, chính nhờ đó mà họ "có cơ hội quan sát suy nghĩ của một nhà toán học đỉnh cao".

Học kỳ tiếp theo, Hilbert đến Berlin, nơi ông có dịp làm quen với những nhà toán học kiệt xuất như Weierstrass, Kummer, Kronecker, Helmholtz. Nhưng với tình yêu quê hương, ông trở về Konigsberg.

Ở Konigsberg, Hilbert kết thân với người bạn đến từ Berlin, một thiên tài nhưng lại rất rụt rè, đó là Minkovski. Hai người bạn, cùng với một thầy giáo trẻ 25 tuổi mới đến là Hurwitz lập thành một "bộ ba" không thể rời nhau. Hàng ngày, đúng 5 giờ chiều, họ lại làm cuộc "tản bộ", và Hilbert phát hiện ra rằng, những câu chuyện trong khi tản bộ giúp ích hơn rất nhiều so với ngồi nghe bài giảng ở giảng đường. Ông viết: "*Trong những cuộc tản bộ bất tận đó, chúng tôi chìm đắm trong những vấn đề toán học thời bấy giờ, trao đổi những điều vừa phát hiện được, những ý tưởng, những kế hoạch khoa học, và tạo lập một tình bạn đến trọn đời*".

Hurwitz



Minkovski

Bộ ba tìm hiểu từng lâu đài của toán học thế giới. Hurwitz, với kiến thức uyên bác của mình trong mọi lĩnh vực, luôn là người nổi bật nhất, làm lu mờ hai người còn lại. Về sau Hilbert nhớ lại rằng: "*Thời đó, chúng tôi không tin là đến khi nào đó có thể tiến xa như vậy*".

Tương tryền rằng, Alexander Macedon khi còn nhỏ thường than mỗi khi Vua cha chinh phục đất nước nào đó: "Cứ thế này thì làm gì còn đất cho ta chinh phục nữa"! Nhưng các nhà toán học may mắn hơn: thế giới toán học là vô cùng, và luôn còn những đỉnh cao cho những ai kiên trì chinh phục nó. Cũng như Hurwitz, Hilbert và Minkovski đã đạt đến những đỉnh cao của Toán học.

HAI BIỂN QUẢNG CÁO CÁCH NHAU BAO NHIÊU?

Phan Thanh Hồng - Nguyễn Thị Nhung

Thấy em gái đang ngồi trầm ngâm, anh trai hỏi:

– Em đang suy nghĩ về câu đố sau mỗi chuyến đi của các bạn trong nhóm à? Em nhận được câu gì thế?

– Vâng anh ạ. Nhưng mà lần này em nhận được câu hỏi kì cục lắm, không về địa lý hay lịch sử của vùng chúng em đến mà về khoảng cách của hai biển quảng cáo trên đường.

Thấy anh chau mày không hiểu, em gái giải thích:

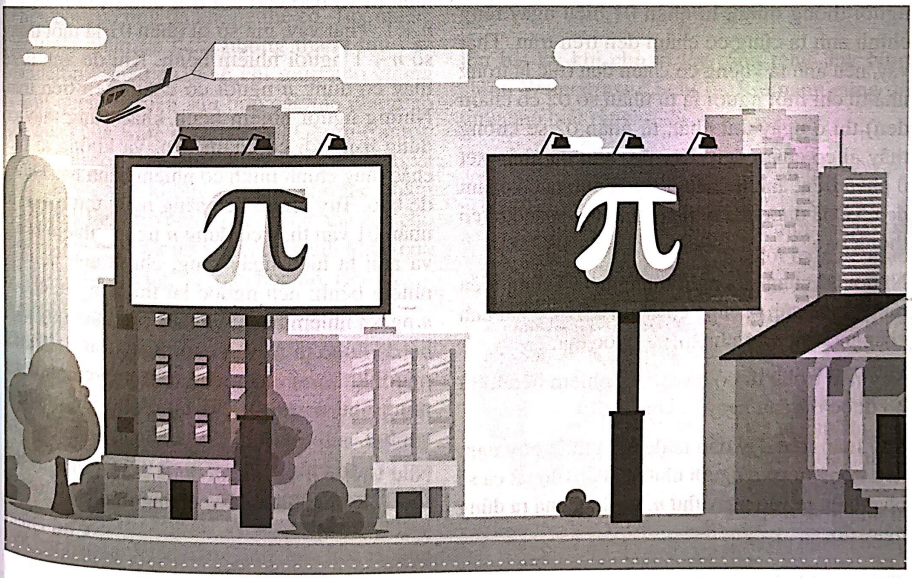
– Thế này anh ạ. Trên đường đi có rất nhiều biển quảng cáo cách đều nhau. Mấy đứa bọn em không có việc gì làm nên nhìn đồng hồ đếm biển. Cậu bạn đố em xem hai biển liên tiếp cách nhau bao nhiêu.

– "Sao biết được. Chắc phải có thêm thông tin gì chứ." Anh trai thắc mắc.

– Vâng, có thêm một chi tiết nữa anh ạ. Khi em bắt đầu đếm từ một biển quảng cáo, vừa hết một phút thì kết thúc ở một biển khác, cậu bạn em kêu lên: "Thật là trùng hợp, nếu lấy số biển này nhân với 10 thì đúng bằng vận tốc của xe ô tô chúng ta". Lúc đó xe đang đi với tốc độ rất đều và em đang cố nhớ xem vận tốc theo kilomet trên giờ của xe lúc đó là bao nhiêu.

Cậu anh trai đứng suy nghĩ một lúc và nói: "Em không phải cố nhớ nữa đâu, anh tính được rồi. Tối nay rửa bát hộ anh thì anh gợi ý cho!"

Không cần biết vận tốc mà vẫn tính được à. Anh trai đã làm thế nào ấy nhỉ, các bạn giải thích hộ cho cô em gái với nhé.



GIẢI ĐÁP BÀI TÙ NHÂN

(Xem Tạp chí Pi Tập 1, số 9 tháng 9.2017, trang 56)

Giả sử trong nhà tù chỉ có đúng 1 tù nhân nhiễm bệnh, chẳng hạn tù nhân số 01. Ngay buổi sáng đầu tiên, tù nhân 01 nhìn thấy không người nào có chấm đen trên trán, mà nhà tù lại thông báo có người bị bệnh. Là người thông minh, 01 hiểu ngay rằng chính mình có nốt đen trên trán! Anh ta báo cáo với nhà tù, và được thả ra. Như vậy, nếu chỉ có 1 người nhiễm bệnh thì người đó được ra vào cuối ngày đầu tiên.

Ta nghĩ thêm một chút, giả sử có 2 người nhiễm bệnh, là số 01 và 02 chẳng hạn.

Buổi sáng đầu tiên, 01 và 02 đều nhìn thấy có đúng một người có chấm đen trên trán, những người khác nhìn thấy có 2 người có chấm đen. Dĩ nhiên không ai dám chắc mình có bị nhiễm hay không, nên ngày đầu tiên qua đi mà không tù nhân nào lên khai báo.

Sang ngày thứ hai, tù nhân 01 thấy người duy nhất có chấm đen là 02 vẫn còn ngồi đó. Là người thông minh, tù nhân 01 hiểu ngay rằng chính anh ta cũng có chấm đen trên trán. Thật vậy, nếu anh ta không có chấm đen (tức là trong nhà tù chỉ một người là tù nhân số 02 có chấm đen) thì ở ngày thứ nhất, tù nhân 02 sẽ không thấy ai có chấm đen. Khi đó, như đã nhận xét ở phần trên, anh ta hiểu ngay là anh ta có chấm đen, và đã được thả từ ngày thứ nhất, sau khi có thông báo.

Người 02 cũng suy nghĩ tương tự, và cũng hiểu rằng chính anh ta cũng có chấm đen. Cả hai anh chàng sẽ báo cho nhà tù, và được thả.

Vậy nếu trong tù có hai người nhiễm bệnh, thì họ được thả sau ngày thứ hai.

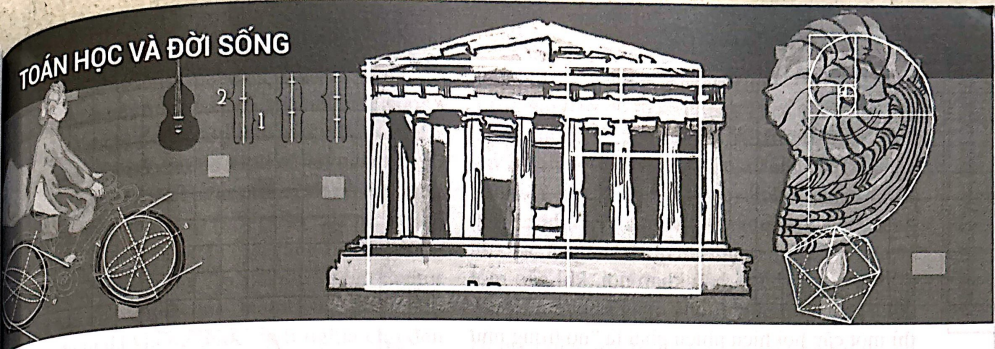
Suy luận trên đây dẫn ta đến giả thiết quy nạp: nếu trong tù có n người nhiễm bệnh, thì tất cả sẽ phát hiện ra vào ngày thứ n, và được thả ra đúng ngày đó.

Minh họa: Linh Rab

Khẳng định trên đúng cho $n = 1, 2$. Giả sử khẳng định đúng cho n. Ta chứng minh rằng, nếu trong tù có $n+1$ người nhiễm bệnh, thì họ sẽ phát hiện ra và báo cáo lên trại đúng vào ngày thứ $n+1$. Thật vậy, giả sử tù nhân 01 là một trong số $n+1$ người nhiễm bệnh. Khi đó anh ta sẽ thấy có đúng n người có chấm đen trên trán. Những người nhiễm bệnh khác cũng thấy có đúng n người có chấm đen, và không ai biết chắc rằng chính mình có nhiễm bệnh hay không để báo. Tuy nhiên đến sáng ngày thứ $n+1$, tù nhân 01 vẫn thấy có đúng n người nhiễm bệnh, và anh ta hiểu ngay rằng, chính anh ta cũng nhiễm bệnh: nếu ngược lại thì trong tù chỉ có n người nhiễm bệnh, và theo giả thiết quy nạp, họ đã được ra tù vào cuối ngày thứ n. Những người khác có chấm đen trên trán cũng thông minh như người 01, và tất cả họ lên báo cáo với trại.

Như vậy cả $n+1$ người được ra tù vào ngày thứ $n+1$. Khẳng định được chứng minh.

