TẠP CHÍ PI

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 2 - SỐ 2 THÁNG 2 . 2018

Số hoàn hảo

dự đoán, sai lầm và kỷ lục

BÀI TOÁN "LÁT GẠCH"

đã có lời giải sau 99 năm

ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY

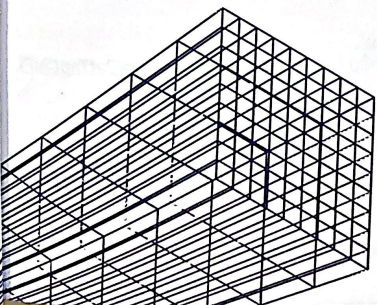
TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

TOÁN HỌC TỪ CỔ ĐIỂN ĐẾN HIỆN ĐẠI

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

LỊCH SỬ TOÁN HỌC



BÁO VỀ TRƯỜNG CŨ

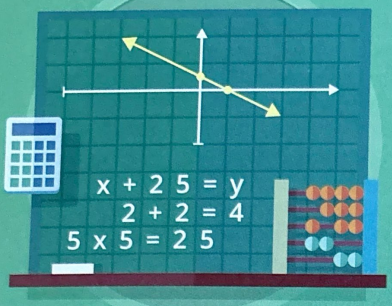
Tạp chí Pi rất vui mừng và biết ơn nhiều tổ chức, cá nhân đã gửi tạp chí đến các em học sinh và thầy cô giáo ở vùng sâu, vùng xa, gửi về trường học cũ của mình:

- **Quỹ Lê Văn Thiêm** mua 140 cuốn/kỳ làm phần thưởng cho học sinh giỏi toán.
- **Bà Hoàng Ly** mua 5 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Nguyễn Thượng Hiền, Quận Tân Bình, TP. HCM; 5 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Lê Quý Đôn, Quận 3, TP. HCM; 5 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Ngô Sĩ Liên, Quận Tân Bình, TP. HCM.
- **Bà Chu Cẩm Thơ** mua 5 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức, Hà Nội.
- **Bà Trần Lưu Vân Hiền** mua 3 cuốn/kỳ tặng trường THPT Nguyễn Tri Phương, Phú Vang, Thừa Thiên Huế; 3 cuốn/kỳ tặng Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.
- **Ông Cao Kim Ánh** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Cao Xá. Lâm Thao, Phú Thọ và 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Long Châu Sa, Lâm Thao, Phú Thọ.
- **Ông Nguyễn Quốc Khánh** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Nguyễn Khuyến, Duy Xuyên, Quảng Nam và 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Lê Hồng Phong, Duy Hoà, Duy Xuyên, Quảng Nam.
- **Bà Lê Thị Như Bích** mua 2 cuốn/kỳ tặng khoa toán Trường Đại học Sư Phạm Huế.
- **Ông Ngô Huy Cẩn** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Lê Lợi, TP Tam Điệp, Ninh Bình.
- **Bà Đinh Thị Thu Cúc** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Diễn Thái, Diễn Châu, Nghệ An.
- **Ông Nguyễn Ngọc Khôi** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội.
- **Ông Nguyễn Hùng Khương** phó Hiệu trưởng Trường THPT Bùi Thị Xuân, TP. HCM mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Thống Nhất A, Trảng Bom, Đồng Nai.
- **Ông Nguyễn Trương Hoàng Nhật** mua 1 cuốn/kỳ tặng Tổ toán Trường THPT Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên Huế.
- **Ông Lê Lương Tài** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS xã An Ninh, Bình Lục, Hà Nam.

Chúng tôi biết rằng còn có nhiều bạn đọc cũng làm như vậy, nhưng Toà soạn không có được thông tin. Mong các bạn tiếp tục cung cấp thông tin để giúp Toà soạn hiểu rõ hơn về mức độ phổ cập của Tạp chí.

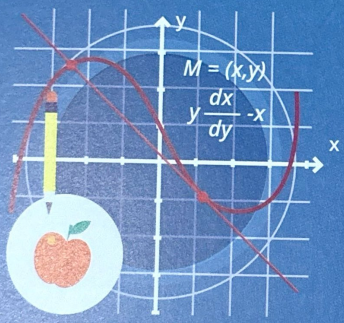
Nghĩa cử của các bạn đã giúp Pi đến gần hơn với các bạn học sinh và thầy, cô giáo.

Tạp chí Pi hy vọng phong trào BÁO VỀ TRƯỜNG CŨ ngày càng được hưởng ứng rộng rãi!



THỂ LỆ GỬI BÀI:

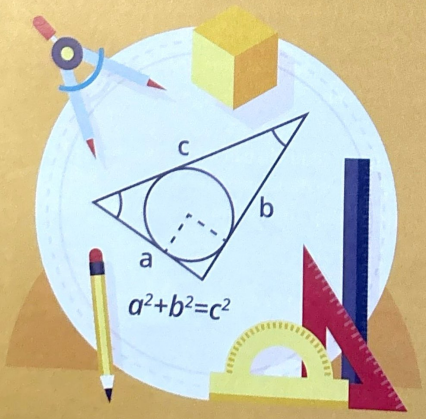
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán đề xuất, bài viết cần g rõ họ tên tác giả, nơi học tập/công tác, email và số điện thoạ để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về kh lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf. Chủ đề (subject) của email: Lời giải củ bài nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì/hoặc không theo chuyên mục nào.
- Bản thảo có thể viết tay gửi qua bưu điện đến Tòa soạn.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: ***bbt@pi.edu.vn***
- Qua bưu điện:

Tòa soạn Tạp chí Pi
P705 - B8, tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Số 1 Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.



THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại bưu điện gần nhất:** Mã của Tạp chí Pi là C057. (có thể đặt các số đã ra).

  Bạn đọc gặp vướng mắc trong đặt và nhận báo qua bưu điệ xin gọi đường dây nóng 1900 545481 để được hỗ trợ.
- **Đặt tại website *www.pi.edu.vn*:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:**
  - Điền vào biểu mẫu tại đường dẫn ***http://gg.gg/DatTapChiP***
  - Hoặc gửi email đến địa chỉ ***info@pi.edu.vn*** nêu nhu cầu đặ báo, chi tiết người nhận báo (họ và tên, địa chỉ, điện thoại).

  Chuyển tiền đặt báo vào Tài khoản Tạp chí Pi số: 0851000012293, Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành (trong nội dung chuyển tiền ghi rõ họ tên_điện thoại người chuyển tiền).
- **Đặt mua bản điện tử tại *Alezaa.com*.**

Chúc Mừng Năm Mới

Khi Bạn cầm trên tay cuốn Pi, Tập 2, Số 2 (2.2018)
thì Mùa Xuân đang đến rất gần.

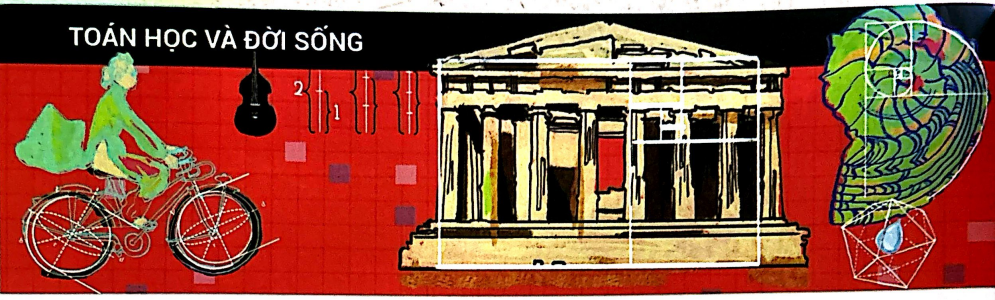
Đây là Mùa Xuân thứ 2 mà Pi được đón cùng Bạn.

Pi chúc Bạn và những người thân Năm Mới Mậu Tuất

KHỎE MẠNH, HẠNH PHÚC, THÀNH CÔNG!

Hy vọng trong năm mới, Bạn sẽ tiếp tục gắn bó với Pi. Đặc biệt, Pi mong Bạn góp mặt trong Câu lạc bộ **"Một trăm Pi ngòi bút 2019"**, để Pi ngày càng thân thiết hơn với bạn đọc gần xa, để Pi ngày càng trở nên "siêu việt" hơn!

TẠP CHÍ PI



FRACTAL MIỀN GIAO THOA CỦA TOÁN HỌC, NGHỆ THUẬT VÀ QUY LUẬT TỰ NHIÊN

- Phạm Huy Điển -

Phần I. Khái niệm Fractal

(tiếp theo kỳ trước)

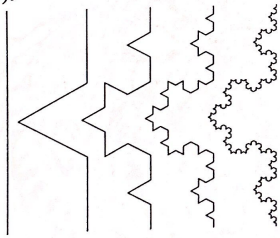
4. Các quá trình lặp với các hình hình học đơn giản

Bông tuyết Koch

Một trong những hình dạng fractal đơn giản là bông tuyết von Koch. Phương pháp để tạo ra hình này là liên tục thay thế mỗi đoạn thẳng bằng mẫu lặp gồm 4 đoạn gấp khúc như sau.

Hình 14. Mẫu lặp.

Quá trình này bắt đầu với chỉ một đoạn thẳng và nếu tiếp tục mãi mãi thì sẽ mang lại một hình trong họ hàng nhà fractal. Vài bước lặp đầu tiên của quá trình này được trình bày dưới đây (xem Hình 15).



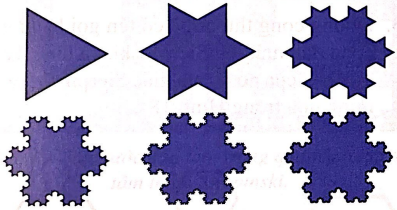
Hình 15. Bốn bước đầu tiên của quá trình lặp.

Chỉ sau 4 bước lặp ta đã thấy được một quy tắc sinh rất đơn giản cho mẫu lặp này có thể tạo ra một số đặc tính khác thường như thế nào. Không giống như các hình dạng Euclid thông thường, đối tượng này có chi tiết ở tất cả các cấp độ. Nếu phóng đại một hình dạng Euclid như là một khúc chu vi của một vòng tròn thì nó trở thành một hình dạng khác, cụ thể là một đường thẳng. Còn nếu chúng ta phóng to fractal này thì nhiều chi tiết hơn được khám phá, chi tiết là sự tự đồng dạng, hoặc đúng hơn là nó giống hệt nhau. Nói một cách khác, bất kỳ phần nào được phóng đại cũng giống hệt với mọi phần được phóng đại khác. Khác với tập Mandelbrot, tính tự đồng dạng ở đây là hoàn toàn chính xác.

Cũng lưu ý rằng "đường cong" ở phía bên phải của hình không phải là một fractal mà chỉ là một xấp xỉ của nó. Điều này không khác gì khi một người vẽ một vòng tròn thì kết quả cho ra cũng chỉ là một xấp xỉ của một vòng tròn hoàn hảo. Tại mỗi lần lặp, độ dài của "đường cong" tăng theo một hệ số 4/3. Do đó, đường cong giới hạn có chiều dài là vô hạn, và thực ra chiều dài giữa hai điểm của đường cong là vô hạn. Đường cong này có thể nén một chiều dài vô hạn vào một khu vực hữu hạn của mặt phẳng, mà không tự cắt với chính nó (Một điều không thể tin nổi

với các hình dạng Euclid thông thường). Với các đường cong Euclid 1 chiều thì để xác định một điểm trên đó người ta chỉ cần tới một tham số (chẳng hạn như số đo độ dài của khúc đường cong đi từ một điểm gốc nào đó, ấn định trước) tới điểm cần xác định. Nhưng với đường cong này thì không thể làm như vậy (vì độ dài đó luôn là vô cùng), và đây là điểm khác biệt sâu sắc nhất của nó với các đường cong thông thường trong hình học Euclid! Mặc dù phương pháp tạo đường cong này là đơn giản, nhưng không có công thức đại số nào mô tả các điểm trên đường cong.

Để tạo ra "bông tuyết" Koch (Koch Snowflake), chúng ta cần bắt đầu bằng một hình tam giác đều với các cạnh có chiều dài, ví dụ là 1. Với mỗi cạnh, chúng ta áp dụng phép lặp nêu trên và sau 6 bước ta thu được các hình dạng sau



Hình 16. Sáu bước đầu tiên của quá trình tạo bông tuyết Koch.

Lặp lại quá trình này cho một số lượng vô hạn vòng lặp ta được fractal hình "bông tuyết" của Koch.

Chu vi của bông tuyết Koch

Sau mỗi bước lặp thì số cạnh của bông tuyết tăng gấp 4 lần, còn độ dài mỗi cạnh thì nhỏ đi 3 lần. Cho nên, sau n bước lặp thì chu vi của "bông tuyết" tạo thành sẽ là:

$$P_n = 3s\left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

trong đó s là độ dài cạnh của tam giác đều ban đầu.

Điều này cho thấy bông tuyết Koch có chiều dài (chu vi) là vô cùng vì $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$.

Diện tích của bông tuyết Koch

Vì mỗi bước lặp cộng thêm một tam giác nhỏ lên mỗi cạnh tạo ra trong bước lặp trước, cho nên số lượng các tam giác nhỏ được cộng thêm trong bước thứ n là

$$T_n = 3\cdot 4^{n-1}.$$

Diện tích mỗi tam giác nhỏ thêm vào ở mỗi bước đúng bằng 1/9 diện tích của tam giác thêm vào ở bước trước đó, nên $a_n = S_0/9^n$, trong đó S_0 là diện tích tam giác ban đầu. Như vậy tổng diện tích được thêm vào trong bước thứ n là

$$b_n = T_n\cdot a_n = 3\cdot 4^{n-1}\cdot S_0/9^n = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\cdot S_0.$$

Từ đây ta có diện tích của bông tuyết xấp xỉ tại bước lặp thứ n là

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i = S_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^i S_0$$

$$= S_0\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{4}\right)^i\right) = \frac{S_0}{5}\left(8-3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

Cho $n\to\infty$ ta có được diện tích của bông tuyết Koch là

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{5}S_0.$$

Nếu biểu diễn trực tiếp qua cạnh của tam giác ban đầu thì ta có

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{5}s^2.$$

Một trong những tính chất thú vị của đường cong bông tuyết Koch là liên tục nhưng không khả vi tại bất kỳ điểm nào.

Tam giác Sierpinski

Quy trình lặp ở đây là lấy một tam giác đều và khoét đi một tam giác con ở giữa có các đỉnh là điểm giữa của các cạnh. Khi các bước lặp được lặp lại vô hạn lần thì ta có được hình fractal mang tên nhà toán học Ba Lan là *tam giác Sierpinski*. Bốn bước đầu tiên của quá trình lặp này được minh họa dưới đây (xem Hình 17).

Hình 17. Bốn bước đầu tiên của quá trình tạo tam giác Sierpinski.

Điều thú vị là những hình dạng tương tự như thế này xuất hiện như họa tiết trang trí trong nhà thờ đã được biết đến từ thế kỷ thứ 13 (trước Sierpinski tới 7 thế kỷ).

Vì phần diện tích còn lại sau mỗi lần khoét đúng bằng 3/4 diện tích trước đó, cho nên dễ dàng suy ra diện tích của tam giác Sierpinski bằng 0. Điều thú vị là, nếu ta tăng gấp 2 độ dài cạnh của tam giác ban đầu thì ta sẽ có được 3 tam giác Sierpinski giống hệt với cái nhận được từ tam giác ban đầu. Điều này hé lộ một thuộc tính thú vị của hình fractal này.

Với những dạng hình học truyền thống (trong Hình học Euclid), người ta dễ nhận ra mối quan hệ khăng khít giữa *số chiều D* của nó với *kích thước tuyến tính L* và *số đo đặc trưng S*. Ví dụ, một hình chữ nhật có *số chiều D* là 2, có *kích thước tuyến tính L* là độ dài các cạnh và *số đo đặc trưng S* là diện tích của nó. Mối quan hệ giữa ba đại lượng này thể hiện ở chỗ khi tăng kích thước tuyến tính (độ dài cạnh) của hình lên K lần thì số đo đặc trưng (diện tích) của nó tăng lên K^2 lần, trong đó số mũ 2 chính là số chiều của hình. Tương tự như vậy, với vật thể 3 chiều như hình hộp, nếu kích thước tuyến tính của nó tăng lên gấp K lần thì thể tích của nó tăng lên K^3 lần. Tóm lại, mối quan hệ giữa *số chiều D*, tỷ lệ tăng giảm của *kích thước tuyến tính K* và hệ số tăng giảm *số đo đặc trưng H* có thể được biểu diễn tổng quát là $H = K^D$, hay viết cách khác là

$$D = \frac{\log(H)}{\log(K)}.$$

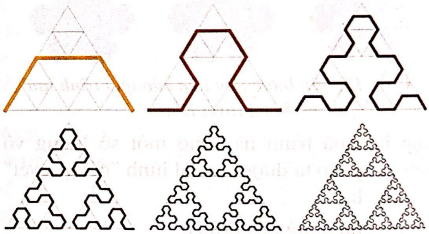
Mối quan hệ này đúng cho tất cả các hình dạng Euclid, nên người ta có lý do để mở rộng khái niệm về "số chiều" ra cho các hình dạng hình học không nhất thiết phải là Euclid, chẳng hạn như cho các hình fractal. Áp dụng công thức này cho tập tam giác Sierpinski ở trên, với lưu ý rằng khi cho $K = 2$ thì có $H = 3$ như đã thấy ở trên, ta có số chiều của hình này là

$$D = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1{,}585.$$

Điều này cho thấy số chiều của fractal (theo nghĩa mở rộng nói trên) có thể là số không nguyên, khác hẳn với số chiều của các đường cong thông thường trong hình học Euclid là luôn bằng 1. Người ta chứng minh được rằng số chiều của đường cong biên của tập Mandelbrot là bằng 2.

Một cách khác để tạo tam giác Sierpinski sẽ cho thấy nó có thể được cấu trúc như một đường cong trong mặt phẳng. Nó được hình thành bởi một quá trình sửa đổi lặp đi lặp lại các đường cong đơn giản, tương tự như việc xây dựng bông tuyết Koch. Cụ thể là:

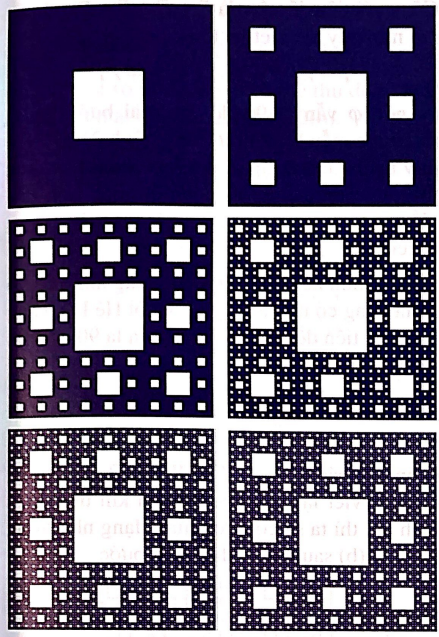
1. Bắt đầu với một đoạn thẳng trong mặt phẳng.
2. Thay thế mỗi đoạn bằng 3 đoạn ngắn hơn, tạo ra góc 120° tại mỗi điểm kết nối giữa hai đoạn liên tiếp, nhưng với các đoạn đầu tiên và cuối cùng của đường cong thì hoặc là song song với đoạn khởi đầu, hoặc là tạo với đoạn đó một góc 60°.
3. Đường cong thu được có tên gọi là đường cong đầu mũi tên Sierpinski, và hình dạng giới hạn của nó là tam giác Sierpinski (xem minh họa trong Hình 18).



Hình 18. Quy trình thiết lập tam giác Sierpinski bằng đường cong không tự cắt.

Tấm thảm Sierpinski

Sử dụng quy trình tạo tam giác Sierpinski thông thường, nhưng thay thế tam giác đều bằng hình vuông, ta chia nó thành 9 hình vuông nhỏ đều nhau và khoét đi cái nằm ở chính giữa. Tiếp theo, xem 8 hình vuông còn lại là những hình vuông độc lập và áp dụng lại quy trình vừa nói cho từng hình vuông nhỏ. Quy trình cứ thế lặp lại đến vô hạn lần sẽ cho ta hình fractal mang tên là *tấm thảm Sierpinski*. Sáu bước đầu tiên trong quy trình nêu trên được minh họa trong Hình 19 dưới đây.



Hình 19. Sáu bước đầu tiên trong quá trình lặp tạo tấm thảm Sierpinski.

Dễ thấy rằng diện tích của tấm thảm Sierpinski là bằng 0 (vì diện tích của "tấm thảm" thu được ở bước sau bằng 8/9 diện tích của cái thu được trong bước trước. Từ đây suy ra rằng tấm thảm là tập không có điểm trong.

Nếu ta tăng độ dài cạnh hình vuông ban đầu lên 3 lần thì kết quả quá trình lặp sẽ đem lại 8 tấm thảm Sierpinski với kích thước giống như tấm thảm nhận được khi không tăng. Từ đây ta có số chiều của tấm thảm Sierpinski là

$$D = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1,8928.$$

5. Các hệ hàm lặp

Qua cách tạo lập các hình fractal nêu trên ta có thể cảm nhận ngay được rằng những tính chất "khác thường" của chúng (không giống các hình trong Hình học Euclid) được sinh ra bởi quá trình lặp đến vô cùng tận. Một câu hỏi hiển hiện là: nếu ta không dùng các mẫu hình học đơn giản như đã thấy ở trên, mà dùng một mẫu hình khác thì phép lặp vô cùng ấy đem lại cái gì? Phần này sẽ được dành cho việc xem xét vấn đề đó. Cụ thể hơn, ta sẽ xem xét tác động của các hệ hàm lặp nói chung lên những đối tượng phổ biến hơn. Sau đây là một trường hợp đơn giản nhất.

Hệ L (L-System)

Một mô tả ngắn gọn về Hệ L sẽ được trình bày trong ví dụ sau đây. Một chuỗi ký tự được viết lại trong mỗi lần lặp theo một số quy tắc thay thế. Xem xét một chuỗi ban đầu (tiền đề)

$$F+F+F+F$$

và quy luật viết lại

$$F \to F+F-F-FF+F+F-F.$$

Sau một lần lặp thì người ta thu được chuỗi sau đây

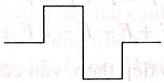
$$\begin{aligned}&F+F-F-FF+F+F-F+F+F-F\\&-FF+F+F-F+F+F-F-FF+F\\&+F-F+F+F-F-FF+F+F-F.\end{aligned}$$

Đối với lần lặp tiếp theo, vẫn cùng một quy tắc được áp dụng nhưng bây giờ là cho chuỗi sinh ra từ kết quả từ lần lặp trước, kết quả thu được là

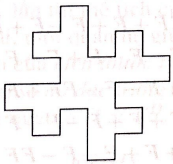
$$\begin{aligned}&F+F-F-FF+F+F-F+F+F-F-\\&-FF+F+F-F-F+F-F-FF+F+\\&+F-F-F+F-F-FF+F+F-FF+\\&+F-F-FF+F+F-F+F+F-F-FF\\&+F+F-F+F+F-F-FF+F+F-F\\&-F+F-F-FF+F+F-F+F+F-F\\&-FF+F+F-F+F+F-F-FF+F+F\\&-F-F+F-F-FF+F+F-F-F+F\\&-F-FF+F+F-FF+F-F-FF+F\\&+F-F+F+F-F-FF+F+F-F+F\\&+F-F-FF+F+F-F-F+F-F-FF\\&+F+F-F+F+F-F-FF+F+F-F\\&+F+F-F-FF+F+F-F-F+F-F\\&-FF+F+F-F-F+F-F-FF+F+F\\&-FF+F-F-FF+F+F-F+F+F-F\\&-FF+F+F-F+F+F-F-FF+F+F\\&-F-F+F-F-FF+F+F-F+F+F\\&-F-FF+F+F-F+F+F-F-FF+F\end{aligned}$$

$$+F-F-F+F-F-FF+F+F-F-F$$
$$+F-F-FF+F+F-FF+F-F-FF$$
$$+F+F-F+F+F-F-FF+F+F-F$$
$$+F+F-F-FF+F+F-F-F+F-F$$
$$-FF+F+F-F.$$

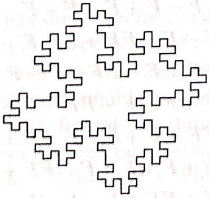
Bây giờ, một số ký tự được gán một ý nghĩa đồ hoạ, ví dụ, F có nghĩa là di chuyển về phía trước vẽ ra một đường, dấu + có nghĩa là rẽ trái một góc xác định trước φ (chẳng hạn là $\varphi = 90$ độ trong trường hợp này), còn dấu − có nghĩa là rẽ phải. Sử dụng các ký hiệu này, chuỗi ban đầu $F+F+F+F$ chỉ là một hình chữ nhật ($\varphi = 90$). Nguyên tắc thay thế $F \to F+F-F-FF+F+F-F$ sẽ thay thế mỗi "*chuyển động về phía trước và vẽ một đường*" bằng hình vẽ trong Hình 20(a). Bước lặp đầu tiên được diễn giải bằng đồ hoạ như trong Hình 20(b), và bước lặp tiếp theo được diễn giải bằng đồ hoạ như trong Hình 20(c).



Hình 20(a).



Hình 20(b).



Hình 20(c).

Nếu như quy trình cứ như thế tiếp diễn thì khi số bước lặp tiến tới vô cùng thì người ta thu được một hình dạng với những thuộc tính khá giống với fractal bông tuyết Koch mà ta biết được ở trên.

Cũng với tiền đề trên (là $F+F+F+F$), nhưng với một quy tắc viết lại khác là:

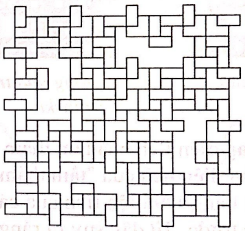
$$F \to FF+F-F+F+FF$$

và góc φ vẫn là 90 độ, sau vài bước lặp ta thu được mẫu hình như trong Hình 21(a). Nếu quy trình cứ thế lặp lại vô hạn lần thì kết quả thu được một hình với những thuộc tính khá giống với "tấm thảm" Sierpinski mà ta biết được ở trên.

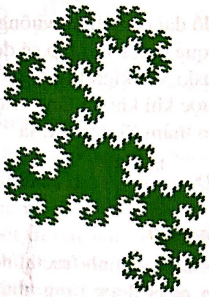
Những hình hài fractal thú vị giống như các tập Julia cũng có thể tạo lập nhờ một Hệ L. Chẳng hạn, với tiền đề là FX, góc φ vẫn là 90 độ, còn các quy tắc viết lại được cho là

$$Y \to -FX-Y$$
$$X \to X+YF+$$

(trong đó các ký hiệu X và Y chỉ sử dụng trong quy tắc viết lại và được bỏ qua khi thực hiện lệnh vẽ) thì ta sẽ có được hình dạng như trong Hình 21(b) sau một số hữu hạn bước



Hình 21(a).

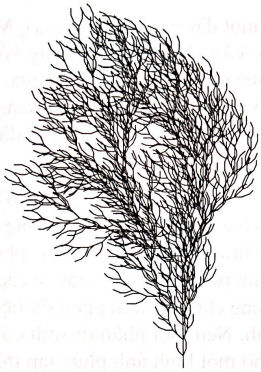


Hình 21(b).

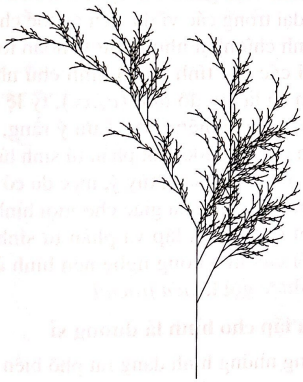
Điều thú vị là khi góc φ không phải là 90 độ thì sẽ xuất hiện những hình thái khác biệt rõ rệt. Chẳng hạn như khi chọn $\varphi = 22.5$, với tiền đề là F và quy tắc viết lại là

$$F \to FF$$
$$X \to F - [[X] + X] + F[+|FX] - X$$

thì sau một số bước lặp ta có thể thu được một cây mảnh mai như trong Hình 22(b).



Hình 22(a).



Hình 22(b).

Sử dụng hệ L (với nhiều quy tắc phong phú hơn) người ta có thể tạo ra những hình dạng sinh động hơn nữa, nhưng khuôn khổ bài báo không cho phép ta đi xa hơn.

Việc sử dụng hệ L gần đây là để tạo ra các vật thể trông giống thực tế xuất hiện trong tự nhiên và đặc biệt là cấu trúc phân nhánh của cây. Một trong những đặc điểm quan trọng của hệ L là chỉ cần một lượng nhỏ thông tin để biểu diễn các đối tượng rất phức tạp. Rõ ràng, trong khi các bụi cây trong Hình 22 có chứa hàng ngàn đường nét mà chúng có thể được mô tả trong cơ sở dữ liệu chỉ bằng một vài byte dữ liệu (các bụi cây này chỉ "cho lớn" khi thấy cần thiết để biểu diễn trực quan). Với thuật toán Hệ L được thiết kế phù hợp, các nhà thực vật học có thể thiết lập ra các quy trình sản xuất mà sẽ tạo ra một lớp thực vật cụ thể.