Chủ Quán



FRACTAL MIỀN GIAO THOA CỦA TOÁN HỌC, NGHỆ THUẬT VÀ QUY LUẬT TỰ NHIÊN

(tiếp theo kỳ trước)

Phạm Huy Điển

Phần II. Sự ra đời và phát triển của fractal

Trong khi công lao phát triển hình học fractal được nhìn nhận thuộc về Benoît Mandelbrot, trên thực tế nhiều nhà toán học khác trong thế kỷ trước ông đã đặt nền móng cho công việc này. Điều đáng nói là Mandelbrot đã may mắn sở hữu năng lực của máy tính - lợi thế mà những vị tiền bối của ông đã không thể có. Tuy nhiên, việc thừa nhận và hiểu những thành tựu của Mandelbrot chắc chắn sẽ chỉ giúp cho chúng ta làm quen và hiểu sâu hơn các tác phẩm có liên quan của Karl Weierstrass, Georg Cantor, Felix Hausdorff, Gaston Julia, Pierre Fatou và Paul Lévy - vốn không chỉ làm cho tác phẩm của Mandelbrot trở nên rõ ràng hơn, mà còn cho thấy sự kết nối của nó với các ngành khác của khoa học nói chung, và toán học nói riêng.

Những "quái vật" toán học

Cho đến thế kỷ 19, toán học chỉ quan tâm đến các hàm tạo ra các đường cong trơn. Thật vậy, trí tuệ thông thường của ngày đó nói rằng bất kỳ hàm nào với công thức giải tích (hay là tổng của một chuỗi lũy thừa hội tụ) chắc chắn sẽ tạo ra một đường cong như vậy. Tuy nhiên, ngày 18 tháng 7 năm 1872, Karl Weierstrass trình bày một bài báo tại Viện hàn lâm Khoa học Hoàng gia Phổ cho thấy rằng đối với số nguyên dương a và số $b \in (0,1)$ thì

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)$$

là một hàm không khả vi. Sử dụng định nghĩa giới hạn của đạo hàm, ông chỉ ra rằng tỷ số sai phân của hàm

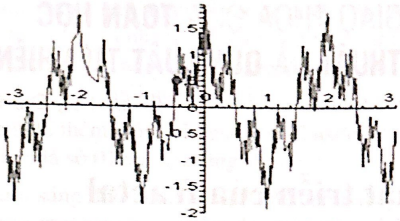
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

lớn bất kỳ khi chỉ số lấy tổng tăng lên. Như chính Weierstrass đã chỉ ra, Riemann cũng đã từng cho biết rằng

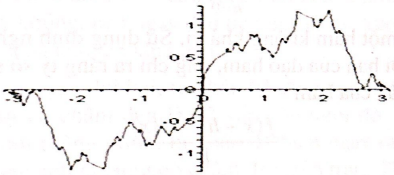
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2 x)/n^2$$

là một ví dụ của một hàm liên tục mà không khả vi, nhưng không bao giờ công bố một chứng minh, và cũng không có ai lặp lại nó. Như vậy, chứng minh của Weierstrass xem như là ví dụ được chứng minh chặt chẽ đầu tiên về một hàm liên tục, nhưng không khả vi.

Trong khi Weierstrass, và quả thực phần lớn các thiết lập toán học thời đó, đã tránh sử dụng đồ thị mà thiên về biến đổi hình thức để chứng minh kết quả, các nhà toán học sau này như Helge von Koch và Mandelbrot lại thấy hữu ích khi biểu diễn các kết quả của họ dưới dạng đồ họa. Thật vậy, đối với một người chỉ quen làm việc với các đường cong khả vi hầu khắp nơi, khi gặp một công thức cho một đường cong không như vậy thì một câu hỏi hiển nhiên phải là "nó trông như thế nào?"



(a). Đồ thị $\sum_{n=0}^{400} b^n \cos(a^n x\pi)$, $a = 5, b = 0.5$.

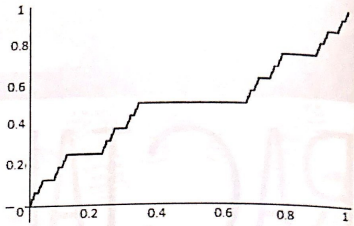


(b). Đồ thị $\sum_{n=0}^{10000} \sin(n^2 x)/n^2$.

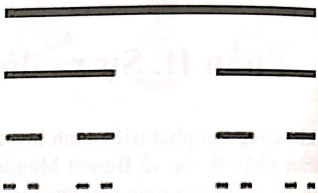
Hình 30.

Hai đường cong trên đều là xấp xỉ, nhưng cũng giúp người ta hình dung ra dáng điệu của các hàm chính xác không khác gì các fractal (kiểu như đường von Koch mà ta thấy trong phần trước). Các hàm này đã "kháng" các phép toán giải tích truyền thống và đã được gán nhãn "quái vật" bởi Charles Hermite (mặc dù không phải do hình thù của chúng, vốn nằm ngoài khả năng biểu diễn của các nhà toán học ngày đó), cho nên phần lớn bị bỏ quên bởi cộng đồng toán học đương đại.

Năm 1883 Georg Cantor, người đã tham dự các bài giảng của Weierstrass trong khi còn là sinh viên tại Đại học Berlin (và sau này có vai trò đối với lý thuyết tập hợp cũng như là Mandelbrot đối với hình học fractal), đã đưa ra một hàm số ψ liên tục, có đạo hàm bằng 0 hầu khắp nơi, mà không phải là hằng số. Đạo hàm của nó chỉ khác 0 trên một tập có cấu trúc đặc biệt, mà sau này được mang tên là tập Cantor, còn bản thân hàm ψ thì có đồ thị như trong Hình 31(a).



(a). Đồ thị hàm ψ.



(b). Tập Cantor

Hình 31.

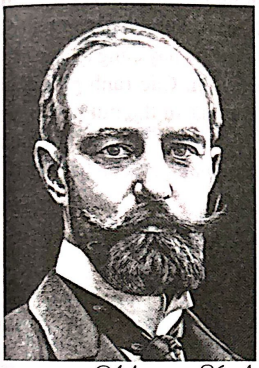
Rõ ràng, hàm ψ là đơn điệu và có tính chất sau

$$\int_0^1 \psi'(x)dx = 0, \text{ nhưng mà } \psi(1) - \psi(0) = 1.$$

Tập Cantor được xây dựng theo quy trình minh họa trong Hình 31(b). Cụ thể là: lấy đoạn [0,1] chia làm 3 phần và khoét bỏ đi khúc giữa, rồi sau đó áp dụng lại quy trình này cho từng đoạn con còn lại,... và công việc cứ thế tiếp diễn vô hạn lần thì tập còn lại chỉ là những "hạt bụi" thưa thớt mà ta không thể nhìn thấy được, đó là tập Cantor. Rõ ràng, đây cũng chính là quy trình mà Sierpinski đã áp dụng để tạo ra

GEORG CANTOR

tam giác mang tên ông sau này (như đã trình bày trong phần trước của bài viết), chỉ khác là đoạn thẳng đã được thay bằng tam giác. Tập Cantor là tập vô hạn đếm được và có độ đo Lebesgue là 0. Rõ ràng nó có thuộc tính tự đồng dạng, có nghĩa là nếu phóng to một phần của tập, ta sẽ thu được toàn bộ tập. Ta biết rằng tính tự đồng dạng là một đặc trưng của fractal, và tập Cantor là một ví dụ ban đầu của fractal, mặc dù tính tự đồng dạng đã không được định nghĩa cho đến tận năm 1905 (bởi Cesàro, người đã phân tích bài báo của Helge von Koch mà ta sẽ thảo luận ngay dưới đây) và fractal đã không được định nghĩa cho đến năm 1975, do đó Cantor đã không nghĩ về nó theo những thuật ngữ này.


Helge von Koch

Chúng ta đã biết về bông tuyết Koch trong phần trước của bài viết này. Người phát minh ra nó là nhà toán học người Thụy Điển Helge von Koch, vào năm 1904. Trong phần giới thiệu về công trình của mình, ông đã nêu ra những điều sau đây về bài tiểu luận năm 1872 của Weierstrass :

"... đường như với tôi ví dụ của ông [Weierstrass] không thỏa đáng từ quan điểm hình học vì hàm được xác định bởi một biểu thức giải tích vốn che giấu bản chất hình học của đường cong tương ứng, và do đó từ quan điểm này ta không thấy tại sao đường cong không có tiếp tuyến. Thay vào đó có vẻ như sự xuất hiện này thực sự mâu thuẫn với thực tế được Weierstrass thiết lập theo cách giải tích thuần túy."

Đường cong của von Koch, cũng như tập Cantor, có đặc tính tự đồng dạng. Nó cũng là một fractal, cho dù giống như Cantor, von Koch đã không nghĩ theo thuật ngữ đó. Ông chỉ đơn thuần là nhằm mục đích cung cấp một cách khác để chứng tỏ rằng các hàm không khả vi (nghĩa là các hàm "không có tiếp tuyến" theo cách nói hình học) có thể tồn tại - theo một cách liên quan đến việc sử dụng "hình học cơ sở" (Tiêu đề của bài báo của ông chính là "Về đường cong liên tục mà không có tiếp tuyến tạo dựng từ Hình học Cơ sở"). Bằng cách đó, von Koch đã cho thấy mối liên hệ giữa những "con quái vật" không khả vi của giải tích và hình học.

Von Koch tự mình là một nhà toán học không nổi tiếng. Nhiều kết quả khác của ông rút ra từ Henri Poincaré, từ người mà ông biết rằng có thể có những kết quả "bệnh hoạn" - tức là những cái được gọi là "quái vật" - nhưng chưa bao giờ thực sự khai thác chúng, ngoài bài luận nói trên. Cũng cần lưu ý rằng Poincaré nghiên cứu động lực học phi tuyến vào cuối thế kỷ 19, cuối cùng đã dẫn đến lý thuyết hỗn độn, một lĩnh vực liên quan chặt chẽ đến hình học fractal. Vậy là phù hợp khi von Koch trở thành một trong những ông tổ của lĩnh vực có liên quan chặt chẽ đến lĩnh vực nghiên cứu mà chính Poincaré đã giúp đỡ đặt nền móng.

Tập có số chiều không nguyên


Felix Hausdorff

Một khái niệm đặc biệt quan trọng trong nghiên cứu fractal, ngoài sự tự đồng dạng và sự không khả vi đã nói ở trên, là *số chiều Hausdorff*, một khái niệm được Felix Hausdorff đưa ra trong một bài báo công bố vào tháng 3 năm 1918. Kết quả của Hausdorff từ bài báo này là rất quan trọng đối với lĩnh vực tôpô. Định nghĩa của ông về số chiều đã mở rộng định nghĩa trước đây để cho phép các tập có số chiều là một giá trị tùy ý, khác không (không giống như số chiều tôpô chỉ là số tự nhiên), được Mandelbrot sau này dùng trong định nghĩa fractal khi ông xem nó là "một tập có số chiều Hausdorff lớn hơn hẳn số chiều tôpô của nó."

Ngay khi Hausdorff giới thiệu định nghĩa "mở rộng" về số chiều, nó đã trở thành đối tượng

khảo cứu được quan tâm - đặc biệt là bởi Abraham Samilovitch Besicovitch, người từ năm 1934 đến đầu năm 1937 đã viết không dưới ba bài báo có dẫn tác phẩm của Hausdorff. Đáng buồn thay, vào thời gian này, Hausdorff đang gặp khó khăn khi sống như một người Do Thái ở nước Đức quốc xã. Ông bị buộc phải từ bỏ chức vụ giáo sư tại Đại học Bonn năm 1935, và mặc dù vậy ông tiếp tục làm về lý thuyết tập hợp và tôpô, nhưng tác phẩm của ông chỉ có thể được xuất bản bên ngoài nước Đức. Mặc dù đã tạm thời thu xếp để tránh bị đưa đến một trại tập trung, tình hình ở Đức nhanh chóng trở nên không thể chịu đựng nổi, và không có nơi nào khác để đi, ông cùng với vợ và chị dâu đã tự tử vào tháng Giêng năm 1942.

Số chiều Hausdorff của một tập là một khái niệm khá phức tạp nên không được trình bày chi tiết ở đây để tránh làm bài viết trở nên quá dài. Trong trường hợp đặc biệt, khi tập có tính tự đồng dạng, thì số chiều của nó chính là *số chiều fractal* và được tính theo công thức đã được nói tới trong phần trước của bài này, cụ thể là

$$D = \frac{\log(H)}{\log(K)}$$

trong đó H là hệ số tăng giảm *số đo đặc trưng* của tập tương ứng với tỷ lệ tăng giảm của *kích thước tuyến tính K* của nó. Tuy nhiên, công thức này đã không xuất hiện trong bài báo của Hausdorff, vì chúng liên quan trực tiếp đến fractal, khái niệm mà Hausdorff đã không hề biết đến.

Số chiều Hausdorff ra đời nhằm khắc phục một số hạn chế của số chiều tôpô, nhưng rất may là nó cũng phản ánh tốt bản chất độc đáo của các tập fractal. Chính vì vậy, người khai sinh ra khái niệm fractal sau này đã hoàn toàn có lý khi đưa ra định nghĩa nó là một tập có số chiều fractal lớn hơn số chiều tôpô. Tuy nhiên, do tính đa dạng của các fractal có thể gặp mà định nghĩa này đã không thể vét hết, chẳng hạn như các đường cong lấp đầy một hình hộp trong không gian.

Những "điểm hút" và "điểm đẩy"

Gần như cùng thời gian mà Hausdorff đã nghiên cứu, hai nhà toán học người Pháp, Gaston Julia và Pierre Fatou, đã phát triển các nghiên cứu (hoàn toàn độc lập với nhau) và đi tới những kết quả có ý nghĩa quan trọng đối với hình học fractal. Họ nghiên cứu các ánh xạ của mặt phẳng phức và các hàm lặp. Công việc của họ với các hàm lặp đã dẫn đến ý tưởng về các điểm hút (những điểm trong không gian có tính thu hút các điểm khác về với chúng) và các điểm đẩy (những điểm trong không gian mà đẩy các điểm khác, thường là tới một điểm hút khác). Những khái niệm này cũng quan trọng đối với lý thuyết hỗn độn. Các ranh giới giữa các lưu vực khác nhau của sự thu hút hóa ra rất phức tạp và được biết đến bây giờ như tập Julia (mà ta đã nói tới trong phần đầu của bài viết).

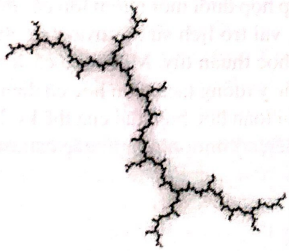
Bởi vì Fatou và Julia (hay đúng hơn là công việc của họ) có trước các máy tính, nên họ không thể tạo ra các hình ảnh như ta thấy trong phần đầu của bài viết này. Họ đã bị giới hạn trong những gì họ có thể làm bằng tay, với chỉ khoảng ba bốn vòng lặp. Julia đã công bố một bài báo dài 199 trang vào năm 1918, gọi là "Ghi nhớ về sự lặp của hàm hữu tỷ" (Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles), trong đó thảo luận nhiều về công trình của ông về các hàm lặp và mô tả tập Julia. Với bài báo này, Julia đã giành giải Grand Prix của Académie des Sciences và trở nên nổi tiếng trong giới toán học trong suốt thập niên 20 đầu thế kỷ trước. Tuy nhiên, mặc dù nổi bật như vậy, công trình của ông đã rơi vào quên lãng trong khoảng năm mươi năm. Fatou, mặt khác, đã không đạt được mức độ nổi tiếng như Julia, dù là chỉ tạm thời, ngay cả khi đã khám


PIERRE FATOU

phá ra những kết quả tương tự - theo một cách khác và cũng gửi chúng đi công bố. Ông đã gửi một thông báo về kết quả của mình cho *Comptes Rendus*, trong khi Julia đã chọn gửi tác phẩm của mình cho tạp chí *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Julia, bảo vệ công trình của mình, đã gửi thư cho Comptes Rendus yêu cầu họ khảo cứu xem kết quả của ai có ưu thế hơn. Điều này làm tung ra một cuộc điều tra và dường như làm nản lòng Fatou, đủ để giữ ông không tham gia Grand Prix. Tuy nhiên, Académie des Sciences đã ghi nhận và trao cho ông một giải thưởng về bài báo này.

Tập Julia có thể hoàn toàn không liên thông, trong trường hợp đó chúng là "bụi" như tập Cantor nói ở trên (xem Hình 32(a) bên dưới), hoặc chúng là hoàn toàn liên thông (xem Hình 32(b)).

(a)



(b)

Hình 32.

Phương pháp để xác định một tập Julia có là liên thông hay không đã được biết đến trong phần đầu của bài viết: Tập Julia là tập liên thông chỉ khi điểm tương ứng với nó nằm trong tập Mandelbrot.

Năm 1938, một năm sau bài báo sau cùng của Besicovitch về số chiều Hausdorff, Paul Lévy đã đưa ra một cách xử lý toàn diện về tính tự đồng dạng. Ông cho thấy đường cong von Koch chỉ là một trong nhiều ví dụ về đường cong tự đồng dạng, ngay chính von Koch cũng đã nói rằng đường cong của ông có thể được tổng quát hóa.

Sự thống nhất trong khái niệm fractal

Vào thời gian đó ít người nghĩ rằng có một ai đó sẽ kết nối các tác phẩm của Lévy và Hausdorff. Benoit Mandelbrot sinh năm 1924 ở Warsaw, Ba Lan và, giống như Hausdorff, ông cũng là người Do thái, nên phải cùng gia đình tìm đường thoát khỏi ách phát- xit năm 1936 bằng cách rời Ba Lan tới Pháp. Ở đây, một trong những chú của Mandelbrot, Szolem Mandelbrojt, là một nhà toán học thuần túy, đã quan tâm đến Mandelbrot trẻ và hướng anh tới toán học. Trên thực tế, vào năm 1945, Mandelbrojt cho cháu trai của ông thấy các công trình của Fatou và Julia, nhưng Mandelbrot trẻ tuổi ban đầu đã không quan tâm lắm.

Benoit Mandelbrot

Do hoàn cảnh, việc học hành của Mandelbrot rất không đều và bị gián đoạn hoàn toàn vào năm 1940. Mandelbrot, giống như Helge von Koch trước ông, ưa thích các biểu diễn trực quan của các bài toán, ngược lại với phong cách hình thức, mặc dù điều này cũng có thể bắt nguồn từ việc thiếu được đào tạo chính thống. Chính điều này sau đó đã đưa ông vào cuộc xung đột trực tiếp với phong cách giảng dạy của "Bourbaki", tôn thờ việc giải quyết các vấn đề một cách giải tích (trái ngược với trực quan), thống trị việc giảng dạy toán học tại Pháp vào thời gian đó.

Sau khi chiến tranh kết thúc, Mandelbrot đã tham gia kỳ thi vào École Polytechnique ở Paris, mặc dù không có chuẩn bị nhưng đã đỗ. Nơi đây

ông gặp một người thầy khác của mình, Paul Lévy, là một giáo sư đã ở đó từ năm 1920 cho đến khi nghỉ hưu vào năm 1959.

Sau khi hoàn tất việc học hành, Mandelbrot chuyển đến New York, nơi ông bắt đầu làm việc cho Trung tâm Nghiên cứu Thomas J. Watson của IBM. Công ty đã cho ông tự do trong việc chọn chủ đề nghiên cứu, cho phép ông khai phá và phát triển các khái niệm (concepts) bằng cách sử dụng các phương pháp của riêng mình, mà không phải lo lắng về phản ứng của cộng đồng học thuật hàn lâm. Năm 1967, trong khi vẫn còn ở đó, Mandelbrot đã viết bài tiểu luận của mình, *Bờ biển nước Anh dài như thế nào? Tự đồng dạng thống kê và số chiều phân số*, trong đó ông liên kết ý tưởng của các nhà toán học trước đây với thế giới thực - cụ thể là bờ biển, mà ông tuyên bố là "tự đồng dạng thống kê". Ông lập luận rằng:

"Các phương pháp tự đồng dạng là một công cụ mạnh trong việc nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên, bao gồm cả địa chất, cũng như kinh tế học và vật lý. Trên thực tế, nhiều tiếng ồn có số chiều D nằm trong khoảng từ 0 đến 1."