Các hệ hàm lặp (IFS)

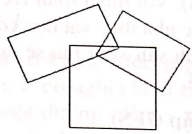
Các hệ hàm lặp (IFS- Iterated Function Systems) được thiết lập trên cơ sở các phép biến đổi đơn giản trong mặt phẳng: co dãn, di chuyển và xoay trục tọa độ. Việc tạo một fractal dựa trên IFS bao gồm các bước sau:

1. Xác định một tập các biến đổi trong mặt phẳng;
2. Vẽ một mẫu ban đầu trong mặt phẳng (mô hình bất kỳ);
3. Biến đổi mẫu ban đầu bằng cách sử dụng các biến đổi (được xác định trong bước đầu tiên);
4. Biến đổi hình ảnh tạo ra (kết hợp các mẫu ban đầu và mẫu đã biến đổi) bằng cách sử dụng chính tập hợp các phép biến đổi;
5. Lặp lại bước thứ tư nhiều lần nhất có thể (về lý thuyết, thủ tục này có thể được lặp lại vô hạn lần).

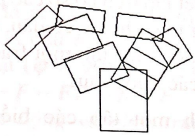
Trong khi các hệ L thường làm việc với các đường, các hệ hàm lặp IFS có thể làm việc trên các đa giác, nó thay thế đa giác bởi các đa giác khác được mô tả bởi phần tử sinh (generator). Trong mỗi lần lặp, mỗi đa giác được thay thế bởi một phiên bản của các đa giác trong phần tử sinh được co dãn, xoay và di chuyển sao cho phù hợp.

Để cho trực quan ta xem xét một ví dụ cụ thể. Phần tử sinh bao gồm ba hình chữ nhật, mỗi cái đều có tâm, kích thước và góc xoay của mình. Điều kiện ban đầu thường là một hình vuông đơn lẻ, vòng lặp đầu tiên bao gồm việc thay thế hình vuông này bằng một phiên bản của phần tử sinh được quay, co dãn và đặt ở vị trí phù hợp (như Hình 23(a)). Bước lặp tiếp theo, bao gồm việc thay thế mỗi hình chữ nhật trong hệ thống hiện tại bằng các phiên bản của phần tử sinh

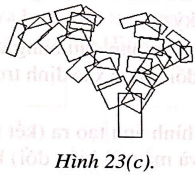
được quay, co dãn và định vị phù hợp, và sẽ tạo ra kết quả như trong Hình 23(b). Bước lặp tiếp theo thay thế mỗi hình chữ nhật ở trên vẫn bằng phần tử sinh ban đầu như thấy trong Hình 23(c).



Hình 23(a).

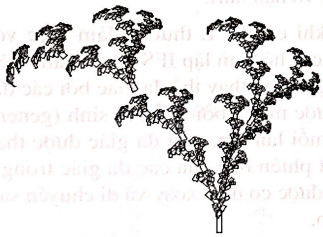


Hình 23(b).

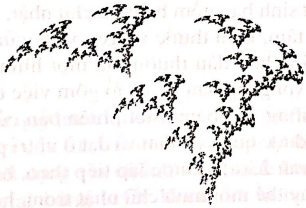


Hình 23(c).

Và cứ như thế, thêm 3 bước lặp sau đó ta sẽ có kết quả như trong Hình 24(a), và sau đủ nhiều bước lặp ta có kết quả như trong Hình 24(b)



Hình 24(a).



Hình 24(b).

Có một kỹ thuật mà theo đó sự định hình kết quả có thể được rút ra sau một số vô hạn bước lặp. Đây là một hệ hàm lặp có dạng

$$x_{n+1} \to f_1(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} \to f_2(x_n, y_n).$$

Nó cho ra một dãy các điểm (x_n, y_n). Mặc dù về nguyên tắc cần phải có một lượng vô hạn các phần tử trong dãy này để tạo ra kết quả, nhưng sự thể hiện có thể được cảm nhận dễ dàng sau một số lượng vừa phải các phần tử của dãy (chẳng hạn là 10000).

Lưu ý rằng cả hai phương pháp đều có thể tạo ra hình ảnh ở bất kỳ mức độ nào. Trong phần lớn các trường hợp, khi các mẫu được phóng to sẽ cho thấy tính tự đồng dạng ở tất cả các mức độ. Các ứng dụng chính là làm giảm dữ liệu cho các tệp mô hình. Nếu một phần tử sinh có thể được tìm thấy cho một hình ảnh phức tạp thì việc lưu trữ phần tử sinh và các quy tắc tái tạo hình ảnh sẽ đem đến việc giảm dữ liệu rất nhiều lần. Ví dụ, cây dại trong các ví dụ trên có thể chứa hơn 2000 hình chữ nhật nhưng được hoàn toàn xác định bởi các đặc tính của 3 hình chữ nhật, chỉ có 5 con số là tọa độ tâm (c_x, c_y), tỷ lệ co dãn (s_x, s_y) và góc nghiêng (ϕ). Lưu ý rằng, không đơn giản để tìm được một phần tử sinh hình chữ nhật cho một hình dạng tùy ý, mặc dù có thể tạo ra một phần tử sinh đa giác cho mọi hình dạng. Việc tìm ra hệ hàm lặp và phần tử sinh chính là cốt lõi của một công nghệ nén hình ảnh mà thường được gọi là *nén fractal*.

Hệ hàm lặp cho hình lá dương xỉ

Một trong những hình dạng rất phổ biến và hấp dẫn được tạo ra bởi hệ hàm lặp (IFS) là cái lá dương xỉ (xem Hình 25). Kỹ thuật sử dụng vào việc này đã được nói tới ở phần trên, tức là dùng hàm lặp để sinh ra dãy các điểm được biểu thị bởi 2 dãy số, một dãy là các tọa độ x và một dãy là tọa độ y. Các phương trình mô tả sự dịch chuyển, co dãn, xoay và cắt các điểm trong mặt phẳng, với ràng buộc cho các phép biến đổi phải là aphin (affine).

Dạng tổng quát của phép biến đổi aphin trong mặt phẳng được biểu diễn qua một ma trận vuông với bốn phần tử (a, b, c, d) và một véctơ

với hai tọa độ (e, f), mà khi viết lại dưới dạng hệ phương trình tuyến tính thì dãy các điểm sinh ra có thể được biểu diễn dưới dạng hệ hàm lặp sau

$$x_{n+1} = ax_n + by_n + e$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n + f.$$

Một điểm được vẽ tại mỗi cặp tọa độ (x_i, y_i) đối với i lớn hơn một số nào đó (thường trong khoảng từ 10 đến 100).

Điểm mấu chốt là xác định giá trị các tham số (a, b, c, d, e, f) để cho ra được hình dạng mong muốn. Trong nhiều ứng dụng thì cần có không chỉ một mà là một số các tập tham số này. Trong quá trình sinh dãy, một tập cụ thể nào đó sẽ được chọn một cách ngẫu nhiên cho mỗi tham số. Một hệ hàm lặp như thế còn thường được gọi là *hệ hàm lặp ngẫu nhiên*.

Lá dương xỉ được thiết lập với bảng giá trị cho trong Hình 25(a). Điều thú vị là nếu các tập giá trị khác nhau của (a, b, c, d, e, f) được lựa chọn với xác suất thích hợp thì lá dương xỉ sẽ "lộ hình" nhanh hơn và cân bằng hơn là khi các tập này được chọn với cơ hội bình đẳng. Hàng cuối cùng trong bảng cho biết xác suất tối ưu.

-	Tập 1	Tập 2	Tập 3	Tập 4
a	0.0	0.2	-0.15	0.75
b	0.0	-0.26	0.28	0.04
c	0.0	0.23	0.26	-0.04
d	0.16	0.22	0.24	0.85
e	0.0	0.0	0.0	0.0
f	0.0	1.6	0.44	1.6
p	0.1	0.08	0.08	0.74

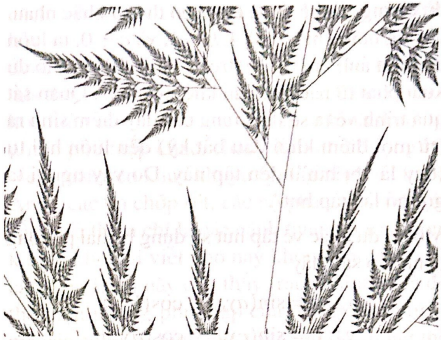
(a) *(b)*

Hình 25.

Lá dương xỉ ở trong Hình 25(b) là kết quả của 100 nghìn (10^5) lần lặp, nghĩa là 100 nghìn điểm được vẽ (tất nhiên khi vẽ có nhiều điểm sẽ bị trùng lặp).

Ảnh là tự đồng dạng ở mọi cấp độ, người ta có thể phóng đại nó tùy theo ý mình và những nhánh nhỏ của lá hiện lên trông giống như là chính nó. Ví dụ, Hình 26 là một phần của Hình 25(b) được phóng đại lên 50 lần. Nó cho ta thấy mỗi nhánh của một nhánh lá hiện ra giống hệt như chính chiếc lá ban đầu (trong Hình 25(b)).

Tuy nhiên, lưu ý rằng cần phải tăng đáng kể số lần lặp để xử lý hình ảnh khi hệ số phóng đại tăng lên, chẳng hạn như để có hình ảnh như trong Hình 26 đã phải cần tới 100 triệu (10^8) lần lặp.



Hình 26.

Chỉ cần một chút thay đổi trong bảng dữ liệu (như trong Hình 27(a)) thì chiếc lá dương xỉ đã có hình hài khác biệt trông thấy (xem Hình 27(b)).

-	Tập 1	Tập 2	Tập 3	Tập 4
a	0.0	0.2	-0.15	0.85
b	0.0	-0.26	0.28	0.04
c	0.0	0.23	0.26	-0.04
d	0.16	0.22	0.24	0.85
e	0.0	0.0	0.0	0.0
f	0.0	1.6	0.44	1.6
p	0.01	0.07	0.07	0.85

(a) *(b)*

Hình 27.

6. Những tập hút kỳ lạ trong các hệ động lực

Trong mặt phẳng, dãy điểm có thể được sinh ra hoặc là từ phương trình lặp của một biến phức hoặc là từ hệ hai phương trình lặp tương quan, một cho x và một cho y. Ví dụ như hệ các phương trình lặp sau đây:

$$x_{n+1} = y_n - \text{sign}(x_n)|bx_n - c|^{1/2}$$
$$y_{n+1} = a - x_n.$$

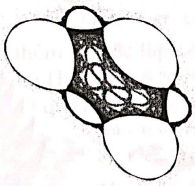
Dãy tọa độ x, y này được xác định bởi một điểm ban đầu x_0, y_0 và ba hằng số a, b và c. Điều thú vị ở đây là điểm ban đầu không có vai trò quan trọng (ngoại trừ một vài trường hợp đặc biệt),

tức là: tất cả tọa độ ban đầu x_0, y_0 đều cho cùng một hình ảnh (đối với mỗi bộ ba hằng số xác định). Chính xác hơn, các điểm (x, y) mà có thể được tạo ra bởi dãy từ bất kỳ điểm ban đầu nào cũng sẽ tạo ra cùng một tập hợp các điểm mặc dù chúng có thể được tạo theo thứ tự khác nhau. Chẳng hạn, khi $a = 0,4, b = 1$, và $c = 0$, ta luôn có hình ảnh tạo ra như trong Hình 28(a), cho dù xuất phát từ bất kỳ điểm khởi đầu nào. Quan sát quá trình vẽ ta sẽ thấy rằng các dãy điểm sinh ra (từ mọi điểm khởi đầu bất kỳ) đều luôn hội tụ (hay là "bị hút") đến tập này. Do vậy người ta gọi nó là "tập hút".

Một ví dụ khác về tập hút sử dụng hệ hai phương trình lặp sau đây

$$x_{n+1} = \sin(ay_n) - \cos(bx_n)$$
$$y_{n+1} = \sin(cx_n) - \cos(dy_n).$$

Với $a = -2,24, b = -0,65, c = 0,43, d = -2,43$, các dãy sinh ra từ hệ phương trình lặp nêu trên (với bất kỳ điểm khởi đầu nào) đều "bị hút" về một tập có hình dạng gợn xoắn như trong Hình 28(b).

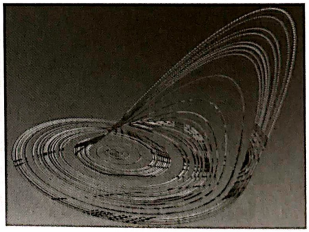


Hình 28(a).

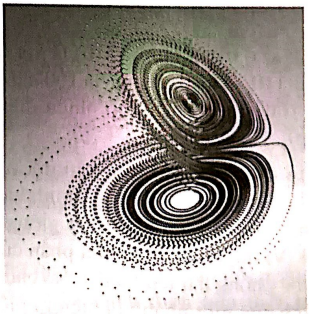
Hình 28(b).

Các hệ phương trình lặp nêu trên thực ra là các hệ động lực rời rạc, và các dãy điểm sinh ra (từ một điểm khởi đầu nào đó) chính là những quỹ đạo của nó. Với một số hệ động lực liên tục (được mô tả bởi các hệ phương trình vi phân) người ta cũng phát hiện ra hiện tượng tương tự. Tức là, quỹ đạo nghiệm của nó cũng có tính "bị hút" về một tập nào đó. Hai ví dụ nổi tiếng về loại này là tập hút Rossler, được đưa ra bởi Otto Rossler trong quá trình nghiên cứu về động học hóa học, và tập hút Lorenz, có nguồn gốc từ một mô hình đơn giản hóa sự đối lưu trong lớp không khí của vỏ trái đất trong các nghiên cứu của nhà khí tượng học Ed N. Lorenz (xem trong Hình 29). Rất tiếc là thời gian không cho phép chúng ta đi sâu tìm hiểu các tập này. Quỹ đạo của chúng không làm thành các vòng giới hạn và cũng không bao giờ đạt đến trạng thái ổn định. Thay vào đó nó là một sự hỗn loạn tất định. Giống như các hệ thống hỗn độn khác, các quỹ đạo rất nhạy cảm với điều kiện ban đầu, hai trạng thái ban đầu dù gần nhau đến đâu đi chăng nữa thì các quỹ đạo sinh ra sớm muộn cũng sẽ xa rời nhau, cho dù có thể cùng bị hút về một tập nào đó.

Một đặc điểm chung dễ nhận thấy của các "tập hút" là hình thù của chúng rất khác thường, thậm chí là "quái đản", hoàn toàn không giống những gì có thể tạo ra bằng hình học Euclid truyền thống. Có lẽ chính điều này đã khiến người ta xem chúng thuộc về gia đình các fractal.



Hình 29(a). Tập hút Rossler.

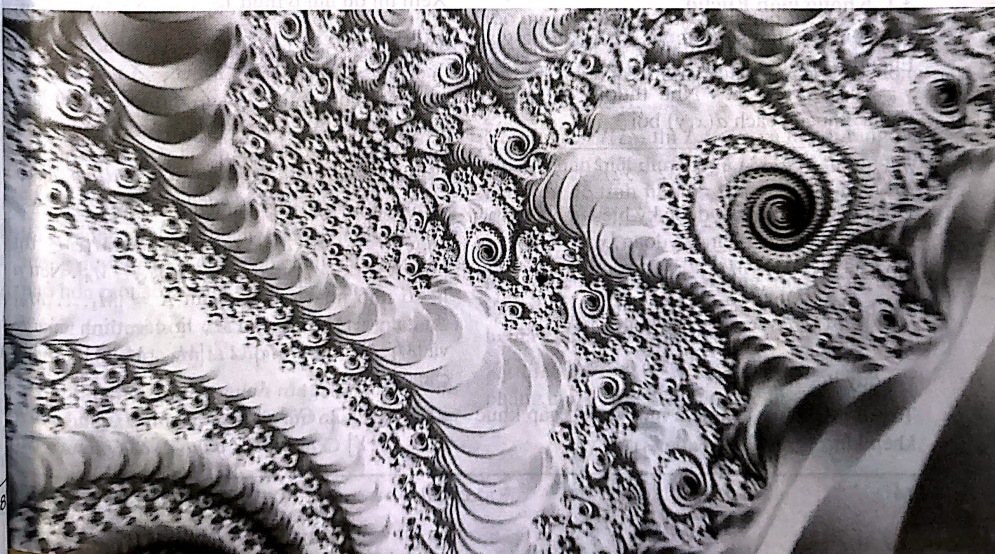


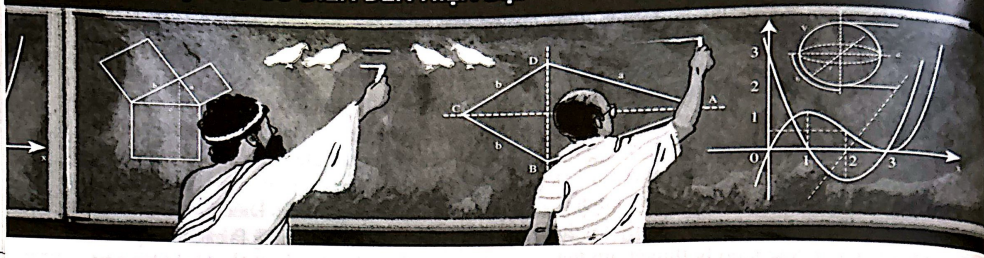
Hình 29(b). Tập hút Lorenz.

Như vậy, fractal bao gồm nhiều loại, và những loại ta đã nêu ở trên có thể xem phổ biến nhất. Mặc dù không giống nhau, nhưng chúng có chung 2 đặc điểm nổi bật là tính tự đồng dạng và có số chiều không nguyên. Ở đây tính tự đồng dạng có thể là chính xác theo lý thuyết (như với bông tuyết Koch hay tấm thảm Sierpinski) và cũng có thể là "xấp xỉ" (như là tập Mandelbrot hay cái lá dương xỉ). Lưu ý rằng, cho dù không phải là chính xác theo lý thuyết, nhưng tính "đồng dạng xấp xỉ" ở đây cho thấy sự đồng dạng đến mức người ta không thể phát hiện sự không giống nhau bằng mắt thường. Chẳng hạn, nếu nhìn cẩn thận lá cây dương xỉ được vẽ ở trên, người ta sẽ nhận thấy rằng mỗi nhánh lá nhỏ - một phần của một cái lớn hơn - có cùng hình dạng với toàn bộ lá dương xỉ. Trên thực tế, người ta chỉ có thể nói rằng lá cây dương xỉ là tự đồng dạng. Số chiều không nguyên chính là điều làm nên sự khác biệt rõ nhất giữa các fractal với các hình thái gặp trong hình học Euclid truyền thống. Một đường cong hình học truyền thống chỉ có thể có chiều là 1, do tính đơn giản về cấu trúc (khi phóng to lên ta sẽ thấy nó gần như là thẳng), còn một đường cong fractal trong mặt phẳng sẽ có số chiều tùy thuộc vào bao nhiêu không gian nó chiếm khi nó xoắn và cong. Nó càng lấp nhiều miền mặt phẳng thì số chiều của nó càng lớn gần với 2. Tương tự như vậy, một "cảnh quan bề mặt fractal gập nghềnh đồi núi" sẽ đạt đến một số chiều nào đó giữa 2 và 3, mà không đơn giản là 2 như các mặt cong thông thường trong hình học Euclid.

Những hình cây lá và đồi núi được mô phỏng bằng fractal trông gần với tự nhiên hơn bất cứ cách mô tả nào, cho dù là bằng bàn tay của các họa sĩ tài ba hay bằng muôn vàn hình thái tạo được trong hình học cổ điển. Điều làm cho fractals thú vị chính là ở chỗ chúng là các mô tả toán học hiện có tốt nhất của rất nhiều hình dạng tự nhiên phức tạp khác, chẳng hạn như đường bờ biển quanh co khúc khuỷu (giống như của nước Anh), các tia chớp sét, các bộ phận của sinh vật sống, và thậm chí là các cảnh quan vũ trụ,... mà khuôn khổ bài viết nhỏ này không cho phép đề cập đến. Điều này cho thấy fractal sinh ra là để thể hiện những phức tạp của thế giới tự nhiên mà các công cụ hình học trước đó đã không thể nào làm được. Nói cách khác, fractal chính là những "con chữ" mà người ta cần nắm bắt để hiểu được "cuốn sách" vũ trụ bao la mà Galileo đã từng nói tới. Nếu quả như vậy thì tại sao nó đã không ra đời sớm hơn, cùng với bao công trình toán học vĩ đại khác trong thế kỷ 18-19, mà lại chỉ được người đời biết đến vào nửa sau của thế kỷ 20 cùng với tên tuổi của Mandelbrot? Điều này sẽ được làm sáng tỏ trong phần tiếp theo của bài báo này.

(còn nữa)





LÝ THUYẾT NÚT VÀ ĐA THỨC JONES

(tiếp theo)

- Lê Tự Quốc Thắng -

III. NÚT: LÝ THUYẾT CƠ BẢN

Các khái niệm tô pô đều dùng đến toán cao cấp. Nhiều khái niệm tưởng chừng đơn giản nhưng toán học hóa chúng rất phức tạp và đòi hỏi nhiều kiến thức. Với mục đích hướng tới độc giả là học sinh phổ thông, trong bài này ta sẽ chỉ dùng kiến thức hình học sơ cấp trong không gian 3 chiều. Mặc dù sẽ có hạn chế, hy vọng độc giả có thể tiếp xúc với một số ý tưởng của lý thuyết nút và tô pô. Bài đọc có nhiều bài tập, và nhiều chứng minh được chuyển thành bài tập. Những bài có dấu $(*)$ khó hơn, đòi hỏi thời gian hơn.

3.1. Không gian Euclid

Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập số thực và $\mathbb{R}^3$ là không gian Euclid 3 chiều. Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ và $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Như thường lệ ta định nghĩa khoảng cách $d(x,y)$ bởi

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}.$$

Đoạn thẳng nối x và y được ký hiệu $[x,y]$, và x,y được gọi là điểm biên của đoạn $[x,y]$. Cho một dãy các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_n$ trong $\mathbb{R}^3$, ký hiệu

$$[M_1, M_2, \ldots, M_n] = \bigcup_{i=1}^{n} [M_i, M_{i+1}],$$

với quy ước $n+1 = 1$.

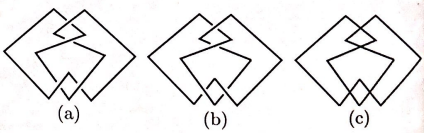
Ta gọi $[M_1, M_2, \ldots, M_n]$ là một đường gấp khúc khép kín.

3.2. Nút và kết

Để làm chính xác khái niệm nút là đường cong khép kín trong $\mathbb{R}^3$ và để tránh các thí dụ kỳ dị, ta sẽ định nghĩa nút là một đường gấp khúc đơn khép kín như sau.

Định nghĩa 3.1. *Tập hợp $K \subset \mathbb{R}^3$ được gọi là một nút nếu tồn tại các điểm khác nhau $M_1, M_2, \ldots, M_n$ với $n \geq 3$ sao cho $K = [M_1, M_2, \ldots, M_n]$, hơn nữa các đoạn thẳng $[M_1, M_2], [M_2, M_3], \ldots, [M_{n-1}, M_n]$ và $[M_n, M_1]$ không cắt nhau, ngoại trừ $[M_i, M_{i+1}] \cap [M_{i+1}, M_{i+2}] = \{M_{i+1}\}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ (quy ước $n+i = i$).*

Xem thí dụ nút ở hình 1.



Hình 1. *(a) Nút số 8 (b) Nút ba lá (c) Hình chiếu của cả hai nút.*

Nếu $M' \in [M_1, M_2]$ và M' khác M_1, M_2 thì $[M_1, M_2, \ldots, M_n] = [M_1, M', M_2, \ldots, M_n]$. Nếu n là số nhỏ nhất sao cho nút $K = [M_1, \ldots, M_n]$ thì ta gọi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ là các đỉnh của K và $[M_1, M_2], [M_2, M_3], \ldots, [M_{n-1} M_n], [M_n M_1]$ là các cạnh của K.

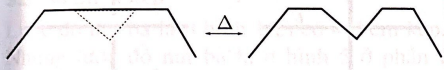
▪ **Bài tập 3.2.** *Giả sử K là một nút. Chứng minh rằng $[X, Y] \subset K$ là một cạnh của K nếu và chỉ*

nếu $[X,Y]$ là một đoạn thẳng cực đại của K, tức là nếu $[X,Y] \subset [X',Y'] \subset K$ thì $[X,Y] = [X',Y']$. Chứng minh rằng $M \in K$ là một đỉnh của K nếu và chỉ nếu nó là điểm biên của một cạnh. Mỗi đỉnh là điểm biên của đúng 2 cạnh.

Định nghĩa 3.3. *Kết là một tập hợp có dạng $L = \bigcup_{j=1}^{k} K_j$, trong đó mỗi K_j là một nút (gọi là một thành phần của L) sao cho 2 nút bất kỳ không giao nhau.*

Một đoạn thẳng được gọi là cạnh của kết L nếu nó là cạnh của một thành phần. Một điểm được gọi là đỉnh của kết L nếu nó là đỉnh của một thành phần.

Khái niệm dịch chuyển một kết thành một kết khác được chính xác hóa như sau.



Hình 2. *Biến đổi Δ. Bên trái là L, bên phải là L'. Tam giác T có cạnh là các đường đứt.*

Định nghĩa 3.4. *(a) Giả sử L, L' là kết và T là một tam giác có 3 cạnh e_1, e_2, e_3 sao cho $L \cap T = e_1$ và $L' = (L \setminus e_1) \cup e_2 \cup e_3$ (Xem hình 2). Khi đó ta nói mỗi một L, L' nhận được từ kết kia bằng một phép biến đổi Δ.*

(b) Kết L' là tương đương kết L, ký hiệu là $L \sim L'$, nếu L' có thể nhận được từ L bởi một dãy các phép biến đổi Δ.

(c) Một kết là không-kết nếu nó tương đương với một kết nằm trong một mặt phẳng.

Dễ thấy rằng (i) $L \sim L$, (ii) nếu $L \sim L'$ thì $L' \sim L$, và (iii) nếu $L \sim L'$ và $L' \sim L''$ thì $L \sim L''$. Có nghĩa là $\sim$ là một quan hệ tương đương trong tập tất cả các kết. Ta ký hiệu $[L]$ là lớp tương đương của L, tức là tập hợp tất cả các kết tương đương với L. Thông thường ta không phân biệt các kết tương đương nhau. Các kết tương đương thì có cùng số thành phần. Dễ thấy rằng mỗi kết tương đương với một kết có chiều dài mỗi cạnh nhỏ hơn một số dương tuỳ ý cho trước.

Trong trường hợp chỉ có một thành phần thì không-kết được gọi là không-nút.

■ **Bài tập 3.5.** *Chứng minh rằng mọi không-nút tương đương với một nút là hợp của 3 cạnh của một tam giác.*

■ **Bài tập 3.6.** *Giả sử $K = [M_1, M_2, \ldots, M_n]$ là một nút. Chứng minh rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho nếu $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ là các điểm với $d(M'_i, M_i) < \varepsilon$ thì $[M'_1, M'_2, \ldots, M'_n]$ là một nút tương đương với K.*

■ **Bài tập 3.7.** *Giả sử $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một phép quay, tịnh tiến, hoặc vị tự và L là một kết. Chứng minh rằng $\varphi(L)$ tương đương với L.*

Nút trơn được định nghĩa chính xác như sau. Một hàm $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cho bởi $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ được gọi là trơn nếu các hàm $f_i(x)$ là có đạo hàm $f'_i(x)$ liên tục và $(f'_1(x))^2 + (f'_2(x))^2 + (f'_3(x))^2) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử F trơn, $F(x+1) = F(x)$, và $F(x+t) \neq F(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $0 < t < 1$. Khi đó ảnh của F được gọi là một nút trơn.

Từ nút trơn ta có thể nhận được nút (gấp khúc) như sau.

Tồn tại một số nguyên dương N (phụ thuộc F) sao cho nếu $n > N$ thì đường gấp khúc $K_n = [F(0), F(\frac{1}{n}), F(\frac{2}{n}), \ldots, F(\frac{n-1}{n})]$ là một nút, và K_n là tương đương $K_{n'}$ với mọi $n, n' > N$. Vì vậy mỗi nút trơn xác định một lớp tương đương của nút.

Nút trơn gần với nút thực tế ta thường gặp hơn. Nhưng nút gấp khúc sẽ tiện hơn cho các chứng minh toán học không cần dùng công cụ cao cấp.

3.3. Bất biến kết.

Một bất biến kết là một hàm I từ tập hợp các kết vào một tập A nào đó, thí dụ tập các số nguyên, sao cho nếu $L \sim L'$ thì $I(L) = I(L')$. Như vậy một bất biến kết là một hàm từ các lớp tương đương kết vào A.

Nếu $I(L) \neq I(L')$ thì $L \not\sim L'$, và ta nói rằng bất biến I phân biệt được L và L'. Ta sẽ tìm một số bất biến dễ tính nhưng đủ mạnh để phân biệt được nhiều nút.

3.4. Lược đồ kết.

Khi ta vẽ nút trên mặt phẳng, thí dụ các nút ở hình 1, thực chất ta vẽ lược đồ nút. Ta sẽ định nghĩa chính xác lược đồ nút.

Ký hiệu $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ là phép chiếu lên mặt phẳng của 2 trục đầu tiên, tức là

$$p((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2).$$

Giả sử L là kết. Trong nhiều trường hợp hình chiếu $p(L)$ khá đơn giản. Một điểm $X \in p(L)$ được gọi là đơn nếu chỉ có đúng một điểm của L chiếu xuống X.