Sau bài tiểu luận này và với sự trợ giúp của máy vi tính, Mandelbrot trở lại công việc của Julia và Fatou. Với khả năng nhìn thấy, lần đầu tiên, các tập này trông như thế nào tại giới hạn của chúng, Mandelbrot đã đến với ý tưởng vẽ ra các giá trị của $c \in \mathbb{C}$ mà tập Julia tương ứng với nó là liên thông. Điều này tạo ra một fractal tinh túy (mang tên Mandelbrot), như ta đã biết trong phần đầu của bài viết này. Mandelbrot đã không chỉ phát minh ra môn hình học fractal mà còn phổ biến nó thông qua ứng dụng của nó tới các lĩnh vực khoa học khác. Như ông đã ám chỉ trong bài "*Bờ biển nước Anh dài thế nào?*", hình học fractal có ích trong việc biểu diễn các hiện tượng tự nhiên, nhất là những thứ không dễ dàng được biểu diễn bằng cách sử dụng hình học Euclide truyền thống. Rõ ràng, không có hình dạng đơn giản nào từ hình học Euclide đến với tâm trí khi người ta ngắm nhìn đường chảy của một con sông. Hơn nữa, lý thuyết hình học fractal và lý thuyết hỗn độn có các kết nối quan trọng với vật lý, y học, và nghiên cứu động lực dân số. Tuy nhiên, ngay cả khi không nhìn ra các kết nối như vậy, cũng là rất khó cho ai đó muốn kháng lại sự hấp dẫn thẩm mỹ của các fractal kỳ ảo.

Hãy nhớ lại hình ảnh rặng núi giả đưa trên trang đầu tiên của bài viết này (xem Tạp chí Pi tập 2, số 1 tháng 1.2018). Nó được tạo ra bởi phép lặp một hàm phân thức (kèm thêm yếu tố ngẫu nhiên). Chính việc tìm kiếm một từ để biểu thị rặng núi này (cùng những đường cong do vòng lặp tạo ra và "họ hàng" của chúng) cuối cùng đã dẫn Mandelbrot đến với thuật ngữ *fractal*. Từ này có liên quan đến động từ tiếng Latin **frangere**, nghĩa là "phá vỡ". Trong tâm trí La Mã, frangere có thể gợi lên hành động phá vỡ một hòn đá, vì tính từ được dẫn xuất từ nó bao hàm hai đặc tính rõ ràng nhất của đá vỡ, đó là *bất thường* và *phân mảnh*. Tính từ này là **fractus**, là cái dẫn đến từ fractal. Cuối cùng Mandelbrot đã đề xuất một định nghĩa chính xác của thuật ngữ toán học: *tập fractal*. Mối liên hệ họ hàng với "phân số" cũng quan trọng nếu người ta giải thích "phân số" như một số nằm giữa các số nguyên, còn một tập fractal có thể được coi là nằm giữa các hình dạng Euclid.

Lý do cho việc tạo ra thuật ngữ *fractal* và sáng lập hình học fractal đã được nêu rõ trong tạp chí Khoa học (Science) với bài viết của Freeman J. Dyson:

"Fractal" là một từ được phát minh bởi Mandelbrot để tập hợp dưới một nhóm lớn các đối tượng đã có . . . vai trò lịch sử . . . trong sự phát triển của toán học thuần túy. Một cuộc cách mạng vĩ đại của các ý tưởng tách toán học cổ điển của thế kỷ 19 khỏi toán học hiện đại của thế kỷ 20. Toán học cổ điển có nguồn gốc từ các cấu trúc hình học chuẩn mực của Euclid và động lực học tiến hóa liên tục của Newton. Toán học hiện đại bắt đầu với lý thuyết tập hợp của Cantor và đường cong lấp đầy không gian của Peano. Về mặt lịch sử, cuộc cách mạng này đã bị thúc ép bởi sự khám phá ra các cấu trúc toán học không phù hợp với các mẫu hình của Euclid và Newton. Những cấu trúc mới này được các nhà toán học đương đại coi là "bệnh hoạn". Chúng được miêu tả như là một "bộ sưu tập của những con quái vật", họ hàng với tranh lập thể (cubist paintings)

và nhạc phi âm chủ (atonal music) vốn đang phá rối các chuẩn mực thẩm mỹ vào khoảng thời gian đó. Các nhà toán học tạo ra những con quái vật đã xem chúng là quan trọng với việc cho thấy rằng thế giới của toán học thuần túy có chứa sự phong phú về khả năng vượt ra ngoài các cấu trúc đơn giản mà họ nhìn thấy trong tự nhiên. Toán học thế kỷ XX đã nở hoa với niềm tin rằng nó đã hoàn toàn vượt qua các giới hạn áp đặt bởi nguồn gốc tự nhiên của nó."

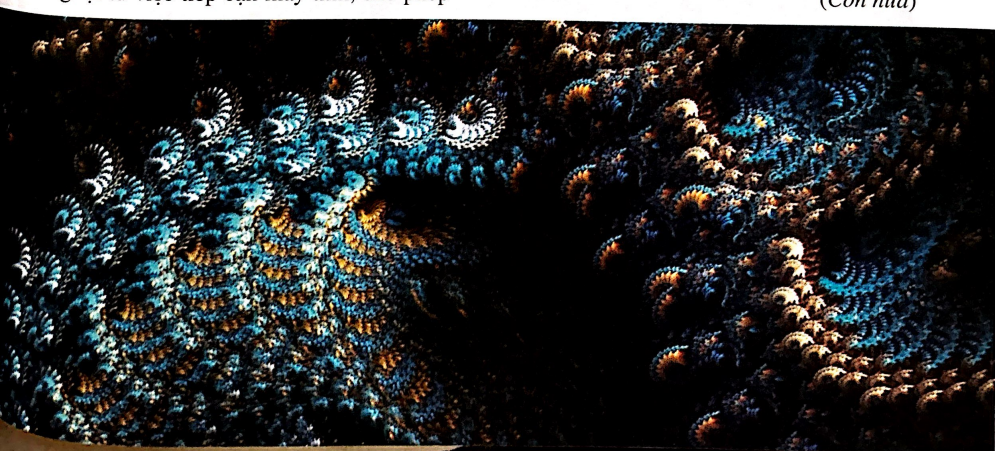
Đến nay, người ta đã thấy rằng khó mà đưa ra một định nghĩa ngắn gọn cho khái niệm fractal. Thay vì được định nghĩa chặt chẽ, dựa trên thuộc tính không khả vi khắp nơi và số chiều fractal, tập fractal cần thỏa mãn thêm một vài trong số những tiêu chí khác, được liệt kê trong một danh sách (nhưng không được nêu ra ở đây để tránh bài này trở nên quá dài). Như là một nhóm, các tiêu chí này tạo thành các hướng dẫn để loại trừ một số trường hợp nhất định, ví dụ như những cái có thể tự đồng dạng mà không có các đặc trưng fractal thông thường khác (như là đường thẳng).

Fractal - nhịp cầu nối giữa lý thuyết và ứng dụng

Cách tiếp cận phi truyền thống của Mandelbrot dẫn ông phát minh ra một dạng toán học mới lạ và hữu ích, nhưng không phải là trong sự cô lập hoàn toàn với cộng đồng. Phát kiến của Mandelbrot là sự phát triển tiếp theo những công trình được khởi nguồn từ những nhà toán học trước ông, như Weierstrass và von Koch, nhưng đặc biệt là Julia, Fatou và Hausdorff. Ông được hưởng lợi từ việc tiếp cận máy tính, cho phép ông xây dựng công trình của mình trên những tác phẩm của những người khác theo một cách hoàn toàn mới chưa từng có trước đó, và đồng thời được sử dụng phương pháp yêu thích của mình để giải quyết vấn đề - đó là trực quan. Hơn thế nữa, phát minh của ông cũng cho thấy rõ nét hơn tầm quan trọng của việc nghiên cứu toán học thuần túy. Thật vậy, cho đến khi Mandelbrot xuất hiện và thống nhất ý tưởng chiết trung của Hausdorff, Julia và các tác giả khác, họ vẫn chỉ trình diễn những ý tưởng toán học rất trừu tượng của mình trong khuôn khổ các nhánh khác nhau của toán học lý thuyết. Có rất ít điều làm cho một nhà sinh học bình thường quan tâm đến lý thuyết tập hợp. Tuy nhiên, thông qua hình học fractal, nhiều ý tưởng dường như trừu tượng (từ các nhà toán học mà còn chưa được biết đến bên ngoài lĩnh vực nghiên cứu của mình) đã phát triển thành các ứng dụng mà các nhà khoa học khác có thể cảm nhận được. Do đó, việc dẫn đến các fractal và các ứng dụng của chúng là một phản ví dụ tuyệt vời cho các lập luận của bất cứ ai dám phủ nhận tầm quan trọng của việc nghiên cứu toán học thuần túy.

Ngày nay, Hình học Fractal đã trở thành một môn học (chuyên đề) trong một số trường đại học danh tiếng trên thế giới (chẳng hạn như, Đại học Yale ở Hoa kỳ), cho nên việc trình bày nó trong khuôn khổ một vài bài báo nhỏ là điều không thể. Tuy nhiên, với những gì biết được chúng ta cũng đã có thể bắt đầu công việc tìm hiểu về fractal trong thế giới tự nhiên, trong nghệ thuật và trong một số ứng dụng đời thường. Đó sẽ là nội dung tiếp theo của bài viết này.

(*Còn nữa*)



Màu đen của lông chim thiên đường
VÀ CẤU TRÚC FRACTAL

Hà Huy Khoái (Theo Le Monde, 15/1/2018)

Ngày 9/1/2018 vừa qua, tạp chí khoa học nổi tiếng *Nature Communication* công bố phát hiện đặc biệt của nhóm các nhà Khoa học Mỹ: màu đen "tuyệt đối" của chim Thiên Đường đực là kết quả của cấu trúc fractal!

Trước tiên ta cần biết tại sao một vật nào đó lại có màu đen? Vì nó hấp thụ "hầu hết" ánh sáng. Với mục tiêu chế tạo những thiết bị phục vụ cho khoa học và quân sự, người ta tạo ra những vật liệu "siêu đen": chúng hấp thu đến 99%, thậm chí đến 99,95% ánh sáng.

Từ năm 1552, những thuỷ thủ trên con tàu của Magellan đã nói về một loài chim đẹp tuyệt vời, mà con đực có màu "siêu đen". Họ gọi loài chim đó là chim Thiên Đường.

Nhà tự nhiên học Alfred Wallace - người đồng phát kiến thuyết tiến hoá cùng với Charler Darwin - viết năm 1857: "*Một vẻ đẹp không thể nào diễn tả được. Đó là những con chim kỳ lạ nhất và đẹp nhất của hành tinh chúng ta*".

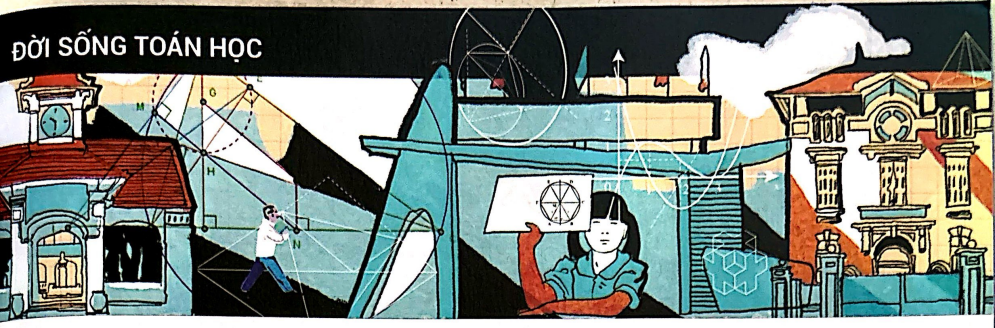
Màu siêu đen của chim Thiên Đường là điều bí ẩn, vì lông của chúng cũng chỉ có thành phần hoá học là keratin và melamin. Bí mật này chỉ được khám phá trong công trình nhắc đến trên đây, công bố tháng 1 năm 2018. Sử dụng kính hiển vi điện tử, các nhà khoa học Mỹ quan sát thấy cấu trúc lông rất đặc biệt, mỗi bộ phận nhỏ đều rất phức tạp, và hoàn toàn có cấu trúc fractal! Màu "siêu đen" ở đây không còn là kết quả của tính chất hoá học của chất tạo nên lông chim, mà do ánh sáng bị "mắc kẹt" trong cấu trúc fractal của bộ lông.

Một lần nữa, Tự Nhiên lại đưa đến những điều bất ngờ nhất. Và fractal đã có trong Tự Nhiên, chứ không phải là trên trang giấy của các nhà Toán học.

Người ta thường nói, ai chưa nhìn thấy điệu múa của chim Thiên Đường thì chết không nhắm mắt được!

Có thể nói như thế về FRACTAL không nhỉ?

Một con chim Thiên Đường đực đang nhảy múa trước một con cái.
(ảnh: Le Monde, 15/1/2018)



HỘI THẢO QUỐC TẾ

"LÝ THUYẾT NEVANLINNA VÀ HÌNH HỌC PHỨC KỶ NIỆM 100 NĂM NGÀY SINH GIÁO SƯ LÊ VĂN THIÊM"

Hà Nội, 26/2/2018 - 2/3/2018

Giáo sư Lê Văn Thiêm (29/3/1918 – 3/6/1991) là một trong những nhà khoa học nổi tiếng nhất của Việt Nam trong thế kỷ 20. Cùng với Giáo sư Hoàng Tụy, ông được coi là cha đẻ của Hội Toán học Việt Nam. Ông là Hiệu trưởng đầu tiên của Trường Sư phạm cao cấp và Trường Khoa học cơ bản những năm 1950, trở thành người đặt nền móng cho giáo dục đại học của nước Việt Nam mới; Phó Hiệu trưởng trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (1957-1970) và Viện trưởng đầu tiên của Viện Toán học Việt Nam (1970-1980). Bạn đọc có thể tìm đọc Tạp chí Pi Tập 1, số 3, tháng 3.2017 bài "Lê Văn Thiêm: con người và sự nghiệp" để hiểu rõ hơn về những đóng góp của ông cho khoa học và giáo dục đại học nước nhà.

Nhân dịp kỷ niệm 100 năm ngày sinh của GS Lê Văn Thiêm, Hội thảo khoa học quốc tế "Lý thuyết Nevanlinna và Hình học phức" được tổ chức với sự tham gia của các chuyên gia về Giải tích phức, Hình học phức, Lý thuyết Nevanlinna, Lý thuyết Số và một số chủ đề khác liên quan đến sự phát triển hiện tại của toán học ở Việt Nam.

Ban Tổ chức: Đinh Tiến Cường (*Đại học Quốc gia Singapore*), Nguyễn Hữu Dư (*ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐH Quốc gia Hà Nội*), Lê Mậu Hải (*Đại học Sư phạm Hà Nội*), Phùng Hồ Hải (*Viện Toán học*), Phạm Hoàng Hiệp (*Viện Toán học*), Vũ Hoàng Linh (*ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐH Quốc gia Hà Nội*).

Ban Khoa học: Ngô Bảo Châu (*ĐH Chicago, Hoa Kỳ và Viện NC cao cấp về Toán, Việt Nam*), Jean-Pierre Demailly (*Đại học Grenoble Alpes, Pháp*), Lê Tuấn Hoa (*Viện Toán học*), Hà Huy Khoái (*Đại học Thăng Long*), Đỗ Đức Thái (*Đại học Sư phạm Hà Nội*).

Hội thảo được tổ chức từ ngày 26/2/2018 đến ngày 2/3/2018 tại hai địa điểm:

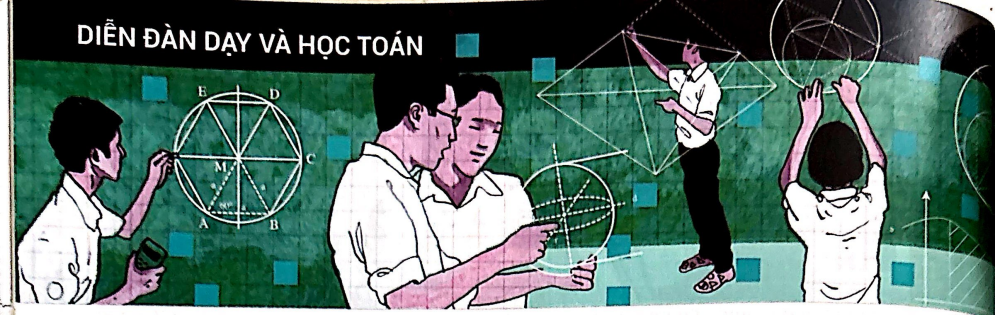
Thứ hai (26/2/2018): Khai mạc Lễ kỷ niệm và các báo cáo tại Hội trường Tầng 2, Nhà A6, Viện Toán học, 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội.

Thứ ba - thứ sáu (27/2-2/3/2018): Phòng Hội thảo, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, Tầng 7, Thư viện Tạ Quang Bửu, Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Các báo cáo khoa học tại Hội thảo kỷ niệm 100 năm ngày sinh GS Lê Văn Thiêm sẽ được xuất bản trên một số đặc biệt của tạp chí quốc tế Acta Mathematica Vietnamica.

Thông tin chi tiết của hội thảo có thể xem tại địa chỉ: http://math.ac.vn/conference/ComplexAnalysis2018/index.php?lang=vi

Nguồn: Viện Toán học

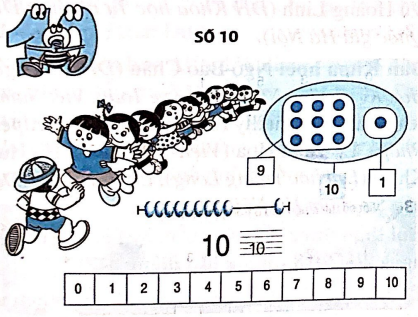


Dạy trẻ lớp 1 làm các bài về so sánh

Nguyễn Chiên [1]

Ai chưa hiểu cứ bảo dạy toán, học toán khô khan. Dạy trẻ lớp 1 mà làm cho chúng cảm thấy khô khan thì thật là nguy hiểm. Tôi thử thổi hồn vào bài toán lớp 1 trang 42 ở sách giáo khoa các bạn thử xem nhé.

Bài 1. Số?



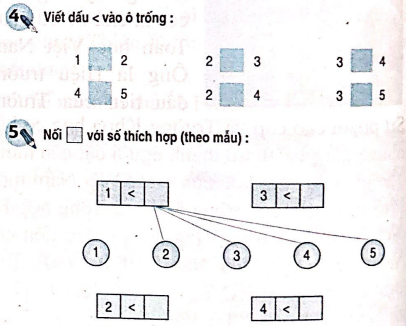
– GV chuẩn bị các số từ 0 đến 10 bằng bìa, chọn 11 HS rồi xếp các em từ thấp đến cao, phát số cho các em ngồi tại chỗ.

– GV gọi HS mang số 3 và số 6 lên đứng cách nhau, sau đó gọi các em mang các số còn lại đứng vào vị trí theo thứ tự.

… … … 3. … … 6. … … … …

HS đứng vào hàng xong ta được dãy số tăng dần như xếp hàng từ thấp đến cao. Xếp theo thứ tự giảm dần thì ngược lại. Trong tình huống khác, GV có thể linh hoạt không cần đủ 10 số, sau này ở kỳ 2, cũng có thể tăng số các số lên, các số có thể không liên tiếp nhau. Chẳng hạn, cho các cháu mang số 11, 9, 8, 17 xếp hàng.

Bài 2. Điền <, >, =



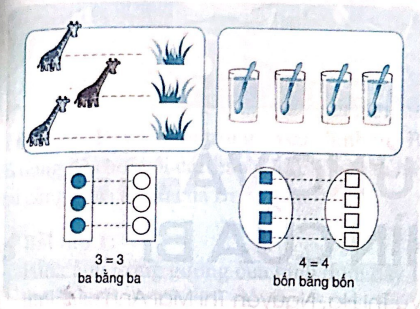
HS làm xong bài trong sách giáo khoa rất nhanh, ta có thể thay 4 < 5 bằng … < 5, cho tìm các số bên trái thì tìm được 0, 1, 2, 3 nữa chứ không chỉ có số 4.

[1] *Giáo viên về hưu, Hà Nội.*

Ta thay 7 > 5 bằng ...> 5 hoặc 7 > ...

Cho tìm các số vào chỗ ... tương tự như trên.

BẰNG NHAU. DẤU =



Dòng 4 = 4: ta cho HS tìm các bộ phận trên cơ thể mình có những số bằng nhau như mắt, ngón tay... thế là học sinh thấy toán vẫn gắn thực tế thôi.