Định nghĩa 3.8. *Kết L được gọi là chính quy đối với p nếu*

- *tất cả các điểm của $p(L)$ là đơn, ngoại trừ một số hữu hạn điểm,*
- *nếu $X \in p(L)$ là không đơn thì có đúng 2 điểm của L chiếu xuống X, và*
- *ảnh của một đỉnh của L là đơn.*

Nếu kết L là chính quy đối với p thì $p(L)$ được gọi là một hình chiếu kết. Một điểm không đơn $c \in p(L)$ được gọi là điểm kép.

Hình 1(c) là một hình chiếu kết. Trong $p(L)$ ta không có các tình huống như trong hình 3.

Hình 3. *Các tình huống không xuất hiện nếu L là chính quy đối với p.*

Giả sử D là một hình chiếu kết. Một đoạn thẳng $a \subset D$ được gọi là một cạnh của D nếu nó là một đoạn thẳng cực đại trong D, tức là nếu $a \subset a' \subset D$ mà a' là một đoạn thẳng thì $a = a'$. Một điểm X được gọi là một đỉnh của D nếu nó là điểm biên của một cạnh của D.

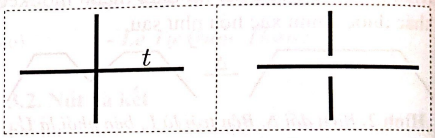
Chú ý rằng nếu $D = p(L)$ và a là một cạnh của L thì $p(a)$ có thể không phải là một cạnh của D, mà chỉ là một phần của một cạnh của D, khi cạnh này là hình chiếu của vài cạnh liên tiếp của L.

■ **Bài tập 3.9.** *Chứng minh rằng c là một điểm kép của D nếu và chỉ nếu nó là giao điểm của 2 cạnh không liên tiếp của D, tức là 2 cạnh không có chung điểm biên nào.*

Giả sử kết L là chính quy đối với p. Nếu $c \in p(L)$ là điểm kép thì có 2 cạnh không liên tiếp a, b của L sao cho $p(a) \cap p(b) = \{c\}$. Khi đó có $c' \in a$ và $c'' \in b$ sao cho $p(c') = p(c'') = c$, và ta nói *$p(a)$ là trên (hay dưới) $p(b)$ tại c* nếu c' là cao hơn (hay thấp hơn) c''. Ở đây chiều cao của một điểm của $\mathbb{R}^3$ là tọa độ x_3 của nó. Ta gọi $p(L)$ cùng với thông tin đoạn nào là đoạn trên tại mỗi điểm kép là *lược đồ kết* của L.

Có nhiều kết có chung một lược đồ. Dễ chứng minh rằng tất cả các kết có chung một lược đồ thì chúng là tương đương. Như vậy mỗi lược đồ kết D xác định một lớp tương đương kết, ký hiệu là $L(D)$.

Giả sử $D = p(L)$ là hình chiếu kết của một kết L nào đó. Ta có thể quên L mà định nghĩa các lược đồ kết trên D bằng cách tại mỗi điểm kép c của D chọn một trong hai đoạn đi ngang c làm đoạn trên. Dễ thấy rằng với mỗi lựa chọn, ta có một lược đồ của một kết nào đó. Nếu đoạn a là trên đoạn b tại điểm kép c ta sẽ vẽ a và b sao cho a là một đoạn thẳng liền tại c và b là một đoạn thẳng thiếu một khúc nhỏ tại c, xem hình



Hình 4. *Điểm kép, với đoạn trên được đánh dấu "t" (trái). Bên phải là cách vẽ điểm kép này.*

Hình vẽ một lược đồ kết bây giờ cho ta thấy ngay lớp tương đương của kết. Thí dụ bằng cách chọn các đoạn trên khác nhau, từ hình chiếu nút của hình 1(c) ta có lược đồ nút khác nhau ở hình 1(a) và hình 1(b).

Nếu một hình chiếu kết có m điểm kép thì nó có 2^m lược đồ kết khác nhau.

■ **Bài tập 3.10.** *Chứng minh rằng trong 2^m lược đồ kết này có không-kết.*

Lược đồ của kết L chỉ được định nghĩa khi L là chính quy đối với p. Nếu L không chính quy đối với p thì sao?

Mệnh đề 3.11. *Mỗi kết L có kết tương đương L' chính quy đối với p.*

Ý tưởng chứng minh. Tập hợp tất cả các vector đơn vị là mặt cầu $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid d(v, \mathbf{0}) = 1\}$. Với $v \in S^2$ ta ký hiệu p_v là phép chiếu trực giao xuống mặt phẳng vuông góc với v. Định nghĩa L chính quy với p_v tương tự như định nghĩa L chính quy với p. Ta có thể chứng minh rằng tập hợp tất cả $v \in S^2$ sao cho L không chính quy với p_v nằm trong hợp của một số hữu hạn mặt phẳng. Vì hợp của một số hữu hạn mặt phẳng không thể phủ hết S^2, tồn tại $v \in S^2$ sao cho L

là chính quy đối với p_v. Chọn một phép quay φ sao cho $\varphi(v) = (0,0,1)$. Khi đó $L' = \varphi(L)$ là chính quy đối với p.

■ **Bài tập 3.12.** *(a*) Bổ sung chi tiết của chứng minh trên, bằng cách trả lời các câu hỏi sau: (1) Nếu X là một điểm và e là một đường thẳng không chứa X, tìm các vector đơn vị v sao cho $p_v(X) \in p_v(e)$, (2) Nếu e_1, e_2, e_3 là các đường thẳng, tìm các vector đơn vị v sao cho $p_v(e_1)$, $p_v(e_2)$, và $p_v(e_3)$ có điểm chung.*

(b) Chứng minh minh rằng nếu nút $K = [M_1, \ldots, M_n]$ là chính quy đối với p thì tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho nếu $d(M_i, M_i') < \varepsilon$ thì $[M_1', \ldots, M_n']$ là một nút chính quy đối với p.

3.5. Số điểm kép

Lược đồ nút ba lá ở hình 1(c) có 4 điểm kép. Nhưng lược đồ nút ba lá ở hình 5 ở phần I (Tạp chí Pi tập 1, số 9, tháng 9.2017) chỉ có 3 điểm kép.

Định nghĩa 3.13. *Số điểm kép của kết L , ký hiệu là* $\mathrm{cn}(L)$, *là số nguyên n nhỏ nhất sao cho có một lược đồ kết tương đương với L và có n điểm kép.*

Số điểm kép là một bất biến kết. Nhưng nó rất khó tính. Nó thường được sử dụng như một độ phức tạp của kết. Kết có số điểm kép càng lớn thì càng phức tạp. Kết có số điểm kép 0 là không-kết. Trong bảng nút người ta liệt kê nút theo mức tăng dần của số điểm kép.

■ **Bài tập 3.14.** *Chứng minh rằng nếu K là một nút không phải là không-nút thì* $\mathrm{cn}(K) \geq 3$.

Vì nút ba lá T có một lược đồ với 3 điểm kép, ta có $\mathrm{cn}(T) \leq 3$. Ta sẽ chứng minh T không phải là không-nút. Vì vậy ta có thể kết luận $\mathrm{cn}(T) = 3$.

3.6. Phép biến đổi Reidemeister

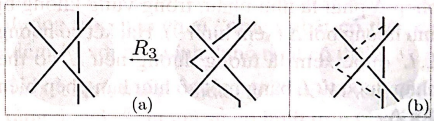
Hai kết tương đương có thể có lược đồ kết hoàn toàn khác nhau. Khi nào thì 2 lược đồ kết D, D' xác định 2 kết tương đương, tức $L(D) = L(D')$? Ta hãy xem thí dụ sau. Giả sử D và D' là 2 lược đồ kết giống nhau ngoại trừ trong một hình tròn (đĩa bóng hình 5(a)) mà trong đó D là phần bên trái của hình 5(a) và D' là phần bên phải của hình 5(a). Dễ thấy rằng $L(D) = L(D')$. Lý do là ta có một phép biến đổi Δ biến kết có lược đồ D thành kết có lược đồ D'. Hình tam giác của phép Δ được vẽ ở hình 5(b). Ta nói rằng từ D qua D' hoặc ngược lại từ D' qua D là một phép biến đổi R_0. Hình tròn (đĩa bóng) mà trong đó D và D' khác nhau được gọi là *giá* (support) của phép biến đổi này.

Tương tự ta có các phép biến đổi R_1 (hình 6), R_2 (hình 7), và R_3 (hình 8). Mỗi phép biến đổi này không thay đổi lớp tương đương kết, mặc dù chúng thay đổi lược đồ kết.

Hình 5. *(a) Phép biến đổi R_0. (b) Tam giác được sử dụng.*

Hình 6. *(a) Phép biến đổi R_1. (b) Hai tam giác được sử dụng.*

Hình 7. *(a) Phép biến đổi R_2. (b) Tam giác được sử dụng.*



Hình 8. *(a) Phép biến đổi R_3. (b) Tam giác được sử dụng.*

Định lý 3.15 (Reidemeister). *Hai lược đồ kết D, D' xác định cùng một lớp tương đương kết, tức là $L(D) = L(D')$, nếu và chỉ nếu D' có thể nhận được từ D bởi một số hữu hạn phép biến đổi Reidemeister R_0, R_1, R_2, R_3.*

Ý tưởng chứng minh. Định lý được đưa về trường hợp D là lược đồ của L và D' là lược đồ của L', trong đó L' nhận được từ L bằng một phép biến đổi Δ qua tam giác T. Khi đó $p(T)$ là một tam

giác. Ta chứng minh có thể chia $p(T)$ thành các tam giác nhỏ hơn, mà mỗi tam giác nhỏ sẽ thực hiện một trong các phép biến đổi R_i.

Định lý Reidemeister sẽ được sử dụng để xây dựng bất biến nút hay kết như sau. Ta xây dựng hàm số I trên tập các lược đồ kết. Nếu I là bất biến dưới các phép biến đổi Reidemeister, thì I là bất biến của kết.

3.7. Kết có hướng

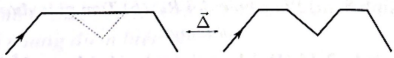
Định nghĩa 3.16. *Hướng của một đoạn thẳng là sự lựa chọn một trong 2 điểm biên của nó, gọi là điểm đầu; điểm biên còn lại được gọi là điểm cuối.*

Nếu X là điểm đầu, trong hình vẽ ta đánh dấu hướng này bằng một mũi tên từ X đến Y.

Định nghĩa 3.17. *Hướng của một kết L (hay một lược đồ kết) là sự lựa chọn hướng của mỗi cạnh của nó sao cho mỗi đỉnh của nó là điểm đầu của một cạnh và là điểm cuối của một cạnh khác. Kết có hướng là một kết cùng với sự lựa chọn một hướng của nó.*

Trên một nút có hướng ta có thể đi theo hướng của nút, xuất phát từ một điểm bất kỳ, thì ta sẽ trở lại điểm xuất phát. Hướng của một nút được xác định duy nhất bởi hướng của một cạnh của nó. Như vậy mỗi nút có 2 hướng khác nhau và một kết có k thành phần có 2^k hướng.

Lý thuyết kết có hướng hoàn toàn tương tự. Phép biến đổi Δ được định nghĩa như trong trường hợp cũ, chỉ có hướng của kết cũ và kết mới trong phép Δ phải là như nhau, trong vùng không bị ảnh hưởng bởi Δ (xem hình 9). Hai kết có hướng L, L' được xem là tương đương nếu L' có thể nhận được từ L bằng một số hữu hạn phép biến đổi Δ.



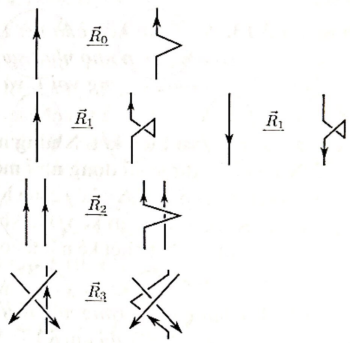
Hình 9. *Biến đổi Δ cho kết có hướng*

■ **Bài tập 3.18.** *Chứng minh rằng bất kỳ 2 hướng nào của một không-kết đều cho ra 2 kết tương đương nhau.*

Giả sử L là kết có hướng, chính quy đối với phép chiếu p. Khi đó lược đồ của L cũng có hướng (hướng của đoạn $p(a)$ là nhận được từ hướng của a, cho mỗi cạnh a của L).

Từ định lý Reidemeister 3.15 ta thấy rằng hai lược đồ kết có hướng xác định cùng một lớp kết có hướng tương đương nếu và chỉ nếu chúng nó được liên hệ nhau bởi một chuỗi các phép biến đổi R_i có hướng, với $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Ở đây một phép biến đổi R_i có hướng là giống như phép biến đổi R_i, chỉ có tất cả các đoạn thẳng là định hướng tùy ý sao cho hướng trước và sau phép biến đổi là như nhau. Nếu giá của R_i (là đĩa bóng bên trái của các hình 5, 6, 7, 8) có k đoạn thì thì ta có 2^k phép biến đổi R_i có hướng, tương ứng với tất cả cách định hướng các đoạn này. Thí dụ R_1 có một đoạn, vì vậy có hai phép R_1 có hướng, cả hai đều có minh họa trong hình 10. Ta có $2^3 = 8$ phép R_3 có hướng, nhưng chỉ có một được minh họa trong hình 10.

Như vậy ta có $2^1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$ phép biến đổi Reidemeister có hướng. Gần đây Polyak chứng minh rằng chỉ cần dùng 5 phép biến đổi trong hình 10 là đủ.

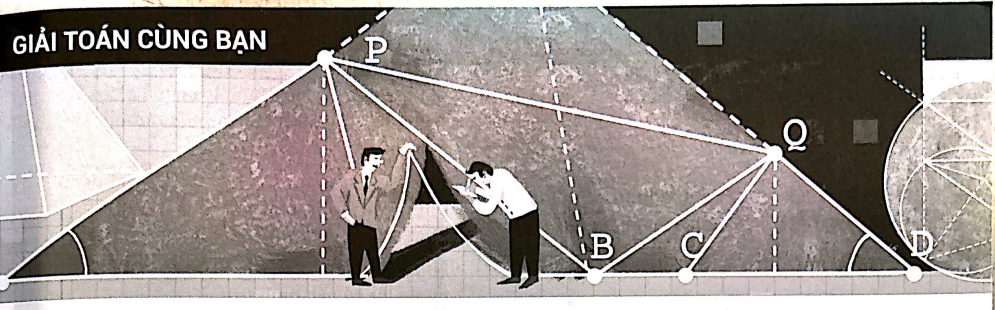


Hình 10. *Các phép biến đổi Reidemeister cho kết có hướng. Chú ý ta có hai $\vec{R}_1$.*

Định lý 3.19 (Polyak 2016). *Hai lược đồ kết định hướng D, D' xác định cùng một lớp kết định hướng tương đương nếu và chỉ nếu D' có thể nhận được từ D bằng một số hữu hạn phép biến đổi $\vec{R}_0$, $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ của hình 10.*

Chứng minh định lý trên hoàn toàn sơ cấp. Ta chứng minh rằng các phép biến đổi của của hình 10 sinh ra tất cả các phép biến đổi R_i có hướng còn lại. Trước khi có định lý này thì ta phải làm việc với nhiều phép biến đổi Reidemeister có hướng hơn.

(Còn tiếp)



MỘT BÀI TOÁN CỦA Henri Cartan

- Hà Huy Khoái -

Tôi từng mang bài toán sơ cấp sau đây ra "đố", và chưa thấy bạn nào giải được. Có lần tôi cũng đố một chuyên gia nước ngoài, người nhiều năm là thành viên của các Ban biên soạn Short List cho các kỳ IMO, và năm sau gặp lại, ông ấy xin tôi lời giải! Nói thế để thấy bài toán không hề dễ.

Vậy nhưng khi cho lời giải thì ai cũng thấy không cần quá 5 phút để hiểu nó! Đúng là "quả trứng của Colomb".

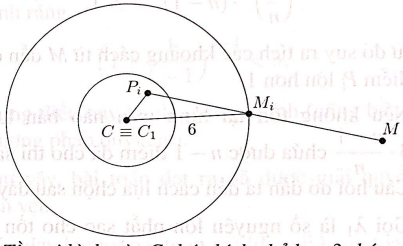
Bài toán. *Giả sử n là số nguyên dương tuỳ ý, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ là n điểm tuỳ ý trên mặt phẳng. Chứng minh rằng có thể chọn được không quá n hình tròn, có tổng các bán kính nhỏ hơn 6, sao cho hợp của chúng chứa tất cả các điểm M trên mặt phẳng mà tích các khoảng cách MP_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, nhỏ hơn 1.*

Cái khó của bài toán chính là ở chỗ các điểm P_i có thể chọn tuỳ ý, vậy mà tập hợp các điểm M thoả mãn bài ra lại luôn chứa trong hợp của không quá n hình tròn có tổng bán kính nhỏ hơn 6, một số cố định không phụ thuộc n.

Rõ ràng, nếu các điểm đã cho "đứng chụm vào một chỗ" thì rất dễ xử lý: nếu tồn tại đường tròn C_1 bán kính $r < 3$, sao cho mọi điểm P_i đều nằm bên trong đường tròn, thì ta chỉ việc xét đường tròn C đồng tâm với C_1 và có bán kính bằng 6. Khi đó mọi điểm M thoả mãn bài ra đều nằm trọn bên trong C, và bài toán được giải quyết. Thật vậy, nếu điểm M nào đó nằm ngoài C, thì với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta đều có

$$MP_i > M_iP_i \geq 6 - CP_i > 6 - r > 3$$

nên tích các MP_i lớn hơn 1.

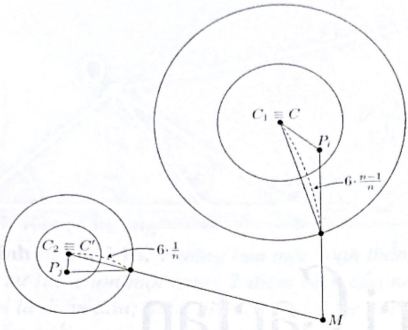


Tồn tại hình tròn C_1 bán kính nhỏ hơn 3 chứa n điểm.

Trường hợp đường tròn chứa toàn bộ n điểm như trên không tồn tại, dĩ nhiên ta sẽ muốn chọn đường tròn nào chứa "nhiều nhất có thể" các điểm P_i, với bán kính "nhỏ nhất có thể".

Ta xét khả năng "thuận lợi" tiếp theo. Để ý rằng $3 = 3 \cdot \frac{n}{n}$, ta giả sử có hình tròn C với bán kính $3 \cdot \frac{n-1}{n}$ chứa $n-1$ điểm P_i; điểm còn lại được chứa trong đường tròn C' bán kính $3 \cdot \frac{1}{n}$. Trong trường hợp này, bài toán cũng được giải quyết xong: chỉ cần lấy đường tròn C_1 đồng tâm với C, bán kính $6 \cdot \frac{n-1}{n}$ và đường tròn C_2 đồng tâm với C', bán kính $6 \cdot \frac{1}{n}$. Khi đó, nếu điểm M nằm bên ngoài cả hai đường tròn C_1, C_2 thì tích các khoảng cách từ M đến các điểm P_i sẽ lớn hơn

$$3^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \cdot 3 \cdot \frac{1}{n} = \left(\frac{3}{n}\right)^n \cdot (n-1)^{n-1}.$$



Tồn tại hình tròn C bán kính $3 \cdot \frac{n-1}{n}$ chứa $n-1$ điểm.

Dễ chứng minh (bằng quy nạp) bất đẳng thức sau đây đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$:

$$\left(\frac{3}{n}\right)^n \cdot (n-1)^{n-1} > 1,$$

từ đó suy ra tích các khoảng cách từ M đến các điểm P_i lớn hơn 1.

Nếu không tồn tại hình tròn nào bán kính $3 \cdot \dfrac{n-1}{n}$ chứa được $n-1$ điểm đã cho thì sao? Câu hỏi đó dẫn ta đến cách lựa chọn sau đây.

Gọi λ_1 là số nguyên lớn nhất sao cho tồn tại hình tròn C_1 bán kính $r_1 = 3\frac{\lambda_1}{n}$ chứa λ_1 điểm đã cho. (Trường hợp $\lambda_1 = n$ hoặc $\lambda_1 = n-1$ đã được nói đến ở trên).

Gọi λ_2 là số nguyên lớn nhất sao cho tồn tại hình tròn C_2 bán kính $r_2 = 3\frac{\lambda_2}{n}$ chứa λ_2 điểm trong số $n - \lambda_1$ điểm còn lại, và không chứa điểm nào thuộc C_1.

Rõ ràng $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Tiếp tục quá trình, ta nhận được các hình tròn

$$C_1, C_2, \cdots, C_q$$

với bán kính tương ứng là

$$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_q,$$

sao cho mỗi một trong các điểm P_i chỉ thuộc đúng một hình tròn. Hơn nữa, rõ ràng ta có:

$$q \leq n, \quad \sum_{i=1}^{q} r_i = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 3.$$

Cũng như trước đây, ta hy vọng rằng nếu gấp đôi bán kính những hình tròn vừa nhận được, thì điểm M thoả mãn bài ra phải được chứa trong hình tròn (gấp đôi) nào đó.

Xét các hình tròn $K_1, K_2, \cdots, K_q$, trong đó K_i là hình tròn đồng tâm với $C_i, i = 1, 2, \cdots, q$, bán kính K_i bằng $2r_i$.

Như vậy, cần chứng minh rằng, nếu M nằm bên ngoài tất cả các hình tròn K_i thì tích các khoảng cách từ M đến các điểm đã cho phải lớn hơn 1, tức là

$$MP_1 \cdot MP_2 \cdots MP_n > 1.$$

Để làm điều đó, ta cần ước lượng khoảng cách từ M đến các điểm P_i. Với cách chọn các hình tròn K_j với bán kính như trên, ta cần xem có bao nhiêu điểm cách M một khoảng bằng $\dfrac{3}{n}$, bao nhiêu điểm cách một khoảng bằng $\dfrac{2 \cdot 3}{n}, \ldots$.

Để ý rằng, các hình tròn C_j đã được chọn "tốt nhất" theo nghĩa nếu hình tròn nào đó chứa nhiều hơn λ_j điểm trong các điểm P_i thì bán kính của nó nhất thiết phải không nhỏ hơn bán kính C_j. Ta phát biểu điều này chính xác hơn qua Nhận xét sau.

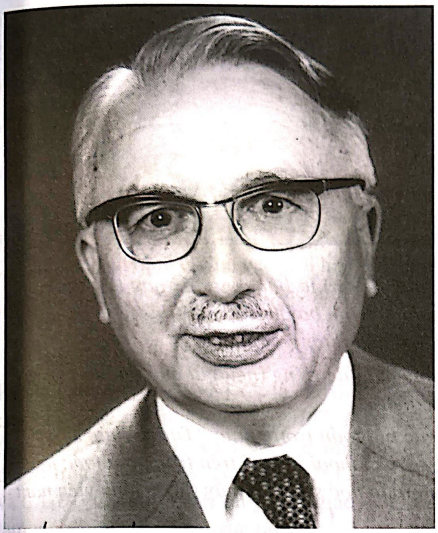
Nhận xét 1. Giả sử với số nguyên dương λ nào đó, $\lambda \leq n$ mà tồn tại hình tròn S bán kính $3\frac{\lambda}{n}$ chứa $k \geq \lambda$ điểm đã cho, thì ít nhất một trong các điểm đó phải thuộc một hình tròn C_j nào đó với bán kính $r_j \geq 3 \cdot \frac{\lambda}{n}$.

Tuy đơn giản, Nhận xét 1 cho ta cách ước lượng số điểm P_i cách điểm M như đã nói trên. Điều này được cho bởi nhận xét sau.

Nhận xét 2. Giả sử λ là số nguyên dương, $\lambda \leq n$, M là một điểm nào đó trên mặt phẳng, nằm ngoài tất cả các hình tròn K_i. Gọi S_λ là hình tròn tâm tại M, bán kính $R = 3\frac{\lambda}{n}$. Khi đó, S_λ chứa bên trong nó không quá $\lambda - 1$ điểm P_i đã cho.

Thật vậy, giả sử điểm P_i nào đó nằm bên trong hình tròn S_λ, đồng thời nằm bên trong hình tròn C_j nào đó. Như vậy hai đường tròn S_λ và C_j cắt nhau. Để đơn giản ký hiệu, gọi R, r tương ứng là bán kính của S_λ và C_j, d là khoảng cách giữa hai tâm đường tròn. Khi đó ta có

$$d < R + r.$$



Henri Cartan. Nguồn: Internet.

Theo giả thiết, điểm M, tâm của đường tròn S_λ, không nằm bên trong đường tròn K_j bán kính $2r_j$ nên suy ra $2r \le d$, tức là $r < R$.

Như vậy, bán kính của đường tròn C_j nhỏ hơn $3\frac{\lambda}{n}$. Theo Nhận xét 1, đường tròn S_λ không thể chứa bên trong nó nhiều hơn $(\lambda - 1)$ điểm trong số các điểm P_i. Nhận xét 2 được chứng minh.

Tổng các bán kính của các hình tròn K_i bằng 6. Như vậy, chỉ cần chứng minh rằng, nếu điểm M nào đó của mặt phẳng không thuộc bất kỳ hình tròn K_i nào thì tích các khoảng cách từ M đến các điểm P_i sẽ lớn hơn 1.

Giả sử M là một điểm như vậy. Khi đó theo Nhận xét 2,

– Không có điểm P_i nào nằm bên trong đường tròn S_1 tâm M, bán kính $\dfrac{1\cdot 3}{n}$ (lấy trong Nhận xét 2, $\lambda = 1$.)

– Có không quá một điểm trong số các điểm P_i đã cho nằm bên trong đường tròn S_2 tâm M, bán kính $\dfrac{2\cdot 3}{n}$.

Tương tự, có không quá $\lambda - 1$ điểm P_i nằm bên trong đường tròn S_λ tâm M, bán kính $\dfrac{\lambda\cdot 3}{n}$.

Như vậy, tích các khoảng cách từ M đến các điểm $P_1, P_2, \ldots, P_n$ không nhỏ hơn:

$$\frac{1\cdot 3}{n}\cdot\frac{2\cdot 3}{n}\cdot\frac{3\cdot 3}{n}\cdots\frac{n\cdot 3}{n} = n!\frac{3^n}{n^n}$$

Phép chứng minh bài toán được kết thúc bằng chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét 3. Với mọi số nguyên dương k, ta có:

$$k!\frac{3^k}{k^k} > 1.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Với $k = 1$, rõ ràng bất đẳng thức đúng.

Mặt khác ta có:

$$\frac{k!3^k}{k^k} = \frac{(k-1)!\cdot 3^{k-1}\cdot 3k}{(k-1)^{k-1}\cdot k\cdot(1+1/k-1)^{k-1}}.$$

Dùng giả thiết quy nạp, chỉ còn phải chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} < 3,$$

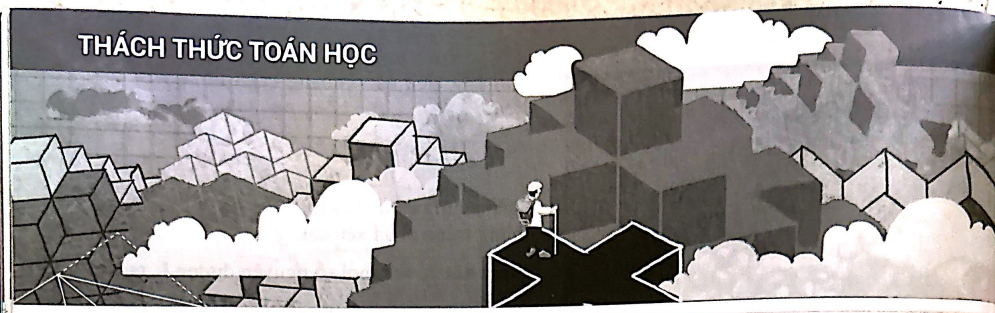
nhưng điều này lại dễ chứng minh (cũng bằng phương pháp quy nạp).

Như vậy, bài toán đặt ra đã được giải quyết trọn vẹn.

Trên đây là một bài toán mà lời giải hoàn toàn sơ cấp, và rất phù hợp với những kỳ thi Olympic toán học dành cho THPT. Vậy nhưng bài toán trên lại là phần quan trọng nhất trong bài báo của H. Cartan (1894-2008), một trong những nhà toán học lớn của thế kỷ 20: *Sur un theorème d'André Bloch*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 186, 624-626 (1928). Kết quả này được ứng dụng để đưa đến những định lý nổi tiếng trong giải tích phức về sự xác định các hàm và ánh xạ phân hình qua ảnh ngược của chúng.

"Phiên bản 3 chiều" của bài toán có thể dùng để nghiên cứu các điện tích.

Các bạn thử phát biểu và chứng minh bài toán tương tự trong trường hợp 3 chiều nhé. Hoàn toàn không có gì khó. Cũng có thể phát biểu lại bài toán trong trường hợp một chiều, cũng khá thú vị đấy!