Bài 3. Viết các số 8, 5, 2, 9, 6

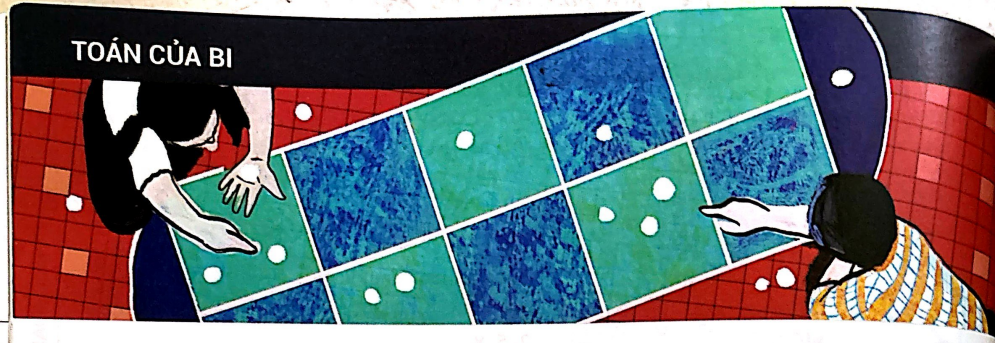
Ta cho HS chơi sắp xếp số trước (như bài 1) rồi chơi trò "Ai ở đâu" như sau: Chọn một học sinh viết các số lên bảng, hô to các số mình vừa viết rồi các bạn (cầm miếng bài ghi số) phải nhanh chóng xếp vào vị trí đúng như bạn vừa viết lên bảng.

Lấy ví dụ:

Bạn viết lên bảng: 9, 6, 2, 5, 8

Thì các bạn mang số xếp hàng theo thứ tự 9, 6, 2, 5, 8.

Lời khuyên: Các bạn GV (cha mẹ) có thể linh hoạt sử dụng các trò chơi này. Không phải bài nào cũng làm; có thể chọn một/ hai bài tuỳ không khí học và sự hứng thú của HS, thời gian tiết học,... để tối ưu, tuỳ theo hoàn cảnh mà vận dụng. Đây chỉ là cách nghĩ của nhà giáo ngoài 60 tuổi nghỉ đã lâu nhưng vẫn muốn giáo dục ít nhiều đổi mới tích cực: Học sinh chăm ngoan, thích học, giáo viên chuyên tâm với nghề và được xã hội quan tâm đời sống vật chất và tinh thần, yên tâm trồng người thành công dân tốt cho xã hội.



TÍNH ĐỐI XỨNG VÀ CÁC GÓC NHÌN CỦA BI

Đào Thị Thu Hà, Phạm Thị Hương, Vũ Thị Hà, Nguyễn Thị Mai Anh

Trẻ em luôn bị thu hút bởi những chiếc gương. Lần đầu tiên nhìn thấy mình trong gương, không biết các em nhỏ có biết đó chính là mình hay không nhỉ? Các em có để ý thấy khi một vật nhìn qua gương (hay chiếu trên mặt nước), hay khi được quan sát từ những góc khác nhau, thường tạo ra những hình ảnh thú vị khác nhau hay không? Những hình ảnh này đều thay đổi theo một quy luật cả đấy.

Có những vật, khi nhìn qua gương, em vẫn thấy nó không thay đổi. Có khá nhiều vật "cân đối" như vậy đó. Vật như thế được gọi là "vật đối xứng". Hãy cùng Bi bước vào thế giới "kính vạn hoa" nhé.

Ở sảnh trường Bi, có những chiếc gương rất to. Các lớp đều rất hay đùa nghịch ở sảnh. Nhiều lần, các bạn còn đứng làm trò rất lâu trước gương nữa. Hôm nay, Ly có một cái nơ mới nên rất hào hứng khoe với cả lớp. Nơ rất đẹp, ai cũng khen. Ly rất vui, thỉnh thoảng, theo thói quen, đi lại qua sảnh và lén nhìn mình qua gương.

Bi thấy vậy cười tủm tỉm, các bạn có biết Bi đã làm gì không? Bi ngồi vẽ hình Ly, và đố cả lớp: hình nào bên dưới sẽ là hình ảnh nhìn thấy khi Ly đứng trước gương. Bi là cậu bé tinh nghịch, nên nói với Ly tạm thời đừng đứng trước gương, để cả lớp phải tưởng tượng tìm đáp án đúng.

Thế mà có nhiều bạn đoán đúng lắm, còn em thì sao?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

Ở đây, hình A chính là hình các bạn sẽ nhìn thấy trong gương nếu Ly đứng soi đấy.

Em có thể tự kiểm tra lại bằng cách thử để ảnh Ly trước gương xem thế nào nhé. Thường thì hình ảnh trong gương sẽ không giống với hình ảnh các em thấy ở bên ngoài đâu, có thể hình dung là nó hơi "ngược" một chút đó.

Bi rất thích thú với trò chơi này. Mấy ngày liền Bi đưa ra các hình khác nhau để các bạn khác cùng đoán. Đây là một trong số các hình mà Bi đã dùng để chơi với các bạn ở lớp. Các bạn hãy thử cùng giải câu đố của Bi xem nào.

Bài tập 1:

Hình ảnh trong gương của hình dưới đây là hình nào?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

Bài tập 2:

Hình ảnh trong gương của hình dưới đây là hình nào?

(A) (B)

(C) (D)

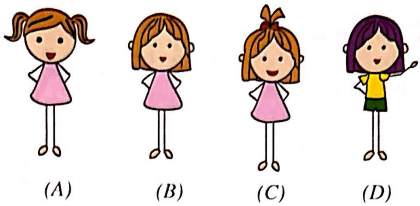
(E) Không đáp án nào đúng

Sau một thời gian, cả lớp đã không còn hứng thú với trò tìm hình ảnh qua gương nữa. Một ngày đẹp trời, khi Bi đang ngồi chơi ngoài sân trường, nhìn thấy My đi qua. My đang chắp tay sau lưng, nhún nhảy và khẽ hát.

Bi bỗng chợt cười phá lên, nhớ đến truyện Doraemon mới đọc mấy hôm trước, nghĩ tới món bảo bối chỉ cần chụp từ đằng sau, ảnh sẽ cho biết đằng trước là hình gì.

Bài tập 3:

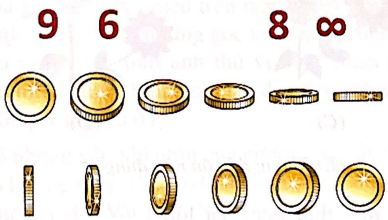
Bi vẽ 4 bức tranh và đố các bạn, đâu là hình ảnh của My nhìn từ đằng trước.



(E) Không thể xác định

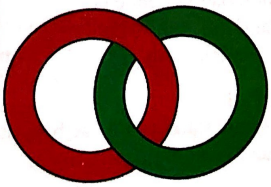
Em có đoán được không? Em hãy thử quan sát và tìm câu trả lời cho mình nhé.

Các em có thấy không, từ các góc nhìn khác nhau, khi nhìn một vật sẽ thấy những điều mới. Số 9 quen thuộc khi viết trên giấy, nếu xoay ngược lại, nó biến thành số 6. Với số 8, nếu xoay ngang ra, nó trở thành một ký hiệu rất kỳ quái ∞. Sau này, các em sẽ còn gặp ký hiệu này nhiều đấy. Đồng xu bố mang về cho bạn Bi, khi bạn Bi quay nó, lúc Bi thấy nó hình tròn, lúc thì chỉ nhìn thấy một phần cong cong. Các em hãy cùng xem Bi có những khám phá gì với các góc nhìn khác nhau nhé.

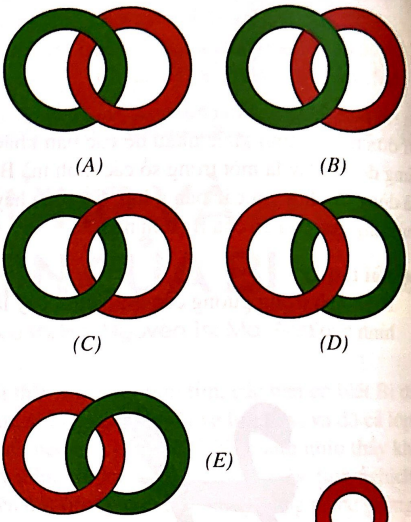


Một cuối tuần, chị Nhi đến chơi với Bi. Chị Nhi có rất nhiều giấy màu, chị Nhi rủ Bi ngồi dán những vòng giấy lại với nhau. Sau đó, mỗi người sẽ ngồi ở những vị trí khác nhau để quan sát các hình đó. Em cũng có thể làm được đấy, chỉ cần giấy, bút màu, kéo, với hồ dán thôi.

Bài tập 4:
Hình dưới là hình ảnh Bi nhìn được khi đứng phía trước 2 chiếc vòng.

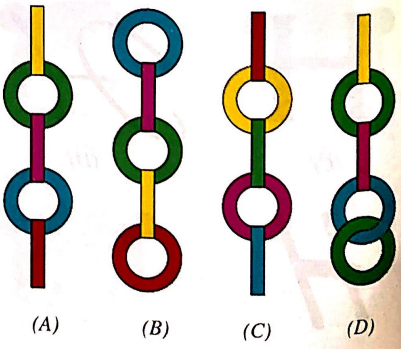


Chị Nhi đứng phía sau 2 chiếc vòng. Hỏi trong số các hình dưới đây, đâu là hình chị Nhi nhìn thấy?



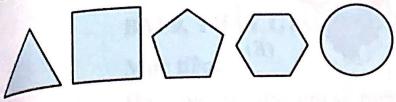
Bi thử với nhiều hình khác nữa, và hình dưới là một trong các hình Bi đã cầm đến lớp để chơi với các bạn.

Bài tập 5:
Hỏi hình nào dưới đây là hình ảnh thu được của hình trên khi nhìn từ bên trái?



(E) Không hình vẽ nào phù hợp

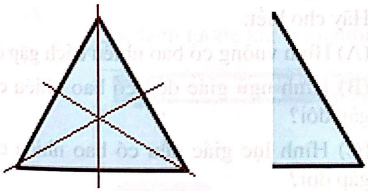
Trong hộp bút mới của Ly có hình tam giác đều, hình vuông, hình ngũ giác đều,... như dưới đây. Bi thấy các hình này hay hay.



Về nhà, Bi lấy giấy với kéo ra, vẽ và cắt lại các hình đó. Các bạn có biết Bi đã làm gì không? Bi thử gập các hình lại, ô kìa, chúng trùng khít lên nhau đó.

Các em có nhận ra hình nào là một nửa gập lại của hình nào không? Hãy cùng thử lấy giấy, kéo ra làm và gập xem thế nào nhé.

Bi nhận thấy là, có hình có 3 cách gập, có hình có 4 cách gập, còn có hình Bi thấy đếm mãi cũng không ra hết cách gập nữa cơ. Hình tam giác đều có 3 cách gập. Gấp theo cách nào cũng tạo thành hình tam giác như nhau. Các em hãy gập theo đường gập màu đỏ nhé.