- *Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kì này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).*
- *Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.*
- *Pi tin chắc rằng các lời giải đã được đăng tải trên Tạp chí cho các bài toán của "Thách thức kì này" chưa hẳn đã là những lời giải tốt nhất có thể cho các bài toán đó. Vì thế, Pi rất vui lòng đón nhận từ bạn đọc những lời giải mới tốt hơn, hay hơn cho các bài toán đã có lời giải được đăng tải trên Tạp chí.*

THÁCH THỨC KÌ NÀY

Dành cho cấp THCS

P141. Xét các số thực x, y, z khác 0, đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện:

$$x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx.$$

Hãy tìm tất cả các giá trị có thể của biểu thức

$$P = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}.$$

Hà Thanh (Cần Thơ) st.

P142. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Giả sử đường trung trực của cạnh AB cắt đường trung trực của cạnh CD tại điểm M nằm trong tứ giác đã cho và

$$\angle AMB = \angle CMD = 60^\circ.$$

Gọi K, L và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AM và DM. Hãy tính số đo của góc $\angle LKN$.

Lê Huy (Nam Định) st.

P143. Cho số nguyên tố p có 3 chữ số. Kí hiệu a, b, c tương ứng là chữ số hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị trong biểu diễn thập phân của p. Chứng minh rằng phương trình (ẩn x)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

không có nghiệm hữu tỉ.

Lưu Thanh Hà (Kiên Giang) st.

P144. Người ta chọn ra 590 số nguyên dương từ 2060 số nguyên dương đầu tiên, sao cho hai số tùy ý trong các số được chọn không hơn kém nhau $\lceil \pi \rceil$, $\lfloor 2\pi \rfloor$ hoặc $\lceil 3\pi \rceil$ (đơn vị). Chứng minh rằng 2018 là một trong các số được chọn. (Với x là số thực, $\lceil x \rceil$ kí hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x và $\lfloor x \rfloor$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Nguyễn Khắc Minh (Hà Nội)

Dành cho cấp THPT

P145. Cho dãy số $(a_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi: $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$ và

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2}+7}{a_n}$$

với mọi n nguyên dương.

1) Chứng minh rằng a_n là số nguyên, với mọi n nguyên dương.

2) Chứng minh rằng tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$ và tìm các giới hạn đó.

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh)

P146. Cho AA_1, BB_1 và CC_1 là các đường cao của tam giác nhọn ABC ($A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$). Gọi I_a, I_b và I_c tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AB_1C_1, BC_1A_1 và CA_1B_1. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác $I_aI_bI_c$ có cùng trực tâm.

Hà Minh Thơ (Phú Thọ) st.

P147. Cho x, y, z là các số thực dương, có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{243}{16} \leq \frac{1}{(x+yz)^2}+\frac{1}{(y+zx)^2}+\frac{1}{(z+xy)^2} \leq \frac{9}{16xyz}.$$

Hỏi mỗi dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Nguyễn Việt Hùng (Hà Nội)

P148. Cho hai số nguyên tố lẻ p, q ($p \neq q$) mà $p-1$ và $p+1$ đều không chia hết cho q. Cho số nguyên $n \geq 3$ và cho n số nguyên đôi một phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn điều kiện: $a_i - a_j$ chia hết cho q với mọi $i, j \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Chứng minh rằng đa thức

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - p$$

không thể phân tích được thành tích của hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Huỳnh Phước Trường (Tp. Hồ Chí Minh)

P149. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tổng bình phương của p số nguyên liên tiếp là một số chính phương.

Lê Quốc Hán (Nghệ An)

P150. Chia mặt phẳng tọa độ thành các ô vuông đơn vị bởi các đường thẳng song song với trục tung và đi qua các điểm nguyên trên trục hoành và các đường thẳng song song với trục hoành và đi qua các điểm nguyên trên trục tung. Xét bảng ô vuông gồm tất cả các ô vuông đơn vị nằm trong đường tròn bán kính 2018 và có tâm nằm ở gốc tọa độ. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị của bảng một số $+1$. Cho phép thay đổi các số trong bảng theo qui tắc: Mỗi lần, lấy tất cả các số nằm trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột hoặc trong cùng một đường chéo, rồi thay mỗi số bởi số đối của nó.

Hỏi, sau một số hữu hạn lần thực hiện liên tiếp phép thay đổi số nói trên, ta có thể đưa bảng số ban đầu về bảng số mà trong đó có đúng một số -1 và tất cả các số còn lại đều là $+1$ hay không?

(Hai số được gọi là *nằm trong cùng một đường chéo* nếu góc giữa đường thẳng nối tâm hai ô vuông chứa hai số đó và đường thẳng chứa trục hoành bằng 45°).

Nguyễn Hùng Sơn (Varsava, Ba Lan)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

P111. Cho tam giác ABC. D là một điểm tùy ý nằm trong cạnh AB. Các đường phân giác trong của các góc $\angle ABC$ và $\angle ADC$ cắt nhau tại E. Các đường phân giác trong của các góc $\angle BAC$ và $\angle BDC$ cắt nhau tại F. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh rằng các đường thẳng JD và AB vuông góc với nhau khi và chỉ khi đường tròn nội tiếp tam giác ADC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác BDC.

Lời giải (*của người chấm bài*).

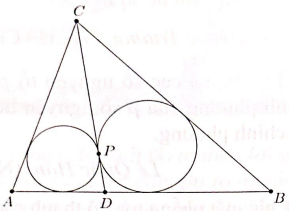
Trước hết, ta chứng minh hai Bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC. D là một điểm tùy ý nằm trong cạnh AB. Khi đó đường tròn nội tiếp tam giác ADC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác BDC khi và chỉ khi D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB.

Chứng minh.

• Giả sử D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB. Khi đó

$$DA = \frac{AB + AC - BC}{2} \text{ và } DB = \frac{BA + BC - AC}{2}.$$



Do đó

$$AC - DA = \frac{CB + CA - AB}{2} = BC - DB. \quad (1)$$

Gọi P là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ADC với cạnh CD. Với lưu ý tới (1), ta có:

$$2DP = DC + DA - AC = DC + DB - BC.$$

Suy ra, P là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD với cạnh CD.

Như vậy, các đường tròn nội tiếp các tam giác ADC và BDC cùng tiếp xúc CD tại P; vì thế, chúng tiếp xúc nhau.

• Ngược lại, giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ADC và đường tròn nội tiếp tam giác BDC tiếp xúc nhau tại P.

Vì CD là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn nêu trên nên CD tiếp xúc với cả hai đường tròn đó tại P. Do đó

$$DA + DC - AC = 2DP = DC + DB - BC.$$

Suy ra, $DA - DB = AC - BC$. (2)

Do D nằm trong cạnh AB nên

$$DA + DB = AB.$$

Kết hợp với (2), ta được

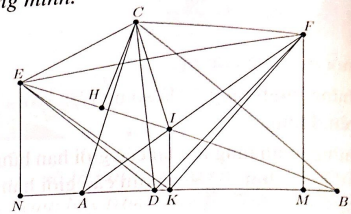
$$DA = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$

Do đó, D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB.

Bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC. D là một điểm tùy ý nằm trong cạnh AB. Các đường phân giác trong của các góc $\angle ABC$ và $\angle ADC$ cắt nhau tại E. Các đường phân giác trong của các góc $\angle BAC$ và $\angle BDC$ cắt nhau tại F. K là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB. Khi đó $KE \perp KF$.

Chứng minh.



Do DE, DF là phân giác trong của hai góc kề bù nên $DE \perp DF$.

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của F, E trên cạnh AB. Ta có:

$$\angle FDM = 90^\circ - \angle EDN = \angle DEN.$$

Do đó, $\Delta DFM \sim \Delta EDN$. Suy ra

$$DM \cdot DN = FM \cdot EN. \quad (3)$$

Dễ thấy, F và E lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\angle A$ của tam giác ADC và tâm đường tròn bàng tiếp góc $\angle B$ của tam giác BDC. Do đó, N và M tương ứng là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp đó với cạnh CD và với cạnh DB.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Do K là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB nên

$$IK \parallel FM \parallel EN.$$

Do đó, theo định lý Thales, ta có

$$\frac{KM}{IE} = \frac{AK}{AI}. \quad (4)$$

Vì F là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\angle A$ của tam giác ADC nên

$$\angle CFI = \frac{\angle ADC}{2} = \angle CDE. \quad (5)$$

Vì E là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\angle B$ của tam giác BDC nên

$$\angle CED = 90^\circ - \frac{\angle CBD}{2} = 180^\circ - \angle AIC = \angle CIF. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra $\Delta CED \sim \Delta CIF$. Do đó

$$\frac{ED}{IF} = \frac{CE}{CI}. \quad (7)$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên EI. Ta có:

$$\angle ICH = \angle BIC - 90^\circ = \frac{\angle CAB}{2} = \angle IAK.$$

Suy ra, $\Delta IAK \sim \Delta ICH$. Vì thế

$$\frac{AK}{CH} = \frac{IA}{IC}. \quad (8)$$

Vì F là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ADC nên

$$\angle CFI = \frac{\angle ADC}{2} = \angle EDC.$$

Suy ra, $\Delta ECH \sim \Delta DEN$. Do đó,

$$\frac{DN}{CH} = \frac{DE}{CE}. \quad (9)$$

Từ (8) và (9), suy ra

$$\frac{AK}{DN} = \frac{IA}{DF} \cdot \frac{CE}{CI}. \quad (10)$$

Từ (7) và (10), suy ra

$$\frac{AK}{DN} = \frac{IA}{DE} \cdot \frac{ED}{IF} = \frac{IA}{IF}. \quad (11)$$

Từ (4) và (11), suy ra

$$\frac{AK}{DN} = \frac{AK}{KM}.$$

Vì vậy, $DN = KM$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$DM = KN. \quad (12)$$

Từ (3) và (12), suy ra

$$FM \cdot EN = DM \cdot DN = KN \cdot KM.$$

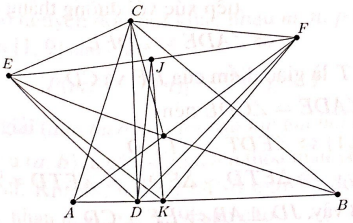
Do đó, $\frac{FM}{KN} = \frac{EN}{KM}$. Vì vậy, hai tam giác vuông KEN và FKM đồng dạng. Do đó

$$\angle EKF = 180^\circ - \angle FKM - \angle EKN$$
$$= 180^\circ - \angle FKM - \angle KFM = 90^\circ.$$

Vậy, $KE \perp KF$.

Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán.



Gọi K là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB.

Theo Bổ đề 2, $KE \perp KF$. Lại do DE, DF là phân giác trong của hai góc kề bù nên $DE \perp DF$. Do đó, các tam giác EKF và EDF là các tam giác vuông tại D. Vì thế, từ giả thiết J là trung điểm EF, ta có:

$$JD = \frac{EF}{2} = JK.$$

Do vậy, $JD \perp AB$ khi và chỉ khi D và K trùng nhau; nói cách khác, $JD \perp AB$ khi và chỉ khi D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB. Theo Bổ đề 1, điều này tương đương với đường tròn nội tiếp tam giác ADC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác BDC. Ta có điều phải chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Cho tới thời điểm bản thảo lên trang, Tòa soạn mới chỉ nhận được đúng một lời giải, của một bạn học sinh lớp 9 của Tp. Hồ Chí Minh. Lời giải đó là một lời giải chưa đúng vì tác giả của lời giải đã bỏ qua, không xét một số trường hợp cần thiết (do quan niệm sai là các trường hợp đó tương tự với các trường hợp đã xét?).

2. Qua lời giải trên, ta thấy có thể coi bài đã ra là một sự ghép nối cơ học của hai Bổ đề, 1 và 2. Bổ đề 2 là một kết quả đẹp và có ý nghĩa. Có một cách nhìn tương tự như Bổ đề 2 cho tâm nội tiếp. Cụ thể, *nếu gọi J, L là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ACD và BCD thì đường tròn ngoại tiếp tam giác DJL đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB. Do đó, nếu D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB thì DI chia đôi đoạn thẳng JL.*

Sẽ thú vị hơn, nếu bạn nhận ra rằng kết quả vừa nêu trên có liên quan chặt chẽ với bài P103 của Tạp chí Pi (xem Tạp chí Pi, tập 1, số 10, tháng 10.2017, trang 22). Sử dụng ý tưởng của bài P103, có thể mở rộng Bổ đề 2 cho tứ giác ngoại tiếp như sau:

Mở rộng Bổ đề 2. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). M là một điểm nằm trong cạnh CD. Đường thẳng AM cắt BC tại N. Gọi K, L và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam*

giác ADM, ABN và CMN. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN đi qua J.

3. Một hệ quả đẹp của Mở rộng Bổ đề 2 nêu trên là bài G8 trong IMO Short List 2009. Bài toán đó như sau:

G8 IMO Short List 2009. *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I). M là một điểm nằm trong cạnh CD. Đường thẳng AM cắt BC tại N. Gọi K, L và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ADM, ABN và CMN. Chứng minh rằng trực tâm tam giác JKL nằm trên đường thẳng AM.*

4. Sử dụng Mở rộng Bổ đề 2 (hay cũng có thể coi là kết quả của bài G8 IMO Short List 2009), có thể giải được một số bài toán khó trong Đề thi của các kỳ thi Chọn học sinh giỏi quốc gia cấp THPT môn Toán (VMO) và Chọn học sinh vào Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự IMO (VNTST). Cụ thể là hai bài toán sau:

Bài 6 VMO 2011. Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc $\angle ABC$, $\angle ACB$ là các góc nhọn. Xét một điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại D cắt các đường thẳng AB và AC tương ứng tại E và F. Gọi M, N và P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDE và CDF. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 5 VNTST 2015. Cho tam giác ABC nhọn, không cân và điểm P nằm bên trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$ với $\alpha > 180^\circ - \angle BAC$. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB và APC lần lượt cắt AC và AB tại E và F. Lấy điểm Q bên trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua đường thẳng EF. Đường phân giác trong của góc $\angle EDF$ cắt PA tại T.

a) Chứng minh

$$\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB.$$

b) Đường thẳng PA cắt DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ với tâm là điểm K. Đường thẳng DT cắt (K) tại điểm H. Chứng minh HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác DMN.

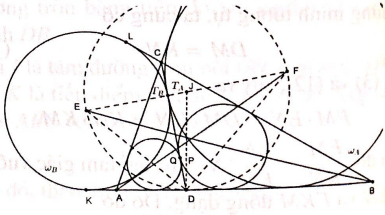
Trần Quang Hùng

Lời bàn.

Lời giải trên đây thể hiện một cách tiếp cận kết luận của bài đã ra; từ đó cho thấy một cách nhìn đối với cấu trúc Toán học của cấu hình được đề cập trong bài toán. Điểm đáng quí của cách nhìn này là nó giúp ta tìm ra mối liên hệ giữa bài đã ra và một số bài toán thú vị khác.

Dưới đây là một lời giải khác cho bài P111, gọi là Lời giải 2. Lời giải này thể hiện một cách tiếp cận khác, "ngây thơ" và mộc mạc, đối với kết luận của bài đã ra. Các kết quả được đề cập tới trong Lời giải 2 là những kết quả cơ bản, quen thuộc đối với học sinh THCS. Vì thế, với Lời giải 2, có thể coi bài đã ra là một sự "ghép nối" nhẹ nhàng, mềm mại của các kết quả lí thuyết cơ bản, được đề cập trong nội dung giảng dạy môn Toán cấp THCS hiện nay.

Lời giải 2.



Vì DE, DF là phân giác trong của hai góc kề bù nên $DE \perp DF$. Do đó, tam giác EDF vuông tại D. Vì thế, J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EDF. Suy ra:

$$JD \perp AB \Leftrightarrow \text{đường tròn}(EDF) \text{ tiếp xúc với đường thẳng } AB$$
$$\Leftrightarrow \angle ADE = \angle DFE \qquad (2.1)$$

Gọi T là giao điểm của EF và CD.

Vì $\angle ADE = \angle CDE$ nên

$$(2.1) \Leftrightarrow \angle EDT = \angle EFD$$
$$\Leftrightarrow \Delta ETD \sim \Delta EDF \Leftrightarrow \angle ETD = 90^\circ.$$

Như vậy, $JD \perp AB \Leftrightarrow EF \perp CD$. (2.2)

Từ định nghĩa của các điểm E và F, hiển nhiên suy ra E là tâm đường tròn ω_B bàng tiếp góc $\angle B$ của tam giác BDC và F là tâm đường tròn ω_A bàng tiếp góc $\angle A$ của tam giác ADC. Giả sử, ω_B và ω_A, tương ứng, tiếp xúc cạnh CD tại T_B và T_A. Dễ thấy, ta có

$$EF \perp CD \Leftrightarrow T_B \equiv T_A \equiv T$$
$$\Leftrightarrow DT_B = DT_A. \quad (2.3)$$

Giả sử ω_B tiếp xúc với các đường thẳng AB và BC tương ứng tại K và L. Ta có $BK = BL$. Mà

$$BK = BD + DK = BD + DT_B$$

và

$$BL = BC + CL = BC + CT_B = BC + CD - DT_B,$$

nên ta được

$$BD + DT_B = BC + CD - DT_B.$$

Vì vậy $DT_B = \frac{1}{2}(BC + CD - BD) = CP$,

với P là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác BCD với cạnh CD.

Xét tương tự đối với ω_A, ta sẽ được

$$DT_A = CQ,$$

với Q là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ACD với cạnh CD.

Từ đó, ta có:

$$DT_B = DT_A \Leftrightarrow CP = CQ. \quad (2.4)$$

Từ (2.2), (2.3) và (2.4), suy ra

$$JD \perp AB \Leftrightarrow CP = CQ.$$

Mà $CP = CQ$ (tức, $P \equiv Q$) khi và chỉ khi đường tròn nội tiếp tam giác ADC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác BDC, nên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

NKM

P112. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a, b) để đa thức $P(x) = x^2 - ax + b$ có tính chất: tồn tại ba số nguyên đôi một khác nhau m, n, p thuộc đoạn $[1; 9]$ sao cho

$$|P(m)| = |P(n)| = |P(p)| = 7.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*). Giả sử (a, b) là cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, tồn tại ba số nguyên đôi một khác nhau $m, n, p \in [1; 9]$ sao cho

$$|P(m)| = |P(n)| = |P(p)| = 7,$$

hay $P(m), P(n), P(p) \in \{-7; 7\}$. (1)

Hiển nhiên, không thể có $P(m) = P(n) = P(p)$, vì khi đó, đa thức bậc hai

$$Q(x) = P(x) - P(m)$$

sẽ có ba nghiệm, là điều vô lí.

Vì thế, từ (1) suy ra trong ba số $P(m), P(n)$ và $P(p)$, có đúng hai số bằng nhau và số còn lại khác cả hai số đó. Không mất tổng quát, giả sử $P(m) = P(n) \neq P(p)$. Chỉ có thể xảy ra:

- *Trường hợp 1:* $P(m) = P(n) = 7$ và $P(p) = -7$.

Không mất tổng quát, giả sử $m > n$. (2)

Vì $P(m) = P(n) = 7$ và $m \neq n$ nên m và n là hai nghiệm của phương trình bậc hai (ẩn x):

$$x^2 - ax + b - 7 = 0.$$

Do đó, theo định lí Viete, ta có:

$$a = m + n. \quad (3)$$

Vì thế

$$14 = P(m) - P(p) = m^2 - p^2 - a(m - p)$$
$$= m^2 - p^2 - (m + n)(m - p)$$
$$= (m - p)(p - n). \quad (4)$$

Do $14 > 0$ nên $m - p$ và $p - n$ cùng dấu. Kết hợp với (2), suy ra

$$m - p, p - n > 0, \quad (5)$$

vì nếu ngược lại thì $m < p < n$, mâu thuẫn với (2).

Do $m, n, p \in [1; 9]$ nên

$$m - p, p - n < 14. \quad (6)$$

Từ (4), (5) và (6), suy ra

$$\begin{cases} m - p = 2 \\ p - n = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m - p = 7 \\ p - n = 2; \end{cases}$$

hay:

$$\begin{cases} m = p + 2 \\ p = n + 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = p + 7 \\ p = n + 2. \end{cases}$$

Suy ra $$m = n + 9 \geq 10,$$

mâu thuẫn với giả thiết $m \in [1; 9]$. Điều này cho thấy trường hợp 1 không thể xảy ra.

• *Trường hợp 2:* $P(m) = P(n) = -7$ và $P(p) = 7$.

Không mất tổng quát, giả sử

$$|m-p| \le |p-n|. \quad (7)$$

Vì $P(m) = P(n) = -7$ và $m \ne n$ nên m và n là hai nghiệm của phương trình bậc hai (ẩn x):

$$x^2 - ax + b + 7 = 0.$$

Do đó, theo định lí Viete, ta có: $a = m + n$ và $b = mn - 7$. (8)

Vì thế, tương tự như ở trường hợp 1, ta có:

$$-14 = P(m) - P(p) = (m-p)(p-n).$$

Suy ra: $|m-p| \cdot |p-n| = 14$. (9)

Do $-14 < 0$ nên $m-p$ và $p-n$ trái dấu. (10)

Do $m, n, p \in [1;9]$ nên

$$|m-p|, |p-n| < 14. \quad (11)$$

Từ (7), (9) và (11), suy ra:

$$|m-p| = 2 \text{ và } |p-n| = 7.$$

Kết hợp với (10), ta được:

$$\begin{cases} m-p=2 \\ p-n=-7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m-p=-2 \\ p-n=7; \end{cases}$$

hay:

$$\text{(I)} \begin{cases} m=p+2 \\ n=p+7 \end{cases} \text{ hoặc (II)} \begin{cases} m=p-2 \\ n=p-7. \end{cases}$$

+) Xét (I). Vì $n \le 9$ nên $p \in \{1;2\}$.

– Với $p = 1$, ta được $m = 3$ và $n = 8$. Do đó, theo (8), $a = 11$ và $b = 17$.

– Với $p = 2$, ta được $m = 4$ và $n = 9$. Do đó, theo (8), $a = 13$ và $b = 29$.

+) Xét (II). Vì $n \ge 1$ và $p \le 9$ nên $p \in \{8;9\}$.

– Với $p = 8$, ta được $m = 6$ và $n = 1$. Do đó, theo (8), $a = 7$ và $b = -1$.

– Với $p = 9$, ta được $m = 7$ và $n = 2$. Do đó, theo (8), $a = 9$ và $b = 7$.

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, tất cả các cặp số $(11,7)$, $(13,29)$, $(7,-1)$, $(9,7)$ đều thỏa mãn yêu cầu đề bài và vì thế, chúng là tất cả các cặp số cần tìm.

Bình luận và Nhận xét.

1. Tòa soạn nhận được lời giải của nhiều bạn học sinh gửi tới. Trong số đó, chỉ có hai bạn (cùng học cấp THCS) có cách tiếp cận bài toán theo hướng đã thể hiện trong lời giải nêu trên; đó là, tìm cách xác định các cặp số (a, b) thông qua việc xác định các giá trị m, n tương ứng. Các bạn còn lại đã tìm cách xác định các cặp (a, b) dựa trên điều kiện cần để một phương trình bậc hai có nghiệm nguyên. Nhiều bạn vẫn mắc nhược điểm không thử lại các cặp (a, b) tìm được, mặc dù quá trình suy luận của các bạn để tìm ra các cặp số đó là quá trình "suy ra".

2. Với việc châm chước nhược điểm vừa nêu trên, cũng như chấp nhận (đối với một số lời giải) việc trình bày vắn tắt, các bạn có tên sau đây có lời giải đúng: *Nguyễn Ngân Chi* (lớp 7C, trường THCS Lý Thái Tổ, Quận Cầu Giấy, Hà Nội), *Catherine Doan* (lớp 7A, Ashbury College, Ottawa, ON, Canada), *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh), *Hồ Long Nhật* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Lê Quí Đôn, Khánh Hòa) và một bạn không ghi họ, tên, nơi học trong lời giải.

3. Có thể phát biểu bài đã ra dưới dạng sau: *"Tìm tất cả các đa thức bậc hai $P(x)$ có tính chất: tồn tại 3 số nguyên đôi một phân biệt m, n, p thuộc đoạn [1; 9] sao cho*

$$|P(m)| = |P(n)| = |P(p)| = 7."$$

4. Ta biết rằng, một đa thức có bậc không vượt quá n $(n \in \mathbb{Z}, n \ge 1)$ được xác định hoàn toàn, khi biết giá trị của nó tại $n+1$ giá trị của biến số (còn nói: *tại $n+1$ điểm*). Cụ thể, ta có kết quả sau:

"Cho số nguyên $n \ge 1$. Cho $2(n+1)$ số thực $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(x_i \ne x_j \ \forall i \ne j)$ và $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Khi đó, đa thức $P(x)$, được xác định bởi công thức

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

là đa thức duy nhất có tính chất: $P(x_i) = a_i$, với mọi $i = 0, 1, \ldots, n$."

Công thức trên có tên gọi là *Công thức nội suy Lagrange*.

Chẳng hạn, như ở lời giải nêu trên, sau khi tìm được $m = 3$, $n = 8$ và $p = 1$ ở trường hợp $P(m) = P(n) = -7$ và $P(p) = 7$, ta sẽ có đa thức

$P(x)$ là:

$$P(x) = (-7)\cdot\frac{x-8}{3-8}\cdot\frac{x-1}{3-1} + (-7)\cdot\frac{x-3}{8-3}\cdot\frac{x-1}{8-1}$$
$$+7\cdot\frac{x-3}{1-3}\cdot\frac{x-8}{1-8},$$

hay $P(x) = x^2 - 11x + 17$.

Như thế, với cách phát biểu như đã nêu ở mục 3 trên đây, có thể coi bài đã ra như một "cú hích" nhẹ, nhằm khích lệ việc tìm tòi các tình huống "tìm đa thức", dưới góc nhìn "nội suy Lagrange".

Nguyễn Khắc Minh

P113. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn điều kiện:

$$5^x \cdot 3^y = 3z^2 + 2z - 1.$$

Lời giải (*phỏng theo lời giải của các bạn Catherine Doan, lớp 7A, Ashbury College, Ottawa, ON, Canada; Lê Gia Bảo, lớp 10T, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa*).

Giả sử (x, y, z) là bộ ba số nguyên dương thỏa mãn điều kiện nêu trong đề bài.

Ta có:

$$5^x \cdot 3^y = (3z-1)(z+1). \quad (1)$$

Do đó

$$(3z-1)(z+1) \vdots 3^y.$$

Mà $(3z-1, 3^y) = 1$ (vì $3z-1 \not\vdots 3$) nên suy ra

$$z+1 \vdots 3^y. \quad (2)$$

Từ (1), ta còn có: $(3z-1)(z+1) \vdots 5^x$. (3)

Do

$$(3z-1) + 2(z+1) = 5z+1 \not\vdots 5$$

nên $3z-1$ và $z+1$ không thể cùng chia hết cho 5. Vì thế, từ (3) suy ra, trong hai số vừa nêu, có một số chia hết cho 5^x và số còn lại không chia hết cho 5.

Như vậy, nếu $3z-1 \not\vdots 5$ thì $z+1 \vdots 5^x$. Kết hợp với (2) suy ra

$$z+1 \vdots 5^x \cdot 3^y.$$

Mà từ (1) ta có $5^x \cdot 3^y \vdots z+1$ nên $z+1 = 5^x \cdot 3^y$. Kéo theo, $3z-1 = 1$, hay $z = 0$, mâu thuẫn với giả thiết z là số nguyên dương. Vì thế, ta có $3z-1 \vdots 5^x$. Kết hợp với (2) và (1), suy ra

$$3z-1 = 5^x \text{ và } z+1 = 3^y. \quad (4)$$

Do đó

$$5^x - 3^{y+1} = (3z-1) - 3(z+1) = -4,$$

hay $5^x = 3^{y+1} - 4$. (5)

Vì $5 \equiv 1 \pmod 4$ nên $5^x \equiv 1 \pmod 4$; kết hợp với (5) suy ra $3^{y+1} \equiv 1 \pmod 4$. (6)

Vì $3^2 \equiv 1 \pmod 4$ nên với mọi số nguyên dương k,

$$3^{2k} \equiv 1 \pmod 4 \text{ và } 3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 4.$$

Vì thế, từ (6) suy ra $y+1 = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Thay $y+1 = 2k$ vào (5), ta được:

$$5^x = 3^{2k} - 4 = (3^k - 2)(3^k + 2). \quad (7)$$

Mà

$$(3^k+2) - (3^k-2) = 4 \not\vdots 5$$

nên $3^k - 2$ và $3^k + 2$ không thể cùng chia hết cho 5.

Do đó, từ (7) suy ra một trong 2 số vừa nêu trên bằng 1 và số còn lại bằng 5^x.

Từ đó, do $3^k + 2 > 1$ nên

$$3^k - 2 = 1 \text{ và } 3^k + 2 = 5^x.$$

Suy ra, $k = 1$ và $x = 1$. Do đó, $y = 2k - 1 = 1$; kéo theo, $z = 3^y - 1 = 2$.

Ngược lại, bằng cách tính toán trực tiếp, dễ thấy bộ số $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ thỏa mãn điều kiện đã nêu trong đề bài.

Vậy, có duy nhất bộ ba số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu đề bài, là bộ ba số vừa nêu trên.

Bình luận và Nhận xét.

1. Tòa soạn đã nhận được nhiều lời giải cho bài toán, từ các bạn học sinh cấp THCS, cấp THPT và cả từ các bạn sinh viên đại học. Đáng tiếc là không phải tất cả các bạn đều có lời giải đúng; có những bạn cho lời giải sai chỉ vì những sự ngộ nhận rất đơn giản, chẳng hạn như: Với mọi n nguyên dương, $5^n + 4$ không chia hết cho 3.

2. Một số bạn, do chọn cách tiếp cận bài toán chưa hợp lí nên đã làm phức tạp tình huống, dẫn đến lời giải dài dòng, cồng kềnh; chẳng hạn, có bạn đã phức tạp hóa tình huống bằng việc qui bài đã ra về bài toán tìm giá trị của các tham số nguyên dương x, y sao cho phương trình bậc 2 (ẩn z)

$$3z^2 + 2z - (1 + 5^x \cdot 3^y) = 0$$

có nghiệm nguyên dương.

3. Một số bạn **vẫn mắc nhược điểm quên kiểm tra lại** bộ số (x,y,z) tìm được, mặc dù quá trình suy luận của các bạn để tìm ra bộ số đó là quá trình "suy ra".

4. Với việc châm chước nhược điểm vừa nêu trên, cũng như chấp nhận (đối với một số lời giải) một vài lỗi nhỏ trong các lập luận logic, ngoài các bạn có tên đã nêu trong phần Lời giải, các bạn có tên sau đây cũng có lời giải đúng (*lời giải bỏ sót các trường hợp cần xét không được coi là lời giải đúng*): *Nguyễn Ngân Chi* (lớp 7C, trường THCS Lý Thái Tổ, Quận Cầu Giấy, Hà Nội), *Nguyễn Quang Minh* (lớp 9/3 trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai), Hồ Long Nhật (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Lê Quí Đôn, Khánh Hòa), *Hoàng Lê Nhật Tùng* (sinh viên K61 Sư phạm Toán, ĐHQG Hà Nội) và *một bạn không ghi họ, tên*, nơi học trong lời giải.

5. Bài đã ra là một tình huống đơn giản, có dạng cơ bản, góp phần giúp học sinh củng cố hiểu biết về phân tích chuẩn của một số nguyên dương. Cụ thể, với lưu ý 3 và 5 là các số nguyên tố, có thể thấy đẳng thức đã cho trong đề bài cho biết phân tích chuẩn của số nguyên dương

$$A = 3z^2 + 2z - 1.$$

Từ đó, với việc có thể phân tích A thành tích

$$A = (3z-1)(z+1),$$

nhờ việc hiểu đúng, hiểu kĩ về phân tích chuẩn, dễ dàng tìm ra dạng của phân tích chuẩn của các số $3z-1$ và $z+1$:

$$3z-1 = 5^{\alpha} \text{ và } z+1 = 3^{y}\cdot 5^{\beta}$$

$(\alpha,\beta \in \mathbb{N}, \alpha+\beta = x)$; làm cơ sở cho việc tìm ra z và các số mũ x,y trong phân tích chuẩn của A.

Lời giải trên đây cho thấy một cách xử lý đẹp trong việc xét các số mũ α,β.

Lưu Thanh Hà

P114. Cho bảng ô vuông kích thước 111×2017 (bảng gồm 111 hàng và 2017 cột). Điền vào mỗi ô vuông con của bảng một số 0 hoặc 1 sao cho trong mỗi cột có ít nhất 85 số 1. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi 106 hàng sao cho ở bảng mới nhận được (gồm 5 hàng và 2017 cột), chỉ có thể có tối đa 1 cột chứa toàn số 0.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Đánh số thứ tự các hàng, từ dưới lên trên, bởi 1, 2, ..., 111 và đánh số thứ tự các cột, từ trái qua phải, bởi 1, 2, ..., 2017.

Với mỗi $i \in \{1;2;...;111\}$, kí hiệu r_i là số số 1 nằm ở hàng thứ i.

Với mỗi $k \in \{1;2;...;2017\}$, kí hiệu c_k là số số 1 nằm ở cột thứ k.

Hiển nhiên, ta có:

$$\sum_{i=1}^{111} r_i = \sum_{k=1}^{2017} c_k. \qquad (*)$$

Do $c_k \geq 85$ với mọi $k \in \{1;2;...;2017\}$ nên

$$\sum_{k=1}^{2017} c_k \geq 85\times 2017 = 171.445.$$

Do đó, từ $(*)$, ta có

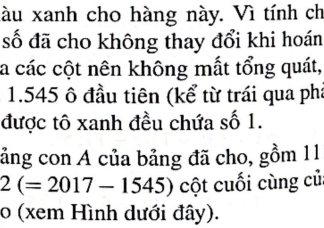
$$\sum_{i=1}^{111} r_i \geq 171.445.$$

Suy ra, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{171.445}{111} \right\rceil = 1.545 \text{ (số)}.$$

Tô màu xanh cho hàng này. Vì tính chất của bảng số đã cho không thay đổi khi hoán đổi vị trí của các cột nên không mất tổng quát, giả sử tất cả 1.545 ô đầu tiên (kể từ trái qua phải) của hàng được tô xanh đều chứa số 1.

Xét bảng con A của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 472 $(= 2017 - 1545)$ cột cuối cùng của bảng đã cho (xem Hình dưới đây).



Hiển nhiên, bảng A cũng có tính chất đúng như bảng đã cho; nghĩa là, ở mỗi cột của bảng A

cũng có ít nhất 85 số 1. Vì thế, bằng các lập luận tương tự trên, suy ra trong bảng A, tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 472}{111} \right\rceil = 362 \text{ (số)}.$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng đã được tô xanh). Tô hàng vừa nêu trên của bảng A bởi màu đỏ; trường hợp hàng đó là một phần của hàng đã được tô xanh, ta tô lại 472 ô, từ ô thứ 1546 đến ô thứ 2017 của hàng xanh, bởi màu đỏ. Tương tự trên, không mất tổng quát, giả sử tất cả 362 ô đầu tiên của hàng được tô đỏ, xét trong bảng A, đều chứa số 1.

Xét bảng con B của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 110 $(= 472 - 362)$ cột cuối cùng của bảng đã cho. Cũng như với bảng A, suy ra trong bảng B, tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 110}{111} \right\rceil = 85 \text{ (số)}.$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu).

Tô hàng vừa nêu trên của bảng B bởi màu hồng; trường hợp hàng đó là một phần của hàng chứa những ô đã được tô màu, ta tô lại 110 ô, từ ô thứ 1908 đến ô thứ 2017, bởi màu hồng. Tương tự trên, không mất tổng quát, giả sử tất cả 85 ô đầu tiên của hàng được tô hồng, xét trong bảng B, đều chứa số 1.

Xét bảng con C của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 25 $(= 110 - 85)$ cột cuối cùng của bảng đã cho. Cũng như với bảng A, suy ra trong bảng C, tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 25}{111} \right\rceil = 20 \text{ (số)}.$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu).

Tô hàng vừa nêu trên của bảng C bởi màu tím; trường hợp hàng đó là một phần của hàng đã được tô màu, ta tô lại 25 ô, từ ô thứ 1934 đến ô thứ 2017, bởi màu tím. Tương tự trên, không mất tổng quát, giả sử tất cả 20 ô đầu tiên của hàng được tô tím, xét trong bảng C, đều chứa số 1.

Xét bảng con D của bảng đã cho, gồm 111 hàng và 5 $(= 25 - 20)$ cột cuối cùng của bảng đã cho. Cũng như với bảng A, suy ra trong bảng D, tồn tại một hàng mà số số 1 ở hàng đó không ít hơn

$$\left\lceil \frac{85 \times 5}{111} \right\rceil = 4 \text{ (số)}.$$

(Hàng này có thể là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu).

Tô hàng vừa nêu trên của bảng D bởi màu vàng; trường hợp hàng đó là một phần của hàng có chứa những ô đã được tô màu, ta tô lại 5 ô, từ ô thứ 2013 đến ô thứ 2017, bởi màu vàng.

Như vậy, ta có tối đa 5 hàng, mà mỗi hàng đều chứa những ô đã được tô màu, và do đó, có tối thiểu 106 hàng, mà mỗi hàng đều không chứa ô nào đã được tô màu. Bỏ đi 106 hàng vừa nêu, ta sẽ có một bảng gồm 5 hàng và 2017 cột, mà số cột có chứa số 1 không ít hơn tổng số số 1 nằm ở các ô đã được tô màu. Theo trên, số số 1 nằm ở các ô được tô màu xanh, đỏ, hồng, tím, vàng tương ứng không ít hơn 1.545, 362, 85, 20, 4. Vì thế, tổng số số 1 nằm ở các ô đã được tô màu không ít hơn:

$$1.545 + 362 + 85 + 20 + 4 = 2016 \text{ (số)}.$$

Từ đó suy ra, bảng gồm 5 hàng và 2017 cột vừa nêu trên chỉ có thể có tối đa 1 cột không chứa số 1, hay nói cách khác, chứa toàn số 0.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Lưu ý: Với x là số thực, $\lceil x \rceil$ kí hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x.

Bình luận và Nhận xét.

1. Khi tìm lời giải cho bất cứ bài toán nào, trước hết, cần tìm hiểu, phân tích các dữ liệu đã nêu trong đề bài, để biết đề bài cho cái gì, "bắt" làm cái gì. Với bài đã ra, khá dễ dàng để thấy "đề bài cho một đánh giá về tổng số số 1 có trong bảng (thông qua giả thiết về số cột và số số 1 tối thiểu ở mỗi cột) và yêu cầu chứng minh sự tồn tại của 5 hàng mà số số 1, đôi một khác cột, trong 5 hàng đó không ít hơn 2016 (nói cách khác, chứng minh sự tồn tại của một bảng gồm 5 hàng và 2017 cột mà ở bảng đó chỉ có thể có tối đa 1 cột không có số 1 nào (tức, chứa toàn số 0)). Hi vọng, với việc hiểu như thế, bạn sẽ thấy sự tự nhiên của lời giải nêu trên.

2. Nhằm giúp các bạn học sinh nhỏ tuổi (đang học các lớp 5, 6, 7 chẳng hạn) không gặp khó khăn trong việc theo dõi, lời giải của bài ra đã được trình bày tỉ mỉ, chi tiết hơn nhiều so với mức cần thiết. Vì thế, nếu chỉ nhìn lướt qua, độc giả sẽ có cảm giác bài đã ra là một bài toán rất khó, vì lời giải của nó rất dài!

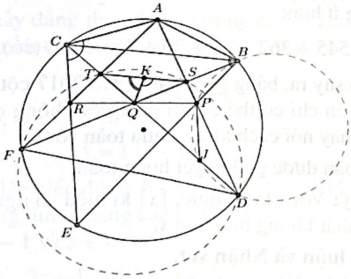
3. Tới thời điểm bản thảo của Tạp chí vào nhà in, Tòa soạn vẫn chưa nhận được một lời giải nào, từ độc giả.

Nguyễn Khắc Minh

P115. Trên một đường tròn cho trước, lần lượt, theo chiều kim đồng hồ, lấy các điểm đôi một phân biệt A, B, D, E, F, C sao cho $AB = AC$. AD cắt BE, BF tương ứng tại P, S; AF cắt CD, CE tương ứng tại T, R. Gọi Q là giao điểm của BF và CD. Trên đoạn thẳng ST, lấy điểm K sao cho $\angle SKQ = \angle ACE$. Chứng minh rằng

$$\frac{KS}{KT} = \frac{QP}{QR}.$$

Lời giải 1 (*phỏng theo lời giải của tác giả bài toán*).



Từ giả thiết suy ra A là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (ABC); do đó:

$$\angle TDS = \angle CDA = \angle AFB = \angle TFS.$$

Vì thế, $SDFT$ là tứ giác nội tiếp; suy ra

$$\angle KSQ = \angle TSF = \angle TDF = \angle CDF$$
$$= \angle CAF = \angle CAR.$$

Từ đó, để ý rằng

$$\angle QKS = \angle ECA = \angle RCA,$$

suy ra $\Delta QSK \sim \Delta RAC$. Do đó, $\dfrac{KS}{KQ} = \dfrac{CA}{CR}$.

Tương tự, ta cũng có $\Delta QKT \sim \Delta PBA$; do đó,

$$\frac{KQ}{KT} = \frac{BP}{BA}.$$

Vì thế, ta có:

$$\frac{KS}{KT} = \frac{KS}{KQ} \cdot \frac{KQ}{KT} = \frac{CA}{CR} \cdot \frac{BP}{BA} = \frac{BP}{CR} \quad (1)$$

(do $AB = AC$, theo giả thiết).

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp $ADCEBF$, suy ra các điểm P, Q, R thẳng hàng.

Gọi J là giao điểm thứ hai, khác D, của CD và đường tròn (BPD). Khi đó, dễ thấy, ta có $\Delta BJC \sim \Delta BPA$.

Suy ra

$$\frac{BJ}{BP} = \frac{BC}{BA}$$

và

$$\angle CBA = \angle PBA - \angle PBC = \angle JBC - \angle PBC$$
$$= \angle JBP.$$

Vì thế, $\Delta BJP \sim \Delta BCA$; suy ra, $PB = PJ$.

Do tứ giác $BDJP$ nội tiếp, nên

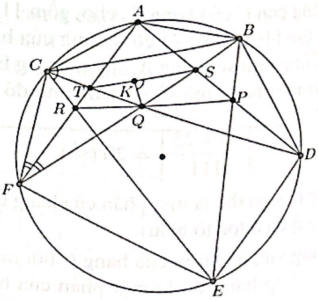
$$\angle PJQ = \angle PBD = \angle EBD = \angle ECD = \angle RCD.$$

Suy ra $PJ \parallel CR$. Do đó

$$\frac{BP}{CR} = \frac{PJ}{CR} = \frac{QP}{QR}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{KS}{KT} = \dfrac{QP}{QR}$. Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2 (*phỏng theo lời giải của bạn Nguyễn Doãn Hải, lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương*).



Áp dụng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp $ADCEBF$, suy ra các điểm P, Q, R thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác QRF với cát tuyến ASP, ta được:

$$\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{AR}{AF}\cdot\frac{SF}{SQ}=1. \quad (1)$$

Do $AB=AC$ nên A là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (ABC). Vì thế, FA là phân giác của góc $\angle CFB$; suy ra

$$\angle CFA=\angle AFB=\angle AFS \quad (2)$$

và

$$\angle TDS=\angle ADC=\angle ABC=\angle ACB$$
$$=\angle AFB=\angle TFS.$$

Do đó, $SDFT$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra

$$\angle CAF=\angle CDF=\angle TDF=\angle TSF. \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra $\Delta CAF\sim\Delta TSF$. Do đó

$$\frac{SF}{AF}=\frac{TS}{CA}. \quad (4)$$

Hơn nữa, do

$$\angle CAR=\angle CAF=\angle TSF=\angle KSQ$$

và $\angle ACR=\angle ACE=\angle SKQ$,

nên $\Delta ACR\sim\Delta SKQ$. Do đó

$$\frac{AR}{SQ}=\frac{AC}{SK}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$\frac{AR}{AF}\cdot\frac{SF}{SQ}=\frac{SF}{AF}\cdot\frac{AR}{SQ}=\frac{TS}{CA}\cdot\frac{AC}{SK}=\frac{TS}{SK}.$$

Kết hợp với (1), ta được

$$\frac{PQ}{PR}\cdot\frac{TS}{SK}=1.$$

Suy ra $\frac{KS}{ST}=\frac{PQ}{PR}$. Do đó

$$\frac{KS}{KT}=\frac{KS}{ST-KS}=\frac{PQ}{PR-PQ}=\frac{QP}{QR}.$$

Bài toán được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Dựa vào các lời giải trên đây, có thể chứng minh được $QK\parallel AE$ và $ST\parallel BC$; từ đó, ta có được cách dựng điểm K thoả mãn yêu cầu đề bài.

2. Trong Lời giải 1 nêu trên, kết quả quen thuộc dưới đây đã được sử dụng trong việc xét hai đường tròn cắt nhau, đường tròn ngoại tiếp lục giác $ABDEFC$ và đường tròn (BPD), để rút ra kết luận $\Delta BJC\sim\Delta BPA$:

" Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B. Xét các điểm $M\in(O_1)$ và $N\in(O_2)$. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

1/ M,B,N cùng thuộc một đường thẳng;

2/ $(BA;BM)\equiv(BA;BN)\pmod{\pi}$;

3/ $(\overrightarrow{O_1A};\overrightarrow{O_1M})\equiv(\overrightarrow{O_2A};\overrightarrow{O_2N})\pmod{2\pi}$;

4/ Các tam giác AMN và AO_1O_2 đồng dạng (và cùng hướng)."

Kết quả nêu trên là một kết quả cơ bản, được sử dụng để giải quyết rất nhiều bài toán.

3. Một số bạn cho lời giải sai do đã mắc những lỗi rất cơ bản, như "số đo của góc nội tiếp *bằng số đo* của cung bị chắn", "số đo của góc có đỉnh nằm trong đường tròn *bằng tổng số đo* của hai cung bị chắn", ...

4. Với việc châm chước (đối với một số lời giải) đôi lỗi "chính tả" trong các biến đổi góc hay tỉ số, sau khi vừa chăm chỉ gọt khoai (theo phân công của thủ trưởng gia đình), vừa kiểm tra chu đáo, tỉ mỉ tất cả các lời giải mà Tòa soạn đã nhận được cho tới thời điểm bản thảo được đưa đi chế bản, chúng tôi khẳng định, cùng với lời giải của bạn Nguyễn Doãn Hải đã nêu ở trên, lời giải của các bạn có tên sau đây là lời giải đúng: *Nguyễn Đức Toàn* (lớp 10A1, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); *Võ Đỗ Hoàng Tín* (10CT, THPT Nguyễn Thượng Hiền, Tp. Hồ Chí Minh); *Nguyễn Huyền Ngọc Mai, Nguyễn Thúy Kim Ngân, Trần Hồng Nguyên, Bùi Khánh Vĩnh* (lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh); *Nguyễn Trung Sơn, Nguyễn Tường Vy* (lớp 10 Toán, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang); *Nguyễn Quang Minh* (lớp 11, trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh) và *Võ Minh Quân* (lớp 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt).

Hạ Vũ Anh

P116. Cho các số thực a,b, với $a<b$. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện: $f(a)\cdot f(b)<0$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n\geq 3$, tồn tại cấp số cộng tăng $x_1,x_2,\ldots,x_n$, có tất cả các số hạng đều thuộc đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=0.$$

Lời giải (*dựa theo lời giải của tác giả bài toán*).

Không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$. Khi đó, do f liên tục trên $[a;b]$ nên tồn tại số $\varepsilon > 0$, sao cho

$$f(x) < 0 \ \forall x \in [a; a+\varepsilon]$$

và

$$f(x) > 0 \ \forall x \in [b-\varepsilon; b].$$

Trong đoạn $[a; a+\varepsilon]$, lấy cấp số cộng tăng $a_1, a_2, ..., a_n$ và trong đoạn $[b-\varepsilon; b]$, lấy cấp số cộng tăng $b_1, b_2, ..., b_n$.

Với mỗi $i \in \{1;2;...;n\}$, xét hàm số

$$h_i(t) = (1-t)a_i + tb_i$$

xác định trên [0; 1].

Do với mỗi $i \in \{1;2;...;n\}$, $h_i(t)$ là hàm tuyến tính trên [0; 1] và $h_i(0) = a_i$, $h_i(1) = b_i$, nên $h_i(t)$ liên tục trên [0; 1] và có tập giá trị là đoạn $[a_i; b_i] \subset [a; b]$. Từ đây, do hàm f liên tục trên $[a;b]$ nên với mỗi $i \in \{1;2;...;n\}$, hàm $f(h_i(t))$ xác định và liên tục trên [0; 1].

Vì thế, hàm số g, được cho bởi công thức

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} f(h_i(t)),$$

là hàm xác định và liên tục trên [0; 1].

Hơn nữa, vì $f(a_i) < 0 \ \forall i \in \{1;2;...;n\}$ (do $a_i \in [a; a+\varepsilon] \ \forall i \in \{1;2;...;n\}$) nên

$$g(0) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) < 0$$

và vì $f(b_i) > 0 \ \forall i \in \{1;2;...;n\}$ (do $b_i \in [b-\varepsilon; b] \ \forall i \in \{1;2;...;n\}$) nên

$$g(1) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) > 0.$$

Từ đó, theo định lí về giá trị trung gian, tồn tại $\lambda \in (0;1)$ sao cho $g(\lambda) = 0$, hay

$$\sum_{i=1}^{n} f(h_i(\lambda)) = 0.$$

Với mỗi $i \in \{1;2;...;n\}$, chọn $x_i = h_i(\lambda)$. Khi đó, theo chứng minh trên, $x_i \in [a; b]$ với mọi $i \in \{1;2;...;n\}$ và

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0.$$

Hơn nữa, bằng cách xét hiệu $x_{i+1} - x_i$, $1 \le i \le n-1$, dễ dàng chứng minh được $x_1, x_2, ..., x_n$ là một cấp số cộng tăng; vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét.

1. Bài đã ra là một mở rộng trực tiếp của một bài toán thi Olympic Toán học sinh viên của Liên xô (cũ). Nguyên văn bài toán đó như sau:

"Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và nhận các giá trị khác dấu. Chứng minh rằng tồn tại cấp số cộng a, b, c $(a < b < c)$ sao cho

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0."$$

Hiển nhiên, sự mở rộng từ 3 thành $n \ge 3$, trong trường hợp này, không có một ý nghĩa Toán học nào; nói cách khác, về mặt Toán học, bài đã ra và bài vừa nêu trên là một.

2. Cho tới thời điểm bản thảo vào nhà in, Tòa soạn chưa nhận được một lời giải nào cho bài toán, từ độc giả.

Lê Huy

P117. Cho dãy vô hạn số thực $x_1, x_2, ...$ thỏa mãn điều kiện:

$$x_n = -\max_{i_1+i_2+\cdots+i_{11}=n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_{11}})$$

với mọi $n > 2017$.

Chứng minh rằng dãy đã cho là dãy bị chặn.

Lời giải (*của Đáp án*).

Trước hết, dễ thấy, nếu dãy đã cho bị chặn trên, chẳng hạn bởi C, thì với mọi n nguyên dương,

$$x_n \ge \min\{x_1, x_2, ..., x_{2017}, -11C\}.$$

Vì thế, để chứng minh dãy đã cho là dãy bị chặn, ta chỉ cần chứng minh nó là dãy bị chặn trên.

Ta sẽ chứng minh điều vừa nêu trên bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử ngược lại, dãy đã cho không bị chặn trên.

Đặt $m = \min\{x_1, x_2, ..., x_{2017}\}$

và $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_{2017}\}$.

Ta sẽ gọi chỉ số n là "tốt", nếu hệ điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\begin{cases} n > 2017 \\ x_n > x_i \text{ với mọi } i < n \\ x_n > -11m. \end{cases} \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh rằng tập gồm các chỉ số "tốt" khác rỗng.

Thật vậy, do giả sử phản chứng, tồn tại chỉ số N sao cho $x_N > \max\{M, -11m\}$. Chọn chỉ số n nhỏ nhất mà $x_n = \max\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Khi đó,

điều kiện thứ hai của hệ (1) hiển nhiên được thỏa mãn; hơn nữa:

+ điều kiện thứ nhất của hệ (1) cũng được thỏa mãn vì $x_n \geq x_N > M$ mà $M \geq x_i$ với mọi $1 \leq i \leq 2017$,

+ điều kiện thứ ba của hệ (1) cũng được thỏa mãn vì $x_n \geq x_N > -11m$.

Vì thế, n là một chỉ số "tốt" và do đó, ta có điều muốn chứng minh.

Xét chỉ số "tốt" n tùy ý.

Từ định nghĩa dãy (x_n), ta có:

$$x_n + x_{k_1} + x_{k_2} + \cdots + x_{k_{11}} \leq 0, \quad (2)$$

với mọi $k_1, k_2, ..., k_{11}$ mà

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{11} = n. \quad (3)$$

Tiếp theo, ta sẽ chọn bộ chỉ số $k_1, k_2, ..., k_{11}$ thỏa mãn (3) mà dựa vào bộ chỉ số này và (2), có thể tìm ra điều vô lí.

Vì n là chỉ số "tốt" nên $n > 2017$ (theo (1)).

Hơn nữa, nhận thấy, nếu

$$k_{i-1} \leq n - (11 - (i-1)) - (k_1 + \cdots + k_{i-2})$$

thì

$$1 \leq n - (11 - i) - (k_1 + \cdots + k_{i-2} + k_{i-1}).$$

Từ đó, ta có thể chọn bộ chỉ số $k_1, k_2, ..., k_{11}$ thỏa mãn (3), bằng qui nạp, như sau:

+ Bước 1: Chọn k_1.

– Lấy tất cả các số k mà $1 \leq k \leq n - 10$;

– Từ các số k lấy được ở trên, chọn k_1 là số sao cho x_{k_1} là số lớn nhất trong các số x_k.

+ Bước $i\,(2 \leq i \leq 10)$: Chọn k_i.

– Lấy tất cả các số k mà

$$1 \leq k \leq n - (11 - i) - (k_1 + \cdots + k_{i-1});$$

– Từ các số k lấy được ở trên, chọn k_i là số sao cho x_{k_i} là số lớn nhất trong các số x_k.

+ Bước 11: Chọn $k_{11} = n - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{10})$.

Vì tập các số k lấy được ở bước $i\,(2 \leq i \leq 11)$ là tập con của tập các số k lấy được ở bước $i-1$ nên từ cách chọn x_{k_j}, $j = 1, 2, ..., 11$, suy ra

$$x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \cdots \geq x_{k_{10}} \geq x_{k_{11}}. \quad (4)$$

Xảy ra các trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* $k_{11} \leq 2017$. Khi đó, theo (4), ta có

$$x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \cdots \geq x_{k_{10}} \geq x_{k_{11}} \geq m.$$

Kết hợp với (2), suy ra $x_n + 11m \leq 0$, hay $x_n \leq -11m$, trái với việc n là chỉ số "tốt".

• *Trường hợp 2:* $k_{11} > 2017$. Khi đó, theo định nghĩa dãy (x_n), tồn tại 11 chỉ số $s_1, s_2, ..., s_{11}$ có tổng bằng k_{11} sao cho

$$x_{k_{11}} + x_{s_1} + x_{s_2} + \cdots + x_{s_{11}} = 0.$$

Kết hợp với (2), ta được:

$$x_n + x_{k_1} + x_{k_2} + \cdots + x_{k_{10}} \leq x_{s_1} + x_{s_2} + \cdots + x_{s_{11}}. \quad (5)$$

Mặt khác, vì n là chỉ số "tốt" và $k_1 < n$ nên theo điều thứ hai của hệ (1), ta có:

$$x_n > x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \cdots \geq x_{k_{10}}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra

$$\max\{x_{s_1}, x_{s_2}, ..., x_{s_{11}}\} > x_{k_{10}}. \quad (7)$$

Tuy nhiên, do $1 \leq s_1, s_2, ..., s_{11} < k_{11}$ (vì tổng của chúng bằng k_{11}) nên tất cả các chỉ số s_i, $i = 1, , 2, ..., 11$, nằm trong số các số k lấy được ở bước 10 của quá trình chọn bộ chỉ số $k_1, k_2, ..., k_{11}$ nêu trên. Vì thế, ta có

$$\max\{x_{s_1}, x_{s_2}, ..., x_{s_{11}}\} \leq x_{k_{10}},$$

mâu thuẫn với (7).

Các mâu thuẫn nhận được trong việc xét hai trường hợp trên cho thấy giả sử phản chứng ở phần đầu lời giải là sai và vì thế, bài toán được chứng minh.

Bình luận.

1. Qua lời giải trên, hiển nhiên thấy các con số 11 và 2017 không đóng vai trò gì trong tình huống Toán học được đặt ra, ngoài việc chỉ tháng và năm phát hành của số Tạp chí Pi đăng tải tình huống đó. Nói cách khác, lời giải nêu trên cũng chính là lời giải cho bài toán sau:

Bài toán "khái quát". *Cho các số nguyên dương k và M sao cho phương trình*

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n$$

có nghiệm nguyên dương, với mọi $n > M$.

Cho dãy vô hạn số thực $(x_n)_{n \geq 1}$ thỏa mãn điều kiện:

$$x_n = -\max_{i_1 + i_2 + \cdots + i_k = n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k})$$

với mọi $n > M$.

Chứng minh rằng $(x_n)_{n \geq 1}$ là dãy bị chặn.

2. Bài đã ra là một bài toán khó, tuy ý tưởng chứng minh bài toán bằng phản chứng khá dễ thấy. Hơn nữa, bài cũng thuộc dạng không thường xuyên được đề cập trong quá trình dạy và học Toán hiện nay, ở bậc phổ thông. Phải chăng, vì thế mà cho tới thời điểm bản thảo vào nhà in, Tòa soạn vẫn chưa nhận được một lời giải nào từ bạn đọc?

3. Cách giải nêu trên không phải là cách duy nhất để chứng minh bài đã ra. Còn có thể giải bài toán bằng cách chứng minh dãy đã cho, bắt đầu từ một số hạng nào đó, bị kẹp bởi hai dãy bị chặn. Việc tìm ra lời giải theo cách vừa nêu xin nhường lại cho các bạn đọc có quan tâm.