Hôm sau, Bi đến lớp và khoe với các bạn mình về phát hiện thú vị của mình. Cô giáo đến nơi, xoa đầu, khen Bi rất nhiều. Cô bảo đó là "tính đối xứng" đó. Cô biết Bi là "trùm gương", nên hỏi Bi đã quan sát các hình này trước gương chưa? Cả lớp cùng đi ra gương ở trước sảnh và soi thử các hình vào gương. Ô kìa, hình ảnh trong gương của các hình này đều giống với chúng cả.

Cô giáo nói với các bạn, nếu một vật khi soi trước gương, nhìn cũng giống như nó, thì vật đó "đối xứng" đó.

Bài tập 6:

Các hình dưới đây, hình nào không thay đổi khi nhìn qua gương?

(A)

(B)

(C)

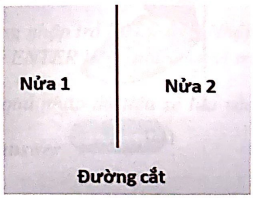
(D)

(E)

Tuy nhiên, sau đó, cô có hỏi một câu khác, phải rất lâu sau cả lớp mới nghĩ ra được đấy.

Mảnh giấy màu các hình Bi có chỉ có 1 mặt là màu xanh, còn 1 mặt màu trắng. Cô lấy hình tam giác đều của Bi, cô nói Bi hãy cắt đôi hình tam giác đều này ra theo đường nếp gấp chia đôi đó. Cô hỏi cả lớp hãy suy nghĩ xem 2 miếng cắt có giống nhau không. Bi thấy rõ là mình gập nó trùng nhau rồi. Nhưng quan sát lại thì hai nửa không hề giống nhau, nó hơi "ngược" nhau về màu sắc. Đường màu đỏ là đường nếp gấp đôi, sau đó được cắt ra.

Hai hình bên trái là phía trước và phía sau của một nửa, hai hình bên phải cũng là phía trước và phía sau của nửa còn lại.

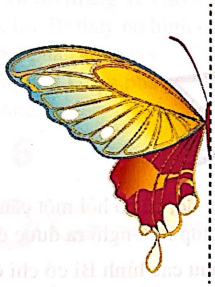


Nếu đem 1 miếng cắt ra trước gương thì sẽ giống hệt miếng cắt còn lại. Bi nói phát hiện này với cô, cô lại xoa đầu Bi. Đúng rồi đó, Bi có thể hình dung như thế đấy.

Nếu bạn có thể "cắt đôi" 1 vật, mà khi đem một nửa vật đó để trước gương, bạn thấy phần trong gương chính là nửa kia (ví dụ nửa 1 để trước gương bạn thấy nửa 2, hoặc ngược lại) thì người ta nói vật đó có trục đối xứng. Và đường cắt được gọi là "trục đối xứng" của vật.

Bài tập 7:

Hình bên dưới là một nửa nhìn thấy của chú bướm Butt. Butt có trục đối xứng là đường kẻ đứt.

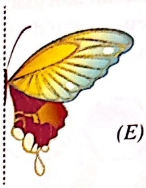


(A)

(B)

(C)

(D)



(E)

Hình tam giác đều có 3 cách gập đôi, hay tam giác đều có 3 trục đối xứng. Ta thấy sau mỗi lần gập đôi, hình tam giác nhận được đều như nhau. Tuy nhiên, với các hình còn lại trong các hình Bi đã vẽ thì sao?

Bài tập 8:

Trong các hình vuông, ngũ giác đều, lục giác đều, hình tròn, hình nào khi gập đôi theo các trục đối xứng tạo ra một loại hình? Hình nào khi gập đôi theo các trục đối xứng tạo ra hai loại hình? Có hình nào khi gập đôi theo các trục đối xứng tạo ra nhiều hơn hai loại hình không?

Bây giờ, chúng mình cùng thử đi đếm số trục đối xứng của các hình còn lại nhé.

Bài tập 9:

Hãy cho biết:

(A) Hình vuông có bao nhiêu cách gập đôi?

(B) Hình ngũ giác đều có bao nhiêu cách gập đôi?

(C) Hình lục giác đều có bao nhiêu cách gập đôi?

(D) Có nhận xét gì về hình tròn?

Các em hãy thử tìm hiểu hình tròn, xem có gì đặc biệt hơn các hình khác không nhé. Hình tròn là hình rất đặc biệt đấy.

Các em có thể tìm những vật dụng quanh mình, quan sát những người quanh mình, để xem khi đứng ở các vị trí khác nhau, hình ảnh nhìn được sẽ thay đổi như thế nào. Em cũng thử tìm xem ở quanh em có những vật gì đối xứng, và chúng có bao nhiêu trục đối xứng nhé.

HỌC LẬP TRÌNH SCRATCH

BÀI 9. THẦY GIÁO VÀ EM

Mục tiêu:

Học xong bài này em sẽ biết:

– Làm thế nào để nhân vật nói chuyện tương tác với người sử dụng.

– Biết cách sử dụng lệnh ask and wait (hỏi và chờ).

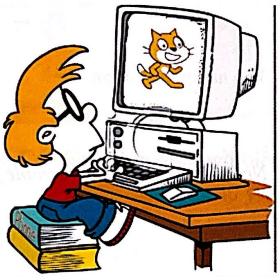
– Khái niệm và ý nghĩa của biến nhớ.

Nội dung bài học

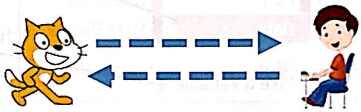
1. Nhân vật tương tác với người sử dụng như thế nào?

Chúng ta đã được biết nhân vật có thể nói bằng lệnh say và phát âm bằng lệnh play sound. Nhưng những hội thoại này chỉ là 1 chiều. Chúng ta cùng tìm hiểu thế nào là tương tác thực sự với người sử dụng.

Tương tác máy tính ←→ người dùng thông qua bàn phím, chuột,...

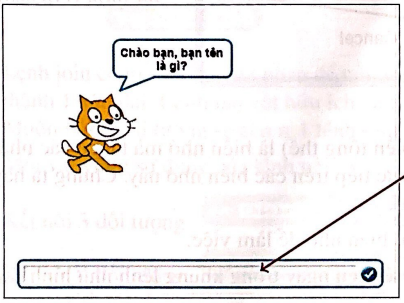


Máy tính, nhân vật có thể tương tác, nói chuyện với người dùng máy tính.



Các lệnh tương tác với người dùng trong Scratch được mô tả trong bảng sau:

ask What's your name? and wait	Nhân vật sẽ đưa ra câu hỏi với nội dung sau từ ask và chờ người dùng nhập trả lời trực tiếp từ bàn phím.
answer	Giá trị (biến nhớ) hệ thống này sẽ lưu kết quả trả lời của người dùng trong lệnh trên.

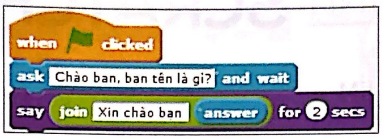


Kết quả thực hiện lệnh:

ask Chào bạn, bạn tên là gì? and wait

Người dùng nhập trả lời tại đây. Nhập xong bấm ENTER hoặc nháy tại vị trí ✓. Kết quả nhập dữ liệu sẽ lưu vào biến nhớ ***answer*** answer.

Ví dụ 1 đoạn chương trình ngắn hội thoại giữa nhân vật và người sử dụng như sau:



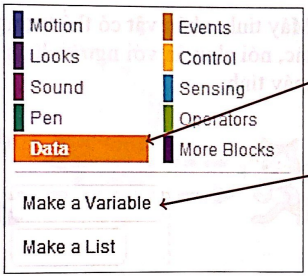
Nhân vật: Chào bạn, bạn tên là gì? Người dùng (gõ bàn phím): Bình. Nhân vật: Xin chào bạn Bình.

2. Biến nhớ là gì?

Trong ví dụ trên, giá trị answer luôn được dùng để lưu trữ thông tin do người dùng nhập từ bàn phím. Người ta gọi answer là một biến nhớ. Đây là biến nhớ hệ thống, biến nhớ có sẵn của Scratch.

Người dùng có thể tự tạo ra các **biến nhớ** riêng của mình. Biến nhớ là 1 tên riêng dùng để lưu trữ dữ liệu (số hoặc chữ) trong bộ nhớ. Biến nhớ là một công cụ hỗ trợ lập trình rất tốt. Em sẽ còn được tìm hiểu và khám phá sức mạnh của biến nhớ trong bài học này và tất cả các bài học tiếp theo.

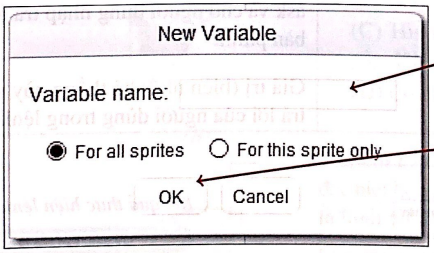
Thao tác tạo mới 1 biến nhớ:



*1. Vào nhóm lệnh **Data**.*

*2. Nháy lên nút **Make a Variable**.*

Hộp hội thoại tạo mới một biến nhớ có dạng như hình sau:



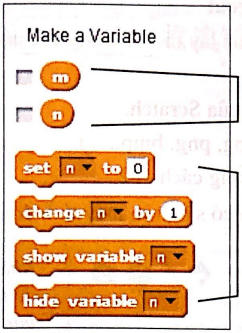
3. Nhập tên biến nhớ muốn khởi tạo tại đây.

4. Lựa chọn kiểu (biến chung = for all sprites) và nháy OK.

Biến dùng chung (hay biến tổng thể) là biến nhớ mà tất cả các nhân vật đều nhìn thấy và có thể thao tác trực tiếp trên các biến nhớ này. Chúng ta hãy làm quen với các biến nhớ chung trước.

Có thể tạo một hay nhiều biến nhớ để làm việc.

Danh sách các biến nhớ sẽ hiện ngay trong khung lệnh như hình sau.

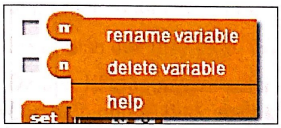


Danh sách các biến nhớ hiện ở đây.

Các lệnh làm việc với biến nhớ hiện ở đây.

Nháy vào ô vuông nhỏ bên phải biến nhớ sẽ làm cho biến nhớ này hiển thị hoặc không hiển thị trên màn hình. Đa số các biến nhớ không cần hiển thị, trừ ra các biến nhớ đặc biệt, ví dụ như biến nhớ lưu điểm số, thời gian chơi, lượt chơi,...