4. Có ý kiến cho rằng, nếu tất cả các số hạng của dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ (trong Bài toán "khái quát") đều là số nguyên thì dãy đó là dãy tuần hoàn, bắt đầu từ một số hạng nào đó. Bạn nghĩ sao?

Lê Huy

P118. Cho số nguyên dương k. Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên, khác hằng và không có nghiệm nguyên. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $Q(x)$ với hệ số nguyên, khác đa thức 0 và thỏa mãn điều kiện:

$$Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \equiv 0 \pmod{P(n)},$$

với mọi số nguyên n.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Ta sẽ chứng minh đa thức $Q(x)$ sau thỏa mãn các điều kiện của đề bài:

$$Q(x) = P(kx)\cdot P(kx+1)\cdots P(kx+k-1).$$

Thật vậy, trước hết, do $P(x)$ là đa thức khác hằng, với hệ số nguyên nên $Q(x)$ là đa thức khác đa thức 0 và có hệ số nguyên.

Tiếp theo, với mỗi số nguyên n, ta có

$$\left[\frac{n}{k}\right] \leq \frac{n}{k} < \left[\frac{n}{k}\right]+1.$$

Do đó, $k\cdot\left[\frac{n}{k}\right] \leq n < k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]+k$, hay

$$n \in \left\{k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]; k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]+1; \ldots; k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]+k-1\right\}.$$

Vì thế, với mọi n nguyên, trong các số nguyên (do $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên)

$$P\left(k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]\right), P\left(k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]+1\right), \ldots, P\left(k\cdot\left[\frac{n}{k}\right]+k-1\right)$$

luôn có một số là $P(n)$. (1)

Hơn nữa, do đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên nên $P(n) \neq 0$ với mọi n nguyên. (2)

Từ (1) và (2), hiển nhiên suy ra với mọi n nguyên, $Q\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) \vdots P(n)$.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét.

Tòa soạn không nhận được một lời giải nào, từ bạn đọc.

Hà Thanh

P119. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ có tính chất: Với n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tùy ý mà tổng của chúng không chia hết cho n, luôn tồn tại chỉ số i, với $1 \leq i \leq n$, sao cho tất cả các số

$$a_i, a_i+a_{i+1}, \ldots, a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+n-1}$$

đều không chia hết cho n. (Qui ước, $a_k = a_{k-n}$ nếu $k > n$).

Lời giải (*của Đáp án*).

Xét các trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* $n = a\cdot b$, với a, b là các số nguyên lớn hơn 1.

Xét n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mà $a_k = a$, với mọi $1 \leq k \leq n-1$, và $a_n = 0$. Ta có:

+) $a_1+a_2+\cdots+a_n = a\cdot(n-1) \not\equiv 0 \pmod{n}$.

+) Với i là chỉ số tùy ý ($1 \leq i \leq n$), chọn $j = b$ nếu $1 \leq i \leq n-b$, và chọn $j = b+1$ nếu $n-b < i \leq n$, thì

$$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j-1} = a\cdot b = n \equiv 0 \pmod{n}.$$

Từ đó suy ra n không có tính chất như đề bài yêu cầu.

• *Trường hợp 2:* n là một số nguyên tố.

Bằng phản chứng, ta sẽ chứng minh n có tính chất như đề bài yêu cầu.

Thật vậy, giả sử, ngược lại, n không có tính chất như đề bài yêu cầu. Khi đó, tồn tại n số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có tổng không chia hết cho n và với mỗi i, $1 \leq i \leq n$, tồn tại j, $1 \leq j \leq n-1$ sao cho

$$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+j-1} \equiv 0 \pmod{n}.$$

(ta có $j \neq n$, vì với mọi $1 \leq i \leq n$, $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+n-1} = a_1+a_2+\cdots+a_n \not\equiv 0 \pmod{n}$)

Vì thế, ta có thể xây dựng dãy số nguyên

$$0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_n,$$

mà với mọi $0 \le s \le n-1$, $i_{s+1} - i_s \le n-1$ và

$$a_{i_s+1} + a_{i_s+2} + \cdots + a_{i_{s+1}} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong dãy $n+1$ chỉ số $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n$, tồn tại hai chỉ số phân biệt đồng dư với nhau theo modulo n. Do đó, ta có hai chỉ số r, s mà $0 \le r < s \le n$, $i_r \equiv i_s \pmod{n}$ và

$$\begin{aligned} & a_{i_r+1} + a_{i_r+2} + \cdots + a_{i_s} \\ &= \sum_{j=r}^{s-1} (a_{i_j+1} + a_{i_j+2} + \cdots + a_{i_{j+1}}) \\ &\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Mặt khác, vì $i_s \equiv i_r \pmod{n}$ nên

$$i_s - i_r = k \cdot n,$$

với k là một số nguyên dương nào đó.

Lại vì $i_{j+1} - i_j \le n-1$, với mọi $0 \le j \le n-1$, nên

$$i_s - i_r \le (n-1) \cdot n.$$

Suy ra $k \le n-1$. Vì thế,

$$a_{i_r+1} + a_{i_r+2} + \cdots + a_{i_s} = k \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

không thể là một bội của n, do n là số nguyên tố; mâu thuẫn với $(*)$. Điều này chứng tỏ giả sử phản chứng ở trên là sai.

Vậy, tóm lại, số nguyên $n \ge 2$ có tính chất như đề bài yêu cầu khi và chỉ khi n là số nguyên tố.

Nhận xét.

Tới thời điểm chuyển giao bản thảo cho nhà in, Tòa soạn vẫn trong trạng thái ngậm ngùi mong đợi lời giải, từ độc giả.

Hà Thanh

P120. Trong mặt phẳng, cho một đa giác lồi có độ dài mỗi cạnh là $\lfloor \pi \rfloor$ hoặc $\lceil \pi \rceil$. Chứng minh rằng nếu số đỉnh và chu vi của đa giác đó là các số chẵn thì luôn tồn tại hai đỉnh chia đôi chu vi của đa giác ấy.

(Với x là số thực, $\lfloor x \rfloor$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\lceil x \rceil$ kí hiệu số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn x).

Lời giải (*của bạn Phạm Văn Long Phước, lớp 10 chuyên Toán, trường THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương*).

Do số đỉnh s của đa giác là số chẵn nên $s = 2n$, với n là một số nguyên lớn hơn 1 nào đó. Vì thế, ta có thể đặt tên các đỉnh của đa giác đã cho, lần lượt theo chiều kim đồng hồ, bởi $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, 2n$, kí hiệu x_i là độ dài cạnh A_iA_{i+1} (qui ước A_{2n+1} là A_1.).

Vì $\lfloor \pi \rfloor = 3$ và $\lceil \pi \rceil = 4$ nên theo giả thiết, $x_i \in \{3; 4\}$ với mọi $i = 1, 2 \ldots, 2n$. (1)

Vì chu vi của đa giác đã cho là một số chẵn nên

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 2p,$$

với p là một số nguyên dương.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n+1$, đặt

$$S_i = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+n-1}.$$

Khi đó, điều phải chứng minh theo yêu cầu của đề bài tương đương với việc tồn tại chỉ số $1 \le i \le n+1$ sao cho $S_i = p$. (2)

Hiển nhiên, với một đa giác cho trước thỏa mãn điều kiện đề bài, chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* $S_1 = p$. Khi đó, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

• *Trường hợp 2:* $S_1 \ne p$. Không mất tổng quát, giả sử $S_1 < p$ (trường hợp $S_1 > p$ được xét tương tự).

Khi đó, vì $S_1 + S_{n+1} = 2p$ nên $S_{n+1} > p$. Vì thế, $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$ là dãy số nguyên dương có số hạng đầu nhỏ hơn p, số hạng cuối lớn hơn p và với mọi $1 \le i \le n$,

$$|S_{i+1} - S_i| = |x_{i+n} - x_i| \in \{0; 1\} \text{ (do (1))}.$$

Mà p là số nguyên dương nên trong dãy trên chắc chắn phải có ít nhất một số hạng bằng p; nói cách khác, tồn tại i, $1 < i < n+1$, sao cho $S_i = p$.

Từ đó, theo (2), kết luận của bài đã ra được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét.

1. Sự kiện "trong dãy $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, chắc chắn phải có ít nhất một số hạng bằng p" ở trường hợp 2 trong Lời giải nêu trên có thể được lý giải một cách đơn giản như sau:

"Vì tập các chỉ số i mà $S_i < p$ khác rỗng (do $S_1 < p$) nên tồn tại chỉ số i_0 lớn nhất sao cho $S_{i_0} < p$. Hiển nhiên, $1 \le i_0 < n+1$ (do $S_{n+1} > p$); do đó $i_0 + 1 \le n+1$. Vì tính lớn nhất của i_0 nên $S_{i_0+1} \ge p$.

Nếu $S_{i_0+1} > p$ thì

$$S_{i_0+1} - S_{i_0} \geq (p+1) - (p-1) = 2,$$

trái với tính chất của hai số hạng liên tiếp thuộc dãy $S_1, S_2, ..., S_{n+1}$. Vì thế, phải có $S_{i_0+1} = p$."

Sự kiện nêu trên cũng có thể được lý giải một cách "dân dã" như sau: Khi đi cầu thang từ bậc thứ m tới bậc thứ n, với $m < n$, mà mỗi lần bước chỉ leo lên tối đa một bậc thì chắc chắn ta phải bước chân lên tất cả các bậc, từ bậc thứ m đến bậc thứ n, cấm có bỏ qua được bậc nào! Không tin, bạn cứ ra cầu thang và thử leo mà xem!

Một cách khái quát, dễ dàng chứng minh được khẳng định sau:

"Cho m, n là hai số nguyên phân biệt, và k là số nguyên dương. Giả sử dãy số nguyên

$$m \cdot k = x_1, x_2, ..., x_p = n \cdot k \ \ (p \in \mathbb{N}^*, p > 1)$$

thỏa mãn điều kiện: $|x_{i+1} - x_i| \in \{0; k\}$ với mọi $i = 1, 2, ..., p-1$. Khi đó, trong dãy sẽ có mặt tất cả các số $i \cdot k$, với $\min\{m, n\} \leq i \leq \max\{m, n\}$."

2. Có thể thấy, "chìa khóa" để giải được bài đ ra là nhận xét (2) trong lời giải trên. Thiết nghĩ "chìa khóa" này không khó thấy, ngay cả vớ các bạn học sinh cấp THCS. Tuy nhiên, tới thờ điểm chuyển giao bản thảo cho nhà in, Tòa soạ chỉ nhận được 4 lời giải do ba bạn học sinh lớ 10 và một bạn học sinh lớp 9 gửi tới. Phải chăng cái khó (trong việc giải bài ra) lại nằm ở công đoạn "leo cầu thang", việc mà chúng ta thường phải làm hằng ngày?

3. Ngoài bạn Phạm Văn Long Phước, bạn *Trầ Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THC Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh cũng có lời giải đúng. Hai bạn còn lại (tron 4 bạn nói ở mục 2 trên đây) có lời giải chu đúng, do lập luận "sau một số vô hạn lần thự hiện phép biến đổi, từ trạng thái ban đầu ta s có trạng thái mong muốn" là một lập luận m hồ, không được chấp nhận.

Nguyễn Khắc Minh

Từ ngày 29/12/2017 đến 18/01/2018, Tòa soạn đã nhận được

*** Bài toán đề xuất, bài viết của các bạn có tên sau:**

Trương Quang An (GV Trường THCS Nghĩa Thắng, Quảng Ngãi), *Tô Minh Hoàng* (Hà Nội), *Nguyễ Thị Hồng* (Tô Vĩnh Diện, Bình Thuận), *Nguyễn Việt Hùng* (THPT chuyên Khoa học TN, ĐHQG H Nội), *Nguyễn Tiến Lâm* (GV trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội), *Lê Quang Quân* (Lớ 12A1 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An), *Nguyễn Văn Quý* (Hà Nội), *Phạm Hữu Trung* (THP Nguyễn Công Trứ, TP HCM), *Nguyễn Anh Vũ* (THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Bình Định).

*** Lời giải của các bạn có tên sau:**

Vũ Thúy An (Lớp 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Nguyễn Đức Anh* (Lớ 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Lê Viết Ân* (SV khoa Toán ĐHSP Huế *Nguyễn Hữu Danh* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM), *Võ Tiến Dũng* (Lớp 1 Toán, THPT Nguyễn Thượng Hiền, TP HCM), *Trương Hoàng Công Huân* (Lớp 10 Toán, THP chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định), *Thiều Đình Minh Hùng* (Lớp 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Than Hóa), *Trần Nguyễn Nam Hưng* (Lớp 9A11, THCS Ngô Tất Tố, TP HCM), *Nguyễn Quốc Hưn* (Lớp 10CT1 THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM), *Phan Quốc Kỳ* (Lớp 10T, THPT Lê Qu Đôn, Bình Định), *Trần Tiến Mạnh* (Lớp 12A1, THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An), *Nguyễ Quang Minh* (Lớp 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Đồng Nai), *Trương Hồ Hoài Nam* (Lớp 10CT THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM), *Nguyễn Thúy Kim Ngân* (Lớp 10CT1, THPT chuyên L Hồng Phong, TP HCM), *Hồ Long Nhật* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang *Phạm Thị Quỳnh Như - Nguyễn Bá Đình - Phan Chí Thọ* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồn Phong, TP HCM), *Nguyễn Nhật Phi* (Lớp 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt), *Võ Quỳn* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận), *Nguyễn Trung Sơn* (Lớp 10 Toán THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang), *Hoàng Lê Nhật Tùng* (SV K61 SP Toán, ĐHQG H Nội), *Nguyễn Quang Tuyến* (Lớp 10T, THPT Lê Quý Đôn, Bình Định), *Nguyễn Phương Thảo* (Lớ 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP HCM), *Bùi Khánh Vĩnh* (Lớp 10CT1, THPT chuyê Lê Hồng Phong, TP HCM).

Tạp chí Pi xin chân thành cảm ơn và mong tiếp tục nhận được sự ủng hộ của các bạn.

LTS. Cờ Vua có "duyên nợ" với Toán ngay từ khi mới ra đời: chắc các bạn còn nhớ câu chuyện Đức Vua đồng ý thưởng cho người nghĩ ra bàn cờ theo cách: bỏ vào ô thứ nhất 1 hạt thóc, ô thứ hai 2 hạt, ô thứ ba 4 hạt....Cờ Vua trở thành "trận địa" cho những người ham thử thách trí tuệ. Vì thế không phải là ngẫu nhiên khi nhiều tạp chí về Toán dành cho đại chúng có chuyên mục thường xuyên về cờ Vua, chẳng hạn tạp chí Kvant.

Theo hướng đó, Pi hy vọng có thể mở một chuyên mục thường xuyên về cờ Vua, với sự trợ giúp của Liên đoàn Cờ Việt Nam. Xin trân trọng giới thiệu với bạn đọc bài đầu tiên của chuyên mục.

CHIẾN LƯỢC TẤN CÔNG VUA

- Lương Trọng Minh[1] -

Tấn công Vua là kỹ năng quan trọng không thể thiếu của người chơi cờ. Khi mới học chơi, đôi khi bạn có thể giành chiến thắng mà chẳng cần phải tấn công Vua. Lý do là vì bạn ăn hết sạch lực lượng của đối phương, và rồi họ xin thua mà thậm chí chẳng đợi đến khi bị chiếu "mat". Một cách nào đó, vai trò của Vua - chứ chưa nói đến tấn công Vua - ở giai đoạn này là không quá quan trọng.

Càng trưởng thành, sức cờ mạnh dần lên, bạn bắt đầu ý thức được tầm quan trọng của kỹ năng tấn công Vua đối phương để chiến thắng. Ví như trận đấu giữa hai đội bóng đá vậy: bạn sẽ chỉ có thua (và tối đa là hòa mà thôi) nếu cả trận đấu bạn chỉ đá ở nửa sân nhà mình.

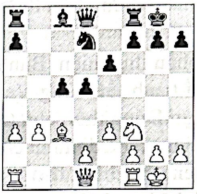
Thế chữ "chiến lược" ở đây là gì? Tại sao lại là "chiến lược tấn công Vua"? Suốt gần 200 năm qua, từ ngày Học thuyết **Wilhelm Steinitz** ra đời, cả thế giới tranh luận không ngừng nghỉ để tìm ra định nghĩa chính xác cho từ "chiến lược" này. Nhưng nếu đơn giản bạn hỏi 100 Đại Kiện tướng, tôi đoan chắc 99% trả lời sẽ nhắc đến từ "kế hoạch". Một cách hiểu đơn giản nhất, "chiến lược" ở đây phải được hiểu là kế hoạch, phương hướng, dự định ... Chiến lược tấn công Vua, vì thế, chính là kế hoạch tấn công Vua (đúng đắn nhất) để giành chiến thắng. Bạn sẽ thấy mọi khái niệm trở nên rõ ràng khi trong thực tế, người ta biết đến 3 kế hoạch tấn công Vua cơ bản:

1. Tấn công Vua - trong phần lớn trường hợp - được sử dụng như "mối đe dọa" để âm thầm theo đuổi mục đích khác;

Lúc này, Trắng chơi nước cờ tạo dựng ưu thế về thế trận

1. d4 ...

Đen trả lời sao đây? Nếu 1...cd4 sẽ rất không hay vì 2.H:d4. Đen sẽ còn "tệ" hơn nữa nếu chơi 1...Tb7?? vì mất Tốt sau khi 2.dc5, đơn giản là vì không thể 2...M:c5? 3.Hd4, mất Mã.



Lượt Trắng đi

2. Tấn công Vua chỉ là cái cớ để giành ưu thế thế trận, thậm chí cả ưu thế vật chất. Nỗ lực đẩy lui cuộc tấn công Vua của bạn, đối phương phải trả giá bằng những khiếm khuyết thế trận nảy sinh hoặc chịu mất mát vật chất;

Trắng tấn công "h7":

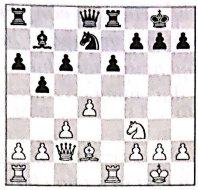
1. Mg5 ...

Đen có 3 cách chống đỡ: 1...g6; 1...Mf6 và 1...Mf8. Nếu **1...g6**, Trắng sẽ **2.Me4**, lợi "temp" đe dọa Md6. Chưa kể tiếp theo, Trắng sẽ tiếp tục kế hoạch tấn công Vua của mình dọc theo tập hợp các ô đen yếu xung quanh mặt Vua Đen, nảy sinh từ 1...g6.

Nếu **1...Mf6**, hiển nhiên Trắng sẽ tiếp tục kế hoạch tấn công Vua bằng **2.Tf4** với đe dọa khó đỡ **3.Te5**.

Cuối cùng, nếu **1...Mf8**, khi ý thức được rằng kế hoạch tiếp tục tấn công Vua khó thành công, Trắng sẽ "chuyển hướng" **2.Me4**. Đen không

[1] *Huấn luyện viên Cờ Vua quốc tế.*



Lượt Trắng đi

thể trung hòa mối đe dọa chết người 3.Mc5 với ưu thế thế trận lớn nhờ Tượng Đen "siêu" xấu ở "b7".

3. Tấn công Vua trực diện, không khoan nhượng theo đúng nghĩa của nó, với mục đích chiếu "mat" Vua đối phương hoặc chí ít, giành ưu thế vật chất lớn.

Khỏi nghi ngờ, đây là kế hoạch tấn công Vua ở mức độ cao nhất. Nhưng trên thực tế, nó xảy ra . . . ít nhất.

Bây giờ đến phần thực hiện. Bạn cần ý thức rõ ràng rằng quá trình tấn công Vua mang nặng tính chiến thuật. Đúng thôi, như trong rất nhiều lĩnh vực khác của cuộc đời, khi chiến lược là kế hoạch tác chiến, thì **chiến thuật** sẽ là kỹ thuật để hoàn thành kế hoạch đề ra.

Điều đáng nói là bạn sẽ không tìm thấy bất kỳ cuốn sách, hay giáo trình cờ Vua nào trên thế giới tổng hợp hoặc đầy đủ các bước của kỹ thuật tác chiến quan trọng này. Tôi xin mạnh dạn đề xuất 4 bước - vấn đề đã được trình bày trong cuốn sách tập 4 "CHIẾN LƯỢC - Kế hoạch tác chiến" sắp xuất bản.

Bước 1: Dấu hiệu cho một kế hoạch tấn công Vua.

Vua đối phương có nguy cơ chậm nhập thành nên kẹt lại trong trung tâm, lực lượng tấn công của bạn tập trung ở mặt Vua đối phương đông hơn so với lực lượng phòng thủ của đối phương ở đây, v.v. . . , chính là những dấu hiệu quan trọng hướng người chơi cờ về kế hoạch tấn công Vua ngay lập tức. Cần phải nhấn mạnh rằng ở trình độ cao, các tay cờ chủ động - một cách âm thầm, kín đáo - tạo ra các "dấu hiệu" này.

Bước 2: Tấn công nhanh và cương quyết.

Nghe như khẩu hiệu ấy nhỉ? Đúng thế, và là khẩu hiệu cần được tuân thủ nghiêm túc. Vì sao phải nhanh? Vì rằng khi bạn tập trung đông quân hơn ở mặt Vua đối phương, có nghĩa là đối phương đông quân hơn bạn bên cánh đối diện, bạn tấn công chậm sẽ tạo điều kiện cho đối phương kịp chuyển thêm quân về phòng thủ hoặc thậm chí tổ chức phản công trước ở cánh bên kia. Hoặc ví như bạn tấn công chậm chạp sẽ tạo thời gian cho đối phương kịp nhập thành, và thế là hết chuyện. Thế vì sao phải cương quyết? Xin nghiên cứu tiếp bước 3 sẽ rõ.

Bước 3: Gần 100% trường hợp tấn công Vua sẽ cần đến đòn phối hợp.

Bạn sẽ phải thí quân, phần lớn hướng tới lực lượng bảo vệ (quân và Tốt) của đối phương, nhằm tiêu diệt hoặc đánh lạc hướng chúng để làm "mỏng" hơn hàng thủ, mở đường cho lực lượng hậu thuẫn áp sát theo sau xông vào bắt Vua. Dễ hiểu tại sao phẩm chất quan trọng nhất trong thời khắc này là sự cương quyết, quyết đoán, . . . , tất nhiên, dựa trên chất lượng của kỹ năng tính toán phương án. Đây còn là gợi ý cho những ai làm công tác huấn luyện: khi nhãn quan đòn phối hợp yếu, học trò của bạn sẽ yếu khi tấn công Vua đối phương.

Bước 4: Kiểm tra kỹ lưỡng những tính toán của mình trước khi thực hiện nước đi.

Đòn phối hợp là con dao hai lưỡi, nó có thể cắt 'ngược". Đôi khi bạn có ý tưởng tuyệt vời, nhưng trình tự thực hiện các nước đi bỗng phá nát tan tành tất cả. Thời khắc kiểm tra là lúc bạn tĩnh trí lại để nhìn và đánh giá những gì bạn chuẩn bị chơi bằng con mắt của đối phương, ta quen gọi là khách quan. Tôi từng nghĩ, bước 4 này nằm cuối cùng nhưng xét về mức độ quan trọng, nó xứng đáng phải được đặt trân trọng lên hàng đầu, vì nó quan trọng ở mọi mảng kiến thức của cuộc cờ, không chỉ tấn công Vua.

Để minh họa cho tất cả những gì về "chiến lược tấn công Vua" đã trình bày ở trên, tôi xin dẫn ra một ví dụ minh họa bằng ván đấu của Đại Kiện tướng Lê Quang Liêm trước đối thủ mạnh hơn nhiều (thời đó) tại Moscow, trong khuôn khổ Aeroflot Open, bảng A, năm 2011.

Trong ván đấu tôi chỉ tập trung phân tích chuyên môn. Chính bạn sẽ nhìn thấy một cách rõ nét rằng kế hoạch tấn công Vua đối phương của Liêm trong ván bám sát 4 bước đã được trình bày như thế nào.

Lê Quang Liêm, 2664 - G.Kamsky, 2730
Moscow Aeroflot Open - A, 2011
Phòng thủ Xla-vơ

1. d4 d5
2. c4 c6
3. Mf3 Mf6
4. Hb3 ...

Nước cờ chắc chắn nhưng ít gặp. Thống kê cho thấy 4.e3 Tf5; 4.e3 Tg4 và 4.e3 a6 chơi nhiều hơn cả.

4. ... e6

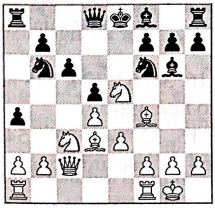
Đen có lựa chọn khác, tương đương: 4...dc4 5.H:c4 Tf5 6.g3 e6 7.Tg2 Mbd7 8.0-0 Te7 9.Mc3 0-0 10.e3 với thế trận hai bên xấp xỉ cân bằng.

5. Mc3 Mbd7
6. Tf4 a5
7. cd5 ed5
8. e3 Mb6?

Ý đồ tích cực hóa sớm bên cánh Hậu đặc biệt đáng ngờ. Đen chậm phát triển, chủ quan thiếu kiểm soát ô trung tâm "e5" quan trọng. Lẽ ra họ nên chơi 8...Te7 9.h3 0-0 10.Td3 Xe8 11.0-0 Mf8 với ưu thế "đi trước" cho Trắng.

9. Td3 Tg4
10. Me5 Th5
11. 0-0 a4
12. Hc2 Tg6

Nước cờ sai lầm trong cả một kế hoạch đáng ngờ. Ít ra chính lúc này Đen phải nghĩ đến an toàn Vua bằng 12...Te7 (hoặc 12...Td6) trước khi quá muộn.



Lượt Trắng đi

13. e4! ...

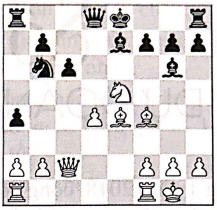
Đòn tấn công trung tâm tiêu chuẩn trong những tình huống tương tự, khi đối phương chậm phát triển và Vua bị kẹt lại trong trung tâm.

13. ... de4

Quá muộn cho Đen chơi 13...Td6? vì 14.M:g6 hg6 15.e5 cũng như 13...Te7 14.M:g6 hg6 15.e5 Md7 16.e6!, Trắng ưu thế thắng.

14. M:e4 M:e4
15. T:e4 Te7?

Sai lầm cuối cùng mắc phải khi ý thức muộn màng về những sai lầm phát triển trước đó. Lẽ ra Đen phải tiếp tục cầm cự bằng 15...T:e4 16.H:e4 Hd5! 17.He3 Te7 18.Xfe1 0-0, cho dù Trắng duy trì ưu thế đáng kể.



Lượt Trắng đi

16. T:c6+!! ...

Đòn chiến thuật công phá, câu kết tuyệt vời của cả một kế hoạch chiến lược đúng đắn. *Khi thế cờ của Bạn mạnh hơn về mặt chiến lược, đòn chiến thuật sẽ tự nhiên nảy sinh.*

16. ... bc6
17. H:c6+ Md7

Hoặc 17...Vf8 18.H:b6 H:b6 19.Md7, Trắng hơn hai Tốt.

18. M:g6 hg6

18...Xc8?! giúp Liêm kết thúc hoàn hảo tác phẩm của mình: 19.M:e7! X:c6 20.M:c6 Hf6 21.Xfe1+ Vf8 22.Td2! với cuộc tấn công không thể chống đỡ.

19. Xfe1 0-0

Lựa chọn duy nhất trước các mối đe dọa 20.X:e7+ hoặc 20.Td6. Chẳng hạn, 19...Vf8 (hoặc 19...Xc8) sẽ 20.X:e7!!.

20. Tc7 Mb8

Hoặc 20...He8 21.Td6.

21. T:d8 M:c6
22. T:e7 M:e7
23. X:e7 Xfd8
24. Xd1 a3
25. b3 Xac8
26. Vf1 Xd5
27. Xd2

Đen xin thua.

Số hoàn hảo

DỰ ĐOÁN, SAI LẦM VÀ KỶ LỤC

- Hà Huy Khoái -

Ngày 4 tháng 1 năm 2018, cộng đồng toán học thế giới nhận tin vui: tìm ra số hoàn hảo thứ 50. Đó là số

$$2^{77232916}(2^{77232917}-1).$$

Đây là số lớn kỷ lục trong 50 số hoàn hảo được biết tại thời điểm bài viết này được hình thành (8 giờ sáng ngày chủ nhật 7/1/2018), nó gồm khoảng 46,5 triệu chữ số! Bạn có thể hình dung được độ lớn đó không? Nếu viết lần lượt các chữ số của số đó với cỡ chữ 10 pt, bạn sẽ cần một băng giấy dài khoảng... 120 km, tức là dài hơn khoảng cách từ Hồ Hoàn Kiếm đến Ninh Bình!

Vậy thì, số hoàn hảo là gì? Và tại sao người ta quan tâm đến nó?

Câu hỏi này đưa chúng ta về với Toán học của Hy Lạp cổ đại.

1. Pythagoras và dự đoán thiên tài: thế giới số.

Ngày nay, ra đường là nghe nói 4.0, là cách mạng số. Đúng vậy, thế giới bây giờ là thế giới "số hoá", không có gì không thể xử lý được thông qua những con số, với máy tính và "dữ liệu lớn". Điều này phải chăng là "đặc sản" của thế kỷ 21? Không! Cách đây hơn 2500 năm, có một người đã nghĩ như vậy: Pythagoras. Với Pythagoras và những nhà Toán học Hy Lạp, mọi sự vật, hiện tượng trong thế giới này đều biểu diễn được qua những con số. Và như vậy, quy luật trong "thế giới số" là biểu hiện của những quy luật nào đó trong thế giới thực của chúng ta. Người Hy Lạp thời đó say mê những con số có tính chất đẹp và kỳ lạ.

Các số 6, 28, 496, 8128 là nguồn cảm hứng cho những nhà toán học từ thời Hy Lạp cổ đại đến tận ngày hôm nay.

Chúng có gì lạ?

$$6 = 1+2+3;$$
$$28 = 1+2+4+7+14;$$
$$496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248$$
$$8128 = 1+2+4+8+16+32+64+127+254$$
$$+508+1016+2032+4064.$$

Nhận thấy rằng:

- 1, 2, 3 là các ước của 6 và nhỏ hơn 6
- 1, 2, 4, 7, 14 là các ước của 28 và nhỏ hơn 28,
- 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 là các ước của 496 và nhỏ hơn 496
- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064 là các ước của 8128 và nhỏ hơn 8128.

Ta gọi một ước của số n nào đó là "ước thực sự" của n nếu ước đó nhỏ hơn n. Như vậy, mỗi số trên đây đều bằng tổng các ước thực sự của nó.

Theo Pythagoras, sự hoàn hảo của các con số phụ thuộc vào các ước thực sự của nó. Khi tổng các ước thực sự của một số lớn hơn chính nó,

ta gọi nó là số "thừa", ví dụ 12 hoặc 16. Trái lại, khi tổng các ước thực sự của một số nhỏ hơn chính nó thì nó được gọi là số "thiếu", ví dụ 10 là một số thiếu. Số có ý nghĩa nhất, và cũng hiếm hoi nhất, là số mà tổng các ước thực sự của nó bằng chính nó. Ta thấy các số 6, 28, 496, 8128 thoả mãn tính chất vừa nêu.

Định nghĩa. Số nguyên dương n được gọi là *hoàn hảo* nếu n bằng tổng các ước thực sự của nó.

Tất nhiên là người ta luôn cố gắng đi tìm sự hoàn hảo, và cũng hiển nhiên, là không dễ gì tìm được!

Phát hiện về số hoàn hảo được ghi lại lần đầu tiên trong sách *Cơ sở* của Euclid, viết khoảng 300 năm trước Công nguyên (xem lời giới thiệu về cuốn sách kinh điển này trong Tạp chí Pi, Tập 1, số 1, 2017). Mệnh đề 36, quyển thứ 9 của *Cơ sở* phát biểu như sau:

Bắt đầu từ đơn vị, gấp đôi liên tục rồi lấy tổng cho đến khi kết quả là một số nguyên tố, đem nhân với số hạng cuối cùng trong tổng, ta nhận được một số hoàn hảo.

Như vậy, Euclid đã chứng minh được rằng, nếu $p = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ là một số nguyên tố, thì $2^n p$ là một số hoàn hảo. Euclid cũng chỉ ra rằng $2^n p$ có tất cả các ước thực sự là $1, 2, \ldots, 2^n, p, 2p, \ldots, 2^{n-1}p$, và tổng của chúng đúng bằng $2^n p$.

Theo ngôn ngữ hiện đại, mệnh đề của Euclid được phát biểu là:

Mệnh đề. *Nếu n là số nguyên lớn hơn 1 sao cho $2^n - 1$ là một số nguyên tố thì $2^{n-1}(2^n - 1)$ là một số hoàn hảo.*

Những số dạng trên đây được gọi là số Euclid. Câu hỏi được đặt ra là: liệu có những số hoàn hảo nào khác với số Euclid hay không? Đây là một trong những câu hỏi quan trọng nhất trong lịch sử nghiên cứu số hoàn hảo.

2. Dự đoán và sai lầm.

Trên con đường tìm kiếm câu trả lời cho vấn đề đặt ra trên đây đã có biết bao nhiêu phỏng đoán, bao nhiêu sai lầm! Ta thử điểm lại một số trong những sai lầm, phỏng đoán đó, để hiểu thêm sự gian nan trên con đường tìm đến các chân lý toán học, mà ngày nay khi đọc chúng trong sách giáo khoa, bạn nghĩ là rất đơn giản!

Năm 100, Nicomachus viết cuốn "Introduction Arithmetica" (Nhập môn số học), trong đó phát biểu một số kết quả liên quan đến số hoàn hảo, nhưng không có chứng minh. Theo ngôn ngữ ngày nay, có thể phát biểu 5 "khẳng định" của Nicomachus như sau:

1. Số hoàn hảo thứ n có n chữ số.
2. Mọi số hoàn hảo đều chẵn.
3. Chữ số tận cùng của các số hoàn hảo là 6 và 8 luân phiên nhau.
4. Mọi số hoàn hảo đều có dạng $2^{n-1}(2^n - 1)$, trong đó $n > 1$ và $(2^n - 1)$ là một số nguyên tố.
5. Có vô hạn số hoàn hảo.

Điều thú vị là "khẳng định" 4 hoàn toàn đúng (và được chứng minh trọn vẹn sau hơn 16 thế kỷ bởi Euler), "khẳng định" 2 và 5 đến nay vẫn là những giả thuyết lớn của Toán học.

Cho đến giai đoạn đầu của Thời kỳ Phục Hưng (khoảng năm 1500), những khẳng định của Nicomachus vẫn được xem là đúng. Hiểu biết của các nhà toán học về số hoàn hảo đến thời kỳ này vẫn chưa có gì mới.

Năm 1509, nhà thần học và triết học Pháp Carlorus Bovillus (1470-1553) xuất bản một cuốn sách về số hoàn hảo, trong đó ông cũng cho rằng mọi số hoàn hảo là số chẵn. Bollivus khẳng định rằng $2^n - 1$ là một số nguyên tố khi n là số lẻ. Khẳng định này đúng cho $n = 3, 5, 7$, nhưng rõ ràng sai với $n = 9, 11$. Ông cũng đưa ra một danh sách các số hoàn hảo dạng $2^{n-1}(2^n - 1)$ với n là những số lẻ không vượt quá 39. Tuy nhiên, có 8 số thuộc danh sách này không phải là số hoàn hảo. Cũng có thể xem Bollivus được an ủi phần nào, vì rất nhiều nhà toán học khác cũng sai lầm như ông: De la Roche, Giradus Ruffus,...

Năm 1536, Hudalrichus Regius làm nên bước đột phá khi xuất bản cuốn "Utriusque Arithmetices", trong đó ông đưa ra phân tích $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Như vậy, ông là người đầu tiên tìm ra số nguyên tố p sao cho $2^{p-1}(2^p - 1)$ không phải là số hoàn hảo. Regius cũng chứng

minh được rằng $2^{13}-1$ là một số nguyên tố, và do đó, ông tìm ra số hoàn hảo thứ 5 là $2^{12}(2^{13}-1)=33550336$. Đến lúc này, khẳng định đầu tiên của Nicomachus đã được chứng minh là sai, vì số hoàn hảo thứ 5 có 8 chữ số. Tuy vậy, khẳng định chữ số cuối của các số hoàn hảo là 6 và 8 thay phiên nhau vẫn chưa bị bác bỏ! Điều đáng ngạc nhiên là tuy có những khám phá lớn như vậy, tên tuổi Regius vẫn hầu như không được nhắc đến!

Câu hỏi "phải chăng mọi số hoàn hảo chẵn đều có dạng Euclid" vẫn tiếp tục thu hút sự quan tâm của các nhà toán học.

René Descartes (1596-1650), trong bức thư gửi Mersenne ngày 15 tháng 11 năm 1638 có viết: "Tôi nghĩ rằng tôi có thể chứng minh không tồn tại số hoàn hảo chẵn nào khác ngoài các số Euclid". Tuy nhiên người ta chưa bao giờ tìm thấy chứng minh của Descartes.

Pierre de Fermat (1601-1665), trong thư gửi Mersenne ngày 26 tháng 12 năm 1638 tin tưởng rằng ông đã tìm ra phương pháp "toàn năng" để giải quyết các câu hỏi liên quan đến ước thực sự. Fermat viết hai dãy số:

$-1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13$

$-1\ 3\ 7\ 15\ 31\ 63\ 127\ 255\ 511\ 1023\ 2047$
$4095\ 8191,$

trong đó dãy trên là các số tự nhiên liên tiếp, dãy dưới là các số (2^n-1) ứng với số n đứng ngay trên đó.

Fermat phát hiện được các tính chất sau:

1. Nếu một số ở dòng trên là hợp số thì số tương ứng ở dòng dưới cũng là hợp số.
2. Nếu số dòng trên là nguyên tố thì số tương ứng ở dòng dưới trừ đi 1 phải chia hết cho hai lần số ở dòng trên.
3. Nếu số ở dòng trên là nguyên tố thì số tương ứng ở dòng dưới không chia hết cho số nguyên tố nào khác ngoại trừ các số lớn hơn một đơn vị so với một bội nào đó của hai lần số hàng trên.

(Nghĩa là: *mọi ước nguyên tố q của số 2^p-1, trong đó p là số nguyên tố lẻ đều có dạng $q=2kp+1$*).

Fermat nói thêm rằng "tôi đã tìm ra và chứng minh không khó khăn những tính chất đẹp đẽ này. Từ nay, tôi sẽ xem chúng là nền tảng cho việc phát minh ra các số hoàn hảo".

Tuy nhiên, bài toán tìm công thức số hoàn hảo chẵn chỉ được giải quyết trọn vẹn và chính xác bởi Leonard Euler (1707-1783), hơn 2000 năm sau mệnh đề của Euclid.

Định lý. *Số chẵn n là số hoàn hảo khi và chỉ khi n có dạng:*

$$n=2^{p-1}(2^p-1),$$

trong đó p là số nguyên tố sao cho 2^p-1 cũng là số nguyên tố.

Chứng minh nhận xét 3 của Fermat và Định lý Euler có thể xem trong sách *Số học* của Hà Huy Khoái (NXB Giáo dục, 2003).

3. Đi tìm số hoàn hảo.

Với định lý phát biểu trên đây, dường như chúng ta đã biết cặn kẽ về các số hoàn hảo chẵn, bởi vì nó cho ta biết dạng của TẤT CẢ các số hoàn hảo chẵn. Tuy vậy, hình dung ra thế nào là hoàn hảo với việc đạt đến sự hoàn hảo quả là rất xa nhau!

Để có một số hoàn hảo, ta cần có một số nguyên tố dạng 2^p-1, trong đó p là một số nguyên tố. Số $M_p=2^p-1$ được gọi là *số Mersenne*, và nếu nó là số nguyên tố thì được gọi là *số nguyên tố Mersenne*. Những số nguyên tố Mersenne đầu tiên là 3, 7, 31, 127. Tuy nhiên hàm mũ 2^p-1 tăng hết sức nhanh, nên vấn đề phân tích số Mersenne trở nên rất khó khăn. Có thể nói rằng, nhận xét 3 trên đây của Fermat chính là một công cụ rất hữu hiệu để phân tích số Mersenne.

Thật vậy, xét số Mersenne $M_{13}=2^{13}-1=8189$. Thông thường, để phân tích 8189, ta cần chia 8189 cho các số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{8189}=90,50...$, tức là cần làm 24 phép chia. Tuy nhiên, theo nhận xét 3 của Fermat, ước nguyên tố của số 8189 phải có dạng $2\cdot k\cdot 13+1$, tức là dạng $26k+1$. Chỉ có 2 số nguyên tố nhỏ hơn 90 có dạng đó: 53 và 79. Số 8189 không chia hết cho 53 và 79, ta có ngay kết luận 8189 là số nguyên tố Mersenne, mà chỉ cần làm 2 phép chia, thay vì 24 phép chia. Làm tương tự, các bạn có thể phát hiện ngay rằng $M_{23}=8388607$ không phải là số nguyên tố.

Như vậy, nhận xét 3 của Fermat giúp ích rất nhiều cho việc tìm các số nguyên tố lớn, đặc biệt là các số nguyên tố Mersenne, và cùng với nó, tìm các số hoàn hảo chẵn.

Con đường tìm kiếm số hoàn hảo thật nhọc nhằn, nhưng cũng để lại nhiều câu chuyện lý thú. Tại hội nghị thường niên của Hội Toán học Mỹ năm 1903, nhà toán học Frank Cole bước lên bảng, sau vài giờ tính toán, viết phân tích số

$$\begin{aligned} 2^{267} - 1 &= 147573952589676412927 25 \\ &= 193707721 \times 761838257287, \end{aligned}$$

và như vậy, chứng minh M_{267} không là số nguyên tố! Cả hội trường vỗ tay vang dội. Mãi về sau, người ta mới biết rằng, để phân tích được M_{267}, Frank Cole đã tận dụng thời gian rảnh rỗi của tất cả các ngày chủ nhật trong 3 năm trời! Tất nhiên thời đó làm gì có máy tính.

Khi số nguyên tố Mersenne thứ 23, M_{11213} được tìm thấy tại Khoa Toán đại học Illinois (Hoa Kỳ), người ta đã tự hào ghi nhớ sự kiện đó bằng cách phát hành con tem mang dòng chữ "$2^{11213} - 1$ *là số nguyên tố*".

Số nguyên tố Mersenne thứ 25 và 26 được tìm thấy nhờ hai học sinh phổ thông là L. Nickel và C. Noll. Mặc dù chưa hiểu nhiều về số hoàn hảo, Nickel và Noll đã dùng kiểm tra Lucas để chạy trên máy tính lớn của trường. Sau khi tìm ra số thứ nhất, hai người tách ra chạy các chương trình riêng rẽ và Noll may mắn tìm được số thứ hai. Về sau, khi đã đi làm, Noll tham gia trong nhóm làm việc tìm ra các số nguyên tố lớn.

Cho đến nay, $2^{88}(2^{89} - 1)$ là số hoàn hảo lớn nhất được tìm thấy bằng tính toán thủ công.

Ngày nay, người ta viết chương trình để các máy tính hoà mạng trên toàn thế giới có thể tham gia tìm kiếm số nguyên tố lớn trong thời gian rảnh rỗi của máy. Một trong những chương trình đó là GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), chương trình thu hút hàng chục ngàn người tham gia.

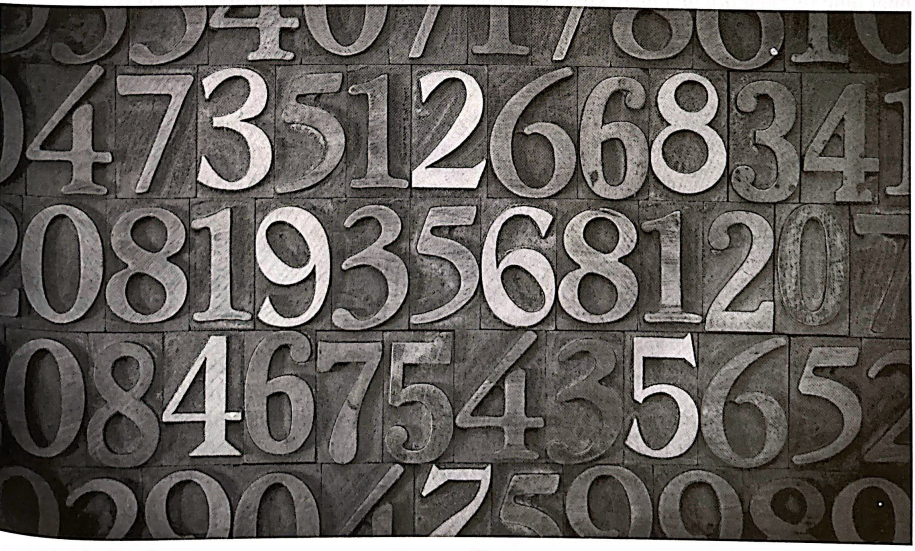
Số hoàn hảo thứ 50 đã nói đến ở đầu bài viết này được GIMPS công bố ngày 4/1/2018.

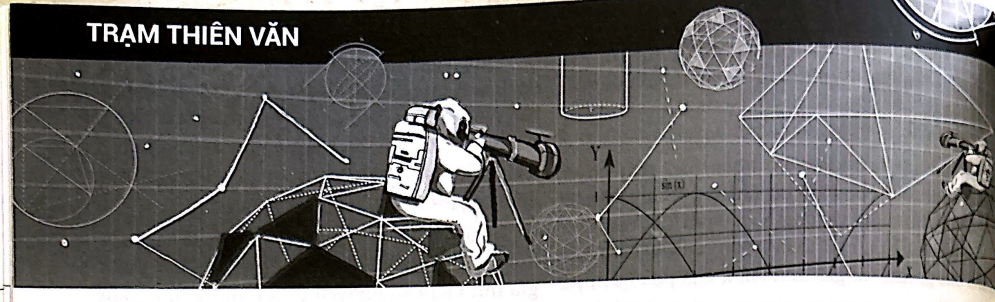
Hai "khẳng định" của Nicomachus cho đến nay vẫn là hai giả thuyết lớn của toán học:

Giả thuyết 1. *Không tồn tại số hoàn hảo lẻ.*

Giả thuyết 2. *Tồn tại vô hạn số hoàn hảo.*

Giả thuyết 2 có vẻ khá kỳ lạ: đã hơn hai ngàn năm trăm năm, với biết bao công sức của thế giới toán học, trong đó có những người như Pythagoras, Euclid, Descartes, Fermat, Euler,... mà người ta chỉ mới biết có vỏn vẹn 50 số hoàn hảo, vậy mà lại giả thuyết là chúng nhiều vô hạn! Nhưng có lẽ giả thuyết đúng, vì... có lý do gì để trên đời lại chỉ có *hữu hạn sự hoàn hảo*!





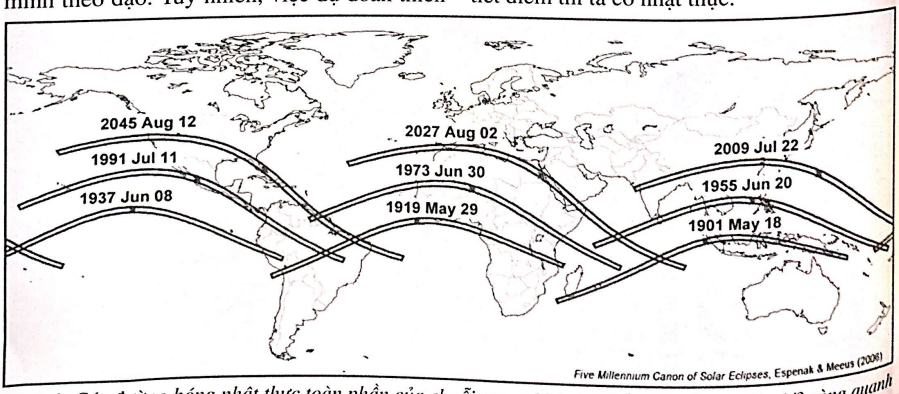
CHU KỲ SAROS

- Phạm Vũ Lộc -

Ngày 31/01/2018 vừa qua, nguyệt thực toàn phần đã diễn ra và Việt Nam nằm trong vùng có thể quan sát được trọn vẹn cả quá trình. Với sự giúp đỡ của các máy tính mô phỏng tính toán chính xác, người ta có thể biết rõ nhật thực hay nguyệt thực diễn ra vào giờ phút giây nào, có thể quan sát được ở đâu, kéo dài bao lâu, v.v... Nhưng với người xưa, hai hiện tượng thiên nhiên kỳ thú này lại là một bí ẩn rất khó lý giải của tự nhiên.

Trong văn minh Trung Hoa, vua là Thiên tử, nhận Mệnh trời nên lúc nào có thiên thực tất phải biết mà báo trước cho dân trong lịch. Các nghi lễ của triều đình định tiến hành mà gặp nhật thực thì phải dời qua ngày khác. Hơn nữa, nhật thực còn bị coi là điềm báo để vua sửa mình theo đạo. Tuy nhiên, việc dự đoán thiên thực thường không chính xác vì có quá nhiều thông số ảnh hưởng, dù sai một chút cũng đã lệch trong thực tế rất nhiều. Như đã biết qua các số trước, một năm có từ 2 đến 5 nhật thực và từ 0 đến 3 lần nguyệt thực. Vì không hề đơn giản để tìm ra quy luật, vua đành đổ cho trời đất quỷ thần khó đoán. Tuy vậy, người ta vẫn không ngừng tìm cách dự đoán được thiên thực và coi đó là một trong những bài toán khó nhất chứng minh trình độ quan trắc thiên văn của mình.

Như đã trình bày ở các số trước, để thiên thực xảy ra, Mặt Trời và Mặt Trăng cần cùng ở gần *tiết điểm*, là hai giao điểm quỹ đạo của hai vầng – tức là giao điểm của Bạch đạo và Hoàng đạo. Nếu mỗi vầng ở gần mỗi tiết điểm đối nhau thì ta có nguyệt thực, nếu hai vầng cùng gần một tiết điểm thì ta có nhật thực.



Hình 1. Các đường bóng nhật thực toàn phần của chuỗi saros 136 cho thấy xu thế lệch Tây 1/3 vòng quanh Trái Đất và xu thế dịch dần lên phía Bắc.

Người Ấn Độ gọi tiết điểm lên (điểm Mặt Trăng đi qua Hoàng đạo lên phía Bắc) là Rahu, tượng hình con quái vật có đầu không có thân, chuyên nuốt Mặt Trời nhưng nhanh chóng bị trôi ra qua họng, để giải thích nhật thực; và tiết điểm xuống được gọi là Ketu, là quái vật mình rắn không đầu, chuyên tấn công Mặt Trăng, để giải thích nguyệt thực. Hai tên gọi này được truyền đến văn minh Trung Hoa và trở thành hai sao La Hầu và Kế Đô trong chiêm tinh học.

Ngoài ra, vị trí Mặt Trăng trên Bạch đạo càng gần điểm cận địa thì sẽ có kích thước biểu kiến lớn hơn (nên dễ che được hết Mặt Trời và tạo ra nhật thực toàn phần hơn) và đi nhanh hơn (nên thời gian thiên thực ngắn hơn) so với các vị trí khác, và ngược lại.

Người Chaldea (Tân Babylon) là dân tộc đã tìm được chu kỳ thiên thực khá sớm, từ nhiều thế kỷ trước công nguyên và về sau được gọi là *chu kỳ saros*, dài 6585,32 ngày, tức là khoảng 18 năm 10 ngày (hoặc 11 ngày – tùy vào số năm nhuận) và 8 giờ. Chu kỳ này là bội chung nhỏ nhất của các chu kỳ sau:

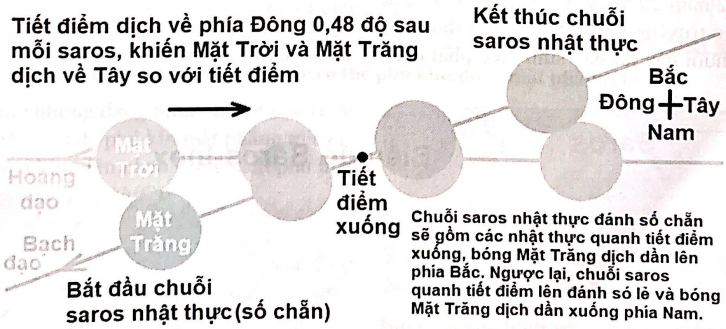
- Tuần trăng (tháng giao hội): Chu kỳ vị trí tương đối của Mặt Trăng với Mặt Trời, dài 29,5306 ngày.
- Tháng cận điểm: Chu kỳ vị trí tương đối của Mặt Trăng với điểm cận địa, dài 27,5546 ngày.
- Tháng tiết điểm: Chu kỳ vị trí tương đối của Mặt Trăng với một tiết điểm, dài 27,2122 ngày.

Nó cũng là bội của năm tiết điểm, là chu kỳ vị trí tương đối của Mặt Trời với cùng tiết điểm đó, và bội của tháng sao, là chu kỳ vị trí tương đối của Mặt Trăng với nền sao trên bầu trời.

1 saros ≈ 223 tuần trăng ≈ 239 tháng cận điểm
≈ 242 tháng tiết điểm ≈ 19 năm tiết điểm
≈ 241 tháng sao

Như vậy cứ sau một chu kỳ saros, một thiên thực lại lặp lại gần giống (cùng là nhật thực hoặc nguyệt thực, toàn phần hoặc một phần, dạng đường đi và kích thước bóng, v.v...) Nhưng vì số ngày trong một saros có phần lẻ là 0,32, bằng khoảng 1/3, nên thiên thực liền sau 1 saros sẽ diễn ra muộn khoảng 8 tiếng và vị trí quan sát lệch khoảng 120 kinh độ về phía Tây (xem Hình 1). Do đó, người ta cũng đưa ra chu kỳ bằng 3 lần saros, gọi là *exeligmos*, dài 19.756 ngày (54 năm 34 ngày) để dự báo các thiên thực diễn ra gần một kinh độ trên Trái Đất với sai số không quá lớn.

Tuy nhiên, vì chu kỳ saros vẫn có sai số dù nhỏ nên cứ sau mỗi saros, vị trí của thiên thực lại lệch đi một chút. Người ta đặt ra các *chuỗi saros* gồm các thiên thực cách đều nhau 1 saros. Các chuỗi saros nhật thực bắt đầu bằng các nhật thực một phần, tiếp tục tới các nhật thực toàn phần và kết thúc bằng các nhật thực một phần. Vì 1 saros ngắn hơn 242 tháng tiết điểm (và 19 năm tiết điểm) một chút, nên cứ sau một saros, vị trí Mặt Trời trên Hoàng đạo so với tiết điểm lại lệch về Tây một chút (xem Hình 2).



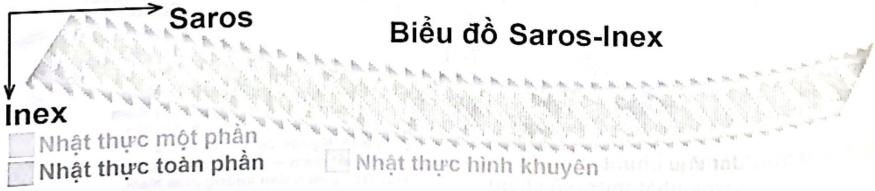
Hình 2. Quá trình của một chuỗi saros nhật thực, gồm các nhật thực cách đều nhau 1 saros, diễn ra xung quanh một tiết điểm.

Trong các lần nhật thực cùng chuỗi saros diễn ra quanh tiết điểm xuống, lần nhật thực đầu tiên diễn ra khi Mặt Trời ở phía Đông các tiết điểm khoảng 17° (xem lại Pi tháng 11/2017) và Mặt Trăng che khuất một phần Mặt Trời từ phía Nam, tức là chỉ khu vực gần Cực Nam trên Trái Đất có thể quan sát được. Ở các lần nhật thực sau thuộc cùng chuỗi, Mặt Trời lùi dần về Tây, Mặt Trăng che khuất Mặt Trời nhiều hơn khi đi qua tiết điểm này. Rồi bắt đầu có các nhật thực toàn phần, khu vực nhìn thấy nhật thực mở rộng và lùi dần về phía Bắc trên Trái Đất. Cuối cùng khi Mặt Trời lùi quá về phía Tây, Mặt Trăng lại chỉ che được một phần mà thôi, khu vực nhìn thấy nhật thực cũng lùi về phía Cực Bắc, cho tới khi Mặt Trời không còn nằm gần tiết điểm để Mặt Trăng che khuất được nữa, chuỗi saros kết thúc. Vì tháng tiết điểm dài thêm 0,4s mỗi thiên niên kỷ, nên Mặt Trời lại dần lùi về Tây nhiều hơn sau mỗi saros, khiến chuỗi saros sẽ từ từ ngắn lại trong tương lai.

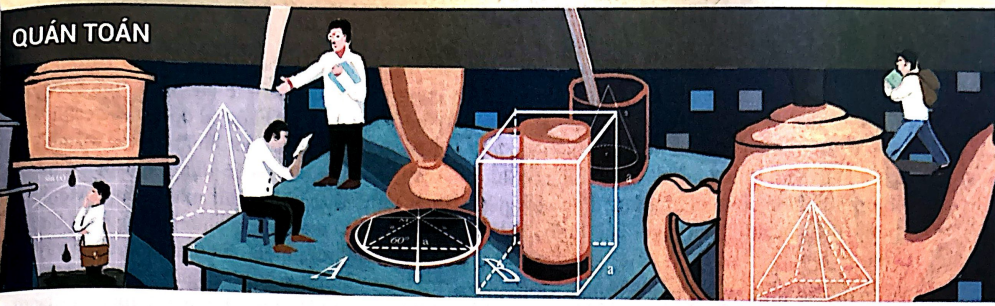
Người ta đánh số lẻ cho chuỗi saros nhật thực diễn ra quanh tiết điểm lên (bóng Mặt Trăng dịch dần từ Bắc xuống Nam), và ngược lại. Với chuỗi saros nguyệt thực, quy ước đánh số lại ngược lại với chuỗi nhật thực. Nguyệt thực ngày 31/1 vừa qua thuộc chuỗi saros nguyệt thực 124. Số được đánh không phải theo thứ tự lần thiên thực đầu tiên của chuỗi mà theo thứ tự của thiên thực dài nhất trong chuỗi. Người ta bắt đầu đánh số các chuỗi như vậy từ năm 1999 TCN, tuy nhiên chuỗi saros 0 chứa thiên thực đầu tiên vào ngày 26/12 năm 2000 TCN lại bắt đầu từ trước đó, và việc truy ngược tiếp về thiên thực đầu tiên của chuỗi này lại nảy sinh việc phải đánh số các chuỗi khác trước đó, cho tới chuỗi mang số -13. Một chuỗi saros nhật thực dài từ 1226 đến 1551 năm, tức là có khoảng từ 69 đến 87 nhật thực (phần lớn là 70 đến 73, nhiều nhất là 72). Trong đó, từ 39 đến 59 (nhiều nhất là 43) là nhật thực xuyên tâm (gọi chung các nhật thực toàn phần, hình khuyên và hỗn hợp). Tại mọi thời điểm, có khoảng 40 chuỗi saros nhật thực đang tiếp diễn, hiện nay là từ chuỗi số 117 đến số 156. Các chuỗi saros nguyệt thực dài từ 1226 đến 1587 năm và có từ 69 đến 89 nguyệt thực (phần lớn vào khoảng 71 tới 73), với 11 đến 29 nguyệt thực toàn phần. Có 40 chuỗi saros nguyệt thực đang tiếp diễn (từ 110 đến 149).