Nháy chuột phải lên 1 biến nhớ sẽ xuất hiện các lệnh bổ sung.



rename variable: *thay đổi tên biến nhớ.*

delete variable: *xóa biến nhớ khỏi danh sách.*

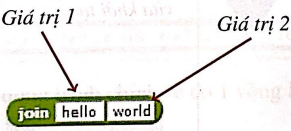
3. Các lệnh đơn giản với biến nhớ

Chúng ta đặc biệt cần chú ý và nhớ 2 lệnh quan trọng sau với biến nhớ.

set n to 0	Lệnh thiết lập, gán 1 giá trị cụ thể cho biến nhớ.
change n by 1	Lệnh thay đổi giá trị của biến nhớ (tăng lên hoặc giảm đi) theo 1 giá trị cụ thể.

4. Lệnh join ghép nối chữ, số và biến nhớ

Lệnh **join** từ nhóm lệnh Operators dùng để nối 2 giá trị (số hoặc chữ) bất kỳ.



Lệnh join có thể kết nối với nhau để nối nhiều đối tượng như biến nhớ, chữ hoặc số thành 1 xâu dài. Lệnh này rất hữu ích và thường xuyên được sử dụng trên thực tế. Muốn nối n đối tượng sẽ cần n-1 lệnh join kết nối với nhau.

Một vài ví dụ sử dụng của lệnh này:

Kết nối 3 đối tượng. 

Kết nối 4 đối tượng. 

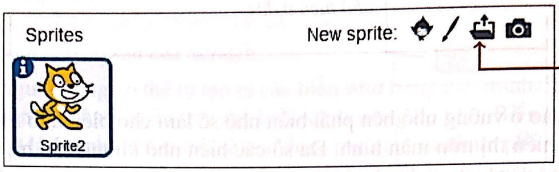
5. Bổ sung nhân vật từ tệp hình ảnh ngoài

Các hình ảnh nhân vật trong Scratch có thể lấy theo 1 trong các cách sau:

1. Từ kho ảnh có sẵn của phần mềm.
2. Khởi tạo, vẽ trực tiếp bằng công cụ vẽ của Scratch.
3. Lấy từ 1 tệp ảnh bên ngoài (tệp dạng jpg, png, bmp,...).

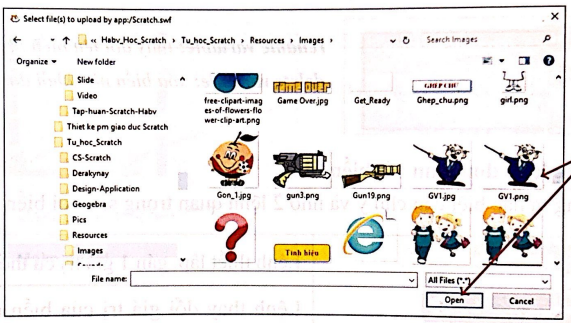
Chúng ta đã biết cách tạo nhân vật mới bằng cách 1, 2.

Cách thứ 3, tạo nhân vật mới từ 1 tệp ảnh có sẵn trên máy tính đơn giản như sau:



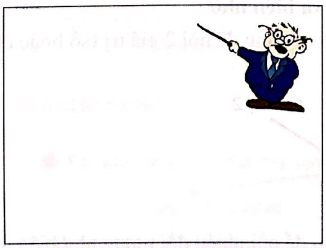
Nháy biểu tượng này để tạo nhân vật mới bằng cách chọn tệp ảnh trên máy tính.

Trong cửa sổ mở tệp tìm tệp ảnh muốn làm nhân vật.



Ví dụ em chọn hình ảnh này và nháy nút Open.

Kết quả một nhân vật mới được khởi tạo với hình ảnh vừa chọn.



Nhân vật mới vừa khởi tạo.

6. Thầy giáo và em

Bây giờ chúng ta sẽ thiết kế chương trình chính của bài học hôm nay: thầy giáo và em.

Chương trình sẽ có 1 nhân vật duy nhất là hình ảnh thầy giáo của em được lấy từ bên ngoài đưa vào Scratch.

Thay giao va em.sb2

Giáo viên liên tục đưa ra 10 câu hỏi - bài toán để em trả lời bằng cách nhập đáp số từ bàn phím.

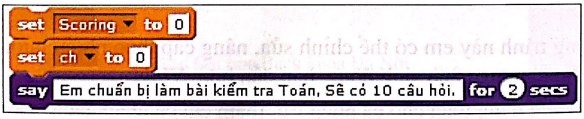
Chương trình sẽ là một bài kiểm tra Toán của thầy giáo (nhân vật chính) với em (người sử dụng). Thầy sẽ liên tục đưa ra 10 bài toán và yêu cầu em trả lời. Trả lời đúng được 1 điểm, trả lời sai được 0 điểm. Sau khi làm xong bài kiểm tra, thầy giáo sẽ thông báo điểm của em.

Dạng toán của thầy giáo, ví dụ, chỉ đơn giản là tính tổng của 2 số tự nhiên.

Để làm bài tập này, em cần thiết kế 1 số biến nhớ hỗ trợ giải quyết bài toán này. Các biến nhớ sẽ được thiết kế trong chương trình:

m, n	Các biến nhớ này lưu trữ 2 số m, n là đối tượng chính để sinh bài toán.
ch	Số thứ tự câu hỏi.
Scoring	Điểm số của người chơi.

– Phần thiết lập các thông số ban đầu của chương trình bao gồm đặt các biến nhớ ch = 0, Scoring = 0 và Giáo viên thông báo chuẩn bị bài kiểm tra.



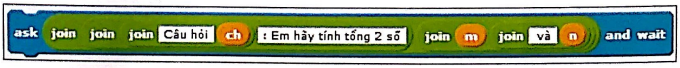
– Phần chương trình chính sẽ có 1 vòng lặp 10 lần, mỗi vòng lặp sẽ thực hiện các công việc sau:

Tăng giá trị ch lên 1 đơn vị.

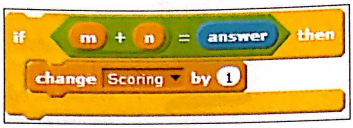
Sinh ngẫu nhiên các giá trị m, n.

Giáo viên thông báo nội dung bài toán chi tiết cho học sinh giải. Ví dụ 1 thông báo sẽ như sau:

Câu hỏi 4: Em hãy tính tổng 2 số 12 và 3.



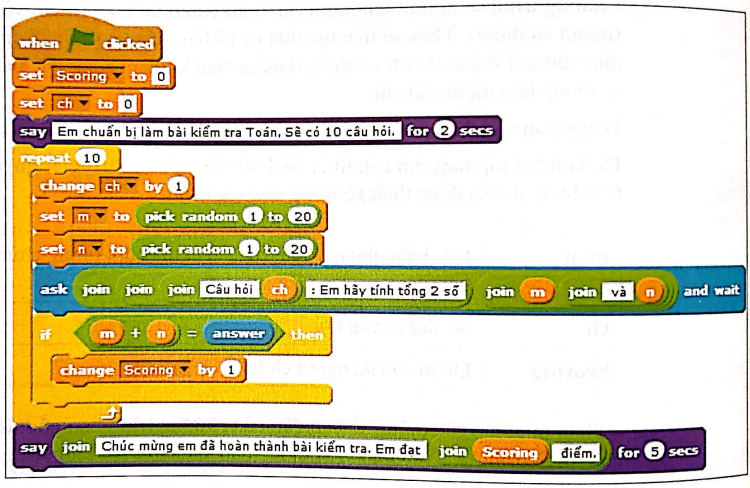
Sau khi người dùng nhập đáp án, chương trình sẽ kiểm tra xem có đúng không, nếu đúng thì tăng điểm cho học sinh. Đoạn chương trình xử lý này như sau:



Khi đã làm xong, giáo viên chỉ còn 1 việc là thông báo kết thúc và thông báo điểm số của học sinh.

Toàn bộ chương trình như sau.

Một phương án của chương trình.



Chương trình này em có thể chỉnh sửa, nâng cấp theo nhiều hướng khác nhau để làm cho chương trình sinh động, hấp dẫn hơn. Ví dụ:

– Mở rộng dạng toán cho cả phép trừ, thậm chí cả nhân, chia.

– Các câu hỏi sẽ được sinh theo thứ tự khó dần, hoặc 5 câu đầu dễ, 5 câu sau khó hơn.

– Khi thông báo cuối giờ, giáo viên có thể đưa thêm nhận xét, ví dụ với < 5 điểm thì "em cần cố gắng", nếu > 8 điểm thì "em làm bài rất tốt".

– Có thể bổ sung thêm tham số thời gian, hiện ngay trên màn hình để tính thời gian làm bài của học sinh.

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái **(Tổng Biên tập)**
Ngô Bảo Châu **(Phó Tổng Biên tập)**
Trần Nam Dũng **(Phó Tổng Biên tập)**
Nguyễn Thị Lê Hương **(Phó Tổng Biên tập kiêm Thư ký Tòa soạn)**
Nguyễn Khắc Minh **(Phó Tổng biên tập kiêm Trưởng ban Biên tập)**

Phạm Huy Điển, Nguyễn Thành Nam,
Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Thái Sơn, Chu Cẩm Thơ,
Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn, Nguyễn Ái Việt, Lê Anh Vinh.

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYÊN

Hạ Vũ Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Ngọc Điệp, Nguyễn Minh Hà,
Lưu Thị Thanh Hà, Đào Thị Thu Hà, Trần Minh Hiền, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Hà Duy Hưng, Đậu Hoàng Hưng, Vũ Thế Khôi,
Nguyễn Cẩm Lệ, Nguyễn Duy Liên, Phạm Vũ Lộc, Trần Quốc Luật,
Kiều Đình Minh, Nguyễn Thị Nhung, Đặng Văn Sơn, Đỗ Hoàng Sơn,
Lưu Bá Thắng, Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thu.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. **Email giao dịch:** *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: (024) 3215.1407 Fax: (024) 3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Lê Quốc Tuấn
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: David Hilbert *Nguồn ảnh: Internet*

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 25.000 đồng

TJOURNAL

TH

TH SCHOOL MILK
XÁC NHẬN HIỆU QUẢ
NGHIÊN CỨU LÂM SÀNG

Tập đoàn TH tiên phong đồng hành cùng chương trình
Sữa Học Đường Quốc Gia

Thật sự thiên nhiên

Hoàn toàn từ sữa tươi sạch nguyên chất của trang trại TH
- Xác Lập Kỉ Lục Lớn Nhất Châu Á

Website: **www.thmilk.vn** | Hotline: **1800 54 54 40**

facebook.com/pijournal

8 938514 372158 00318

Giá: 25.000 đồng
www.pi.edu.vn