Người ta cũng đưa ra chu kỳ nửa saros, gọi là *sar*. Nó bằng 121 tháng tiết điểm nhưng lại bằng 111,5 tuần trăng. Do đó, sau 1 sar, một nhật thực sẽ trở thành một nguyệt thực gần giống, và ngược lại. Ngoài ra, một chu kỳ khác cũng được sử dụng là *chu kỳ inex*, dài 358 tuần trăng ≈ 388,5 tháng tiết điểm (khoảng gần 29 năm, với sai số giữa chúng chỉ là 6 phút, so với sai số 52 phút của chu kỳ saros). Như vậy sau mỗi inex, thiên thực tương tự lại diễn ra nhưng ở tiết điểm đối diện. Đổi lại, số tháng cận điểm lại rất lẻ (383,67 tháng) nên tính chất của thiên thực lại khác đi nhiều (ví dụ từ toàn phần đổi thành hình khuyên). Có thể xếp các thiên thực vào ma trận hai chiều, mỗi cột là chu kỳ saros và hàng là chu kỳ inex (Hình 3). Nói cách khác, thời gian giữa hai thiên thực bất kỳ là tổ hợp đại số của một số nguyên lần chu kỳ saros và một số nguyên lần chu kỳ inex.

Tham khảo: eclipse.gsfc.nasa.gov

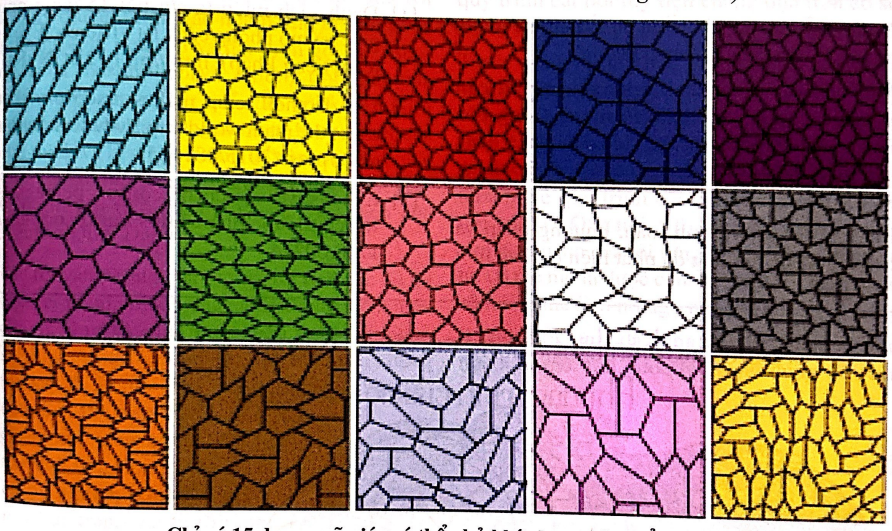


Hình 3. Biểu đồ Saros - Inex cho nhật thực 5 thiên niên kỷ (năm -1999 đến năm 3000), mỗi cột là một chuỗi saros và hàng là một chuỗi inex, mỗi ô là một nhật thực.



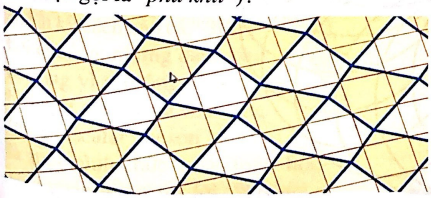
BÀI TOÁN «LÁT GẠCH»
ĐÃ CÓ LỜI GIẢI SAU 99 NĂM

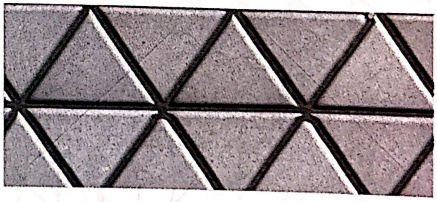
*- **MaxiMe** biên soạn, (theo Sicence&Vie số 1023 tháng 12/2017) -*



Chỉ có 15 dạng ngũ giác có thể phủ khít được mặt phẳng [1]

Có thể dùng những dạng hình cơ bản nào (tam giác, tứ giác,...) để phủ kín mặt phẳng mà các hình không chờm lên nhau (một cách phủ như thế được gọi là "*phủ khít*")?





Bài toán xếp hình với các hình giống hệt nhau, được đặt ra từ cách đây 99 năm, cuối cùng đã tìm được lời giải nhờ sự giúp đỡ của máy tính.

Người ta đã biết rằng có thể dùng các tam giác hay tứ giác (không phụ thuộc vào số đo góc hay độ dài cạnh), để phủ khít một mặt phẳng. Trong công trình nghiên cứu năm 1918, nhà toán học người Đức Karl Reinhardt đã chỉ ra rằng có đúng 3 dạng lục giác có thể làm được điều này và sẽ không thể phủ khít được với các hình có từ 7 cạnh trở lên.

Vậy với các hình ngũ giác, kết luận sẽ là như thế nào?

Từ đó đến đầu năm 2015, các nhà toán học tìm ra 14 dạng ngũ giác có tính chất này... Và đến cuối năm 2015, Von Derau một sinh viên của trường Washington Bothell, Mỹ đã bất ngờ tìm ra dạng thứ 15 [2].

Nhưng vẫn không ai biết là có tồn tại một dạng ngũ giác nào khác nữa hay không?

Michael Rao làm việc tại phòng nghiên cứu Tin học, Đại học Claude Bernard, Cộng hòa Pháp, đã đưa ra câu trả lời: chỉ có đúng 15 dạng ngũ giác, trong một báo cáo công bố vào tháng 8/2017 [3].

Bằng lý thuyết và tính toán, phương pháp và chương trình của ông đã phát hiện ra rằng mọi ngũ giác đều có thể được xếp vào 1 trong 371 dạng ngũ giác có tỷ lệ đặc biệt giữa các góc, nhưng không ràng buộc về độ dài các cạnh. Sau đó ông đã cho máy tính thử nghiệm toàn bộ và kết luận rằng chỉ có 15 dạng ngũ giác như đã biết mới có thể phủ khít mặt phẳng. Mệnh đề này cũng đã được kiểm chứng bằng các phương pháp khác bởi nhiều nhà toán học và vì vậy đã trở thành một định lý.

Như vậy cuộc tranh luận gần 100 năm đã có lời kết.

Mở rộng: Hãy thử tìm 3 hình lục giác có tính chất này?

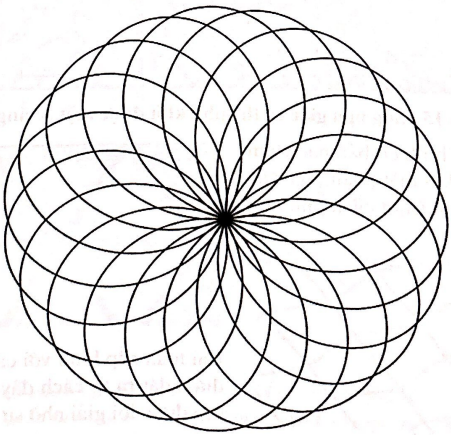
Tham khảo

[1] Danh sách miêu tả chi tiết 15 dạng ngũ giác và mô phỏng cách lát (Thérèse Eveilleau, tiếng Pháp): http://bit.ly/2BGNvRB

[2] UW Bothell team makes discovery that rocks the math world http://www.uwb.edu/news/press/2015/081415

[3] Exhaustive search of convex pentagons which tile the plane https://arxiv.org/abs/1708.00274

Đố các bạn biết đường cong sau đây tên gọi là gì? Phương trình của nó thế nào?



Thừa giấy vẽ voi

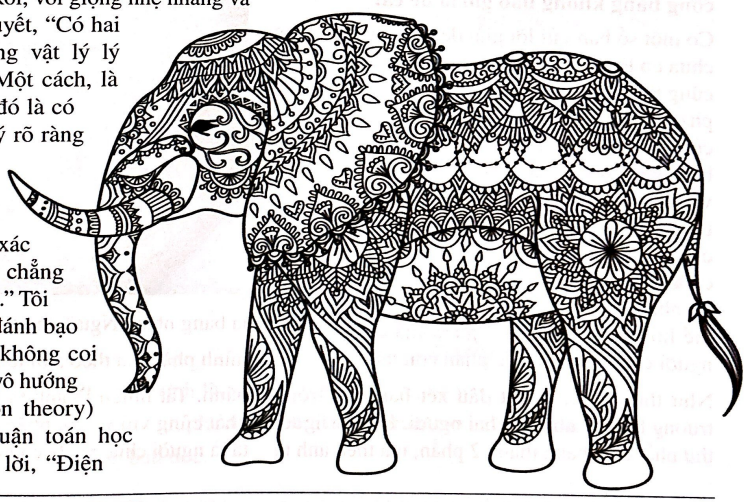
- Đàm Thanh Sơn -

Có một bài viết hay của Freeman Dyson, "A meeting with Enrico Fermi. How one intuitive physicist rescued a team from fruitless research", kể lại một sự kiện rất quan trọng trong cuộc đời của ông. Dyson kể lại rằng sau khi giải quyết xong vấn đề tương tác điện từ, ông bắt đầu nghiên cứu tương tác mạnh (lực hạt nhân). Năm 1953, ông cùng một số học trò rất say sưa với một lý thuyết tương tác mạnh, mô tả tương tác giữa proton, neutron và hạt pion gọi là "pseudoscalar meson theory". Những tính toán của nhóm ông cho ra kết quả gần với kết quả thí nghiệm của Fermi. Ông ta rất tự hào với kết quả của mình và hẹn gặp Fermi để trình bày kết quả. Ông lên xe bus đi từ Ithaca, NY đến Chicago. Câu chuyện tiếp theo như sau (bản dịch của Nguyễn Đình Đăng):

Khi tới văn phòng của Fermi, tôi trao các đồ thị cho Fermi, nhưng ông hầu như không thèm nhìn chúng. Ông mời tôi ngồi, thân thiện hỏi thăm sức khỏe vợ tôi và con trai mới sinh của chúng tôi, nay đã 50 tuổi. Rồi, với giọng nhẹ nhàng và đều, ông ra phán quyết, "Có hai cách tính toán trong vật lý lý thuyết," ông nói. "Một cách, là cách tôi thích hơn, đó là có một bức tranh vật lý rõ ràng về quá trình anh tính toán. Cách kia là có một hình thức luận toán học chính xác và nhất quán. Anh chẳng có bất kỳ cách nào cả." Tôi hơi choáng, nhưng đánh bạo hỏi ông vì sao ông không coi lý thuyết meson giả vô hướng (pseudoscalar meson theory) là một hình thức luận toán học nhất quán. Ông trả lời, "Điện động lực học lượng tử là một lý thuyết tốt vì các lực yếu, và khi hình thức luận còn mơ hồ, chúng ta có một bức tranh vật lý rõ ràng dẫn dắt chúng ta. Với lý thuyết meson giả vô hướng thì không có bức tranh vật lý nào cả, còn các lực thì quá mạnh đến nỗi chẳng có gì hội tụ được. Để đạt được kết quả tính toán, anh đã phải đưa vào một quy trình cắt bớt tùy tiện chẳng dựa trên cơ sở vật lý hay toán học chắc chắn nào cả."

Tuyệt vọng, tôi hỏi liệu Fermi có ấn tượng với việc các con số tính toán của chúng tôi phù hợp với các con số mà ông đã đo được hay không. Ông trả lời, "Anh đã dùng bao nhiêu tham số tự do trong các tính toán của anh?" Tôi nghĩ một thoáng về quy trình cắt bớt của chúng tôi rồi nói, "Bốn." Ông nói, "Tôi nhớ ông bạn Johnny von Neumann của tôi từng nói, với bốn tham số tôi có thể mô tả được con voi, còn với năm tham số tôi có thể làm nó ngọ nguậy cái vòi."

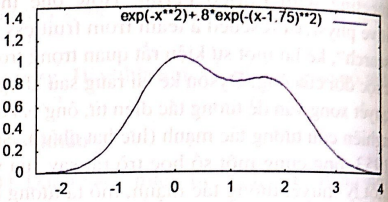
Fermi cuối cùng đã đúng. Phải 20 năm sau đó người ta mới tìm được lý thuyết đúng đắn của



tương tác mạnh, "sắc động học lượng tử", mô tả tương tác giữa các quark. Các hạt như proton, neutron, pion đều làm từ quark. Trong lý thuyết meson giả vô hướng, các hạt này được coi là các hạt cơ bản, nên không thể là lý thuyết đúng. Tính toán của Dyson và học trò hầu như không còn được ai nhớ đến nữa. Không biết gì về quark, chỉ dùng trực giác vật lý, Fermi biết ngay là không thể tin được lý thuyết meson giả vô hướng. Dyson viết rằng nếu không có Fermi, ông ta và học trò chắc chắn sẽ mất nhiều năm vào một hướng nghiên cứu vô ích.

Đọc câu chuyện này tôi cũng nhận ra chính mình: bản thân tôi đã làm nhiều tính toán không có bức tranh vật lý rõ ràng, không có hình thức luận chặt chẽ, và thậm chí cũng không có cả thực nghiệm để so sánh!

Trở lại với vấn đề con voi. Tôi loay hoay mãi không vẽ được con voi mà chỉ dùng 4 tham số, như von Neumann nói. Tìm đọc trên Internet tôi thấy đã có người viết là đã vẽ được voi dùng 4 tham số, nhưng tìm hiểu kỹ hơn thì hoá ra họ ăn gian: 4 tham số của họ là số phức, thực chất là 8 tham số thực. Chi tiết có thể đọc ở http://publications.mpi-cbg.de/Mayer_2010_4314.pdf. Tuy nhiên chỉ cần dùng 2 tham số thực có thể vẽ được bức tranh "con trăn nuốt con voi" trong truyện Hoàng tử bé của Saint-Exupery. Bức tranh như sau:



và đây là đồ thị hàm số

$$y = \exp(-x^2) + a\exp(-(x-b)^2)$$

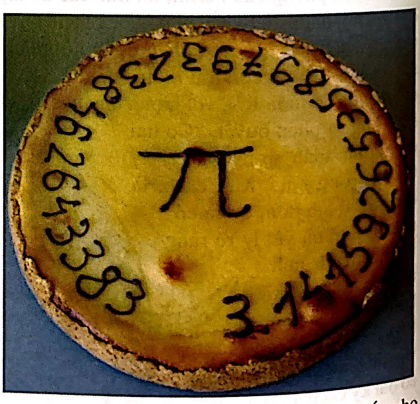
với $a = 0.8$ và $b = 1.75$.

GIẢI ĐÁP BÀI "CHIA BÁNH"

(Xem Tạp chí Pi, Tập 1, Số 12.2017)

Bài này nghe qua thì dễ, nhưng giải chính xác thì không dễ tý nào! Điều này cũng hợp lý, vì chia "quyền lợi" thế nào để ai cũng cảm thấy công bằng không bao giờ là dễ cả!

Có một số bạn gửi lời giải đến, nhưng tiếc rằng chưa có lời giải đúng. Có một nguyên tắc để ai cũng thấy vui vẻ là người chia bánh thành từng phần không bao giờ được chọn đầu tiên. Lời giải của một số bạn vi phạm quy tắc này: người chia bánh chọn trước tiên, như thế thì chỉ anh ta thấy vui vẻ, những người khác sẽ thấy ấm ức, vì có thể cho rằng anh ta đã chia không đều, và dành cho mình phần nhiều! Cũng có bạn để người chia không nhận trước, nhưng những người còn lại nhận "đồng thời": cách này không ổn vì có thể họ tranh chấp nhau phần mà có ít nhất 2 người cho là to hơn các phần còn lại.



Như thường lệ, ta bắt đầu xét bài toán trong trường hợp dễ nhất: có hai người. Khi đó người thứ nhất chia bánh thành 2 phần, mà theo anh ta là bằng nhau. Người thứ hai chọn trước, lấy cho mình phần mà theo anh ta là không ít hơn $\frac{1}{2}$ cái bánh. Tất nhiên là anh ta vui vẻ, và người thứ nhất cũng vui vẻ với phần còn lại, vì chính anh ta là người chia, và đã cố gắng chia đều nhau (vì

anh ta chia bánh, nhưng người kia chọn trước nên anh ta không dám chia hai phần không đều)!

Nếu có 3 người thì sao? Tạm gác người thứ 3 sang một bên, hai người đầu tiên chia bánh với nhau như trường hợp trước. Mỗi người đều vui vẻ với phần của mình, vì đều cho rằng phần của mình không ít hơn $\frac{1}{2}$ chiếc bánh.

Bây giờ, người thứ 3 sẽ chia với người thứ nhất và người thứ hai phần bánh mà mỗi người đã nhận theo cách sau. Mỗi một trong hai người chia phần bánh của mình thành 3 miếng, mà theo họ là đều nhau. Như vậy mỗi phần bằng $\frac{1}{6}$ chiếc bánh. Người thứ 3 sẽ chọn một miếng trong phần của người thứ nhất, một miếng trong phần của người thứ 2. Vì anh ta tự chọn nên theo anh ta, có không ít hơn $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ chiếc bánh, và rất vui vẻ! Tất nhiên hai người kia cũng vui vẻ, vì chính họ chia, và để lại cho mình $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ chiếc bánh.

Với lập luận như trên thì bằng phương pháp quy nạp bài toán giải được cho n người, với mọi n nguyên dương. Thật vậy, giả sử đã có cách chia bánh cho n người, để ai cũng cho rằng phần mình không ít hơn $\frac{1}{n}$ chiếc bánh (điều này đúng cho $n=1$). Xét trường hợp có $(n+1)$ người. Tạm thời để người thứ $n+1$ đứng riêng, n người còn lại chia bánh sao cho mỗi người cho rằng mình được không ít hơn $\frac{1}{n}$ cái bánh. Sau đó mỗi một trong n người đầu tiên chia phần của mình ra $(n+1)$ miếng bằng nhau, mỗi phần sẽ là $\frac{1}{n(n+1)}$ chiếc bánh. Người thứ $(n+1)$ sẽ chọn từ phần của mỗi một trong n người đầu tiên một miếng.

Như vậy anh ta được

$$n\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{(n+1)}$$

chiếc bánh. Mỗi một trong n người đầu tiên còn lại

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{(n+1)}$$

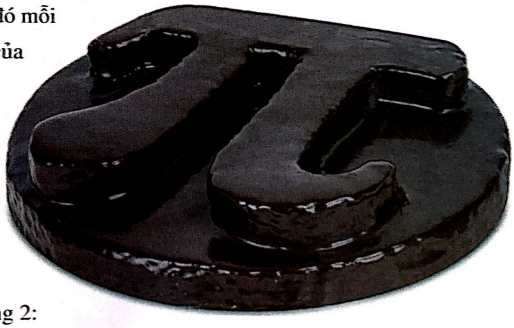
chiếc bánh, và mọi người đều vui vẻ!

Nguyên tắc "người chia không được chọn trước" cũng dẫn ta đến cách giải thứ hai sau đây:

Cách thứ 2. Người đầu tiên lấy ra một phần mà anh ta cho rằng bằng đúng $\frac{1}{n}$ cái bánh. Tuy nhiên, anh ta không được nhận phần đó cho mình mà chuyển cho người thứ 2. Nếu người này cho rằng phần đó không ít hơn $\frac{1}{n}$ chiếc bánh thì anh ta vui vẻ nhận. Nếu không, anh ta sẽ chuyển cho người thứ 3. Tiếp tục như thế, nếu có ai đó vui vẻ nhận thì lại bắt đầu bài toán với $(n-1)$ người còn lại. Nếu ngược lại, người thứ 2, thứ 3,... thứ n đều không nhận, thì phần bánh đó được chuyển lại cho người đầu tiên, và tất nhiên anh ta vui vẻ nhận vì chính anh ta đã chia, và đã cố chia đều (anh ta không dám chia to hơn, vì sẽ có người nhận trước, cũng không dám chia nhỏ hơn, vì chính anh ta có thể phải nhận)! Bài toán tiếp tục theo cách trên với $(n-1)$ người còn lại.

Chủ Quán

(dựa theo lời giải của tác giả bài toán)



ĐÍNH CHÍNH

Tạp chí Pi số 1.2018, trang 41, cột 2, dòng 2:

+ Đã in: Dễ thấy, với $k\geq 3$, Phương trình Diophantine $(**)$ vô nghiệm.

+ Nay sửa thành: Phải chăng, với $k\geq 3$, phương trình Diophantine $(**)$ vô nghiệm?

Tạp chí Pi thành thật cáo lỗi cùng bạn đọc.

THỂ LỆ CUỘC THI "Cùng π giải toán"

1. Mục đích:

Khuyến khích phong trào học Toán qua các bài toán.

2. Thời gian tổ chức cuộc thi:

Hằng năm, bắt đầu từ tháng 1 năm 2018.

3. Đối tượng dự thi:

Học sinh phổ thông và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

4. Các bài toán thi:

Tất cả các bài toán được đăng tải trong mục Thách thức kì này và Quán Toán của Tạp chí Pi, từ số 1 đến số 12 của năm tổ chức cuộc thi (sau đây gọi chung là bài toán thi).

5. Bài dự thi hợp lệ:

Tất cả lời giải cho các bài toán thi, được gửi tới Tòa soạn trước ngày mùng 1 của tháng phát hành số Tạp chí đăng tải các lời giải đó.

6. Phương thức chấm bài:

Chỉ cho điểm các lời giải đúng. Mỗi lời giải đúng (không phụ thuộc cách giải, cách trình bày) được cho 1 điểm; lời giải đúng và cách giải ngắn gọn được thưởng thêm không quá 1 điểm (nghĩa là được cho đến 2 điểm), lời giải đúng, cách giải ngắn gọn và đồng thời lời giải được trình bày mạch lạc, sáng sủa được thưởng thêm không quá 2 điểm (nghĩa là được cho đến 3 điểm).

7. Phương thức tính điểm xét giải:

Điểm để xét giải của mỗi học sinh dự thi, kí hiệu là s, là điểm tổng hợp các điểm của mỗi lời giải cho mỗi bài toán thi và được tính theo công thức sau:

– Đối với học sinh cấp THCS:

$$s = a + b \cdot \frac{\pi}{2} + c,$$

– Đối với học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất:

$$s = a \cdot \frac{\pi}{4} + b + c,$$

trong đó, a là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán dành cho cấp THCS, b là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán dành cho cấp THPT và c là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán trong Chuyên mục Quán Toán.

8. Phương thức xét giải:

– Chỉ xét giải đối với các học sinh có điểm xét giải không ít hơn:

+ 9π điểm, đối với học sinh cấp THCS;

+ 23π điểm, đối với học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

– Xét giải riêng cho mỗi nhóm đối tượng:

+ Nhóm 1: Học sinh cấp THCS;

+ Nhóm 2: Học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

9. Cơ cấu giải và mức thưởng:

Mỗi nhóm đối tượng được xét trao:

– Không quá π giải Nhất, mỗi giải được thưởng 9π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 3π giải Nhì, mỗi giải được thưởng 6π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 10π giải Ba, mỗi giải được thưởng 3π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 15π giải Pi (π), mỗi giải được thưởng 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi.

Ghi chú: 1π tiền mặt = 314.159 đồng

Căn cứ kết quả cuộc thi của từng năm, Ban giám khảo cuộc thi có thể xem xét trao giải Đặc biệt cho những học sinh có lời giải hay, độc đáo. Mỗi giải Đặc biệt được thưởng 15π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi.

Ngoài các giải chính và phần thưởng nêu trên, có thể có các giải phụ, các phần quà do các đơn vị tài trợ hoặc các nhà hảo tâm ấn định cho cuộc thi từng năm.

Học sinh đạt giải Nhất và giải Đặc biệt sẽ được GS. Ngô Bảo Châu viết thư giới thiệu với các trường đại học ở nước ngoài, nếu học sinh đó có nhu cầu.

Học sinh đạt từ giải Nhì trở lên sẽ được ưu tiên xét tuyển vào Hệ đào tạo cử nhân Toán học chất lượng cao thuộc Chương trình Đào tạo Toán học Trường Đại học Thăng Long - Viện Toán học.

10. Thời gian công bố giải và trao thưởng:

– Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên Tạp chí Pi số tháng 3 của năm liền sau năm tổ chức cuộc thi.

– Phần thưởng sẽ được trao cho các học sinh đạt giải vào ngày 31 tháng 3 của năm liền sau năm tổ chức cuộc thi, tại hai địa điểm: Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh.

11. Ban giám khảo:

– Trưởng ban: GS. Hà Huy Khoái, Tổng biên tập Tạp chí Pi;

– Phó Trưởng ban thường trực: Nguyễn Khắc Minh, Phó Tổng biên tập kiêm Trưởng ban biên tập Tạp chí Pi;

– Phó Trưởng ban: Trần Nam Dũng, Phó Tổng biên tập Tạp chí Pi;

– Thư kí: Nguyễn Thị Lê Hương, Phó Tổng biên tập kiêm Thư kí Tòa soạn Tạp chí Pi;

– Các ủy viên: Thành viên của Nhóm Thách thức Toán học Tạp chí Pi.

Năm 2018 và những câu hỏi thú vị từ 18 que diêm

- Nguyễn Thanh Giang[1] -

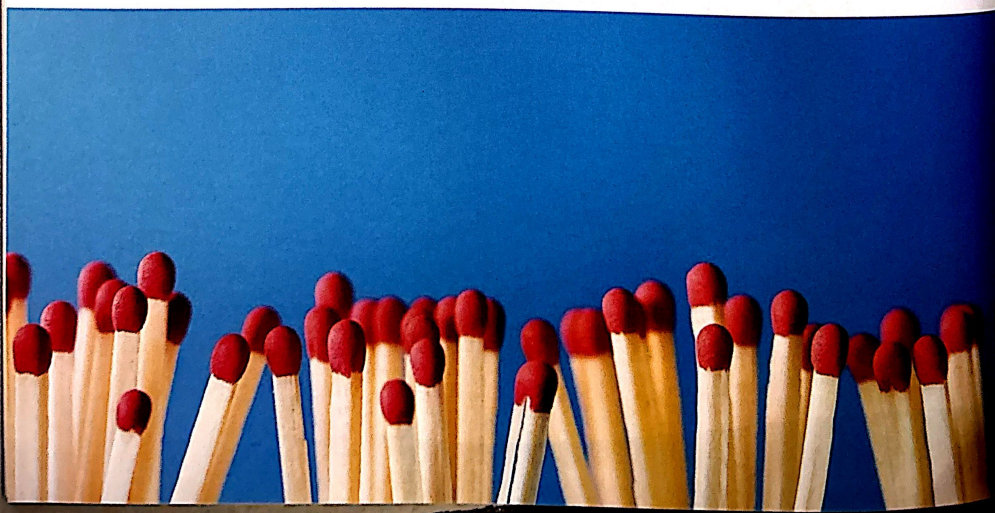
Vào năm 1681 một người Anh tên là Robert Boie đã nhúng que đóm vào dung dịch lưu huỳnh và phốt pho và thế là những que diêm đầu tiên đã ra đời, mặc dù chúng cháy quá nhanh nên hiệu quả sử dụng không cao.

Cho đến năm 1826, John Walker (29/5/1781 – 1/5/1859), một nhà hóa học người Anh đã tình cờ sáng chế ra diêm quẹt vào ngày 27/11. Trong lần thí nghiệm đó ông trộn clorat kali và antimony sulfide và vô tình phát hiện ra hỗn hợp 2 chất này sẽ bốc cháy khi có một lực ma sát đủ lớn. Ngay lập tức, Walker nghĩ đến việc làm sao có thể chia nhỏ đống hỗn hợp thần kỳ này ra để dùng nhiều lần. Ông vớ lấy mấy que tăm ở bàn làm việc trong phòng thí nghiệm rồi vê thành những viên bi nhỏ và cắm que tăm xuyên qua chúng. Những que diêm quẹt đầu tiên đã ra đời như vậy mặc dù chính bản thân Walker thừa nhận là chúng quá xấu xí. Về sau, Walker đã nghiên cứu và thay đổi thành phần hóa học của diêm bằng cách bổ sung lưu huỳnh cùng với keo dính. Ngoài ra, ông cũng thay đổi hình dáng của diêm bằng cách thay những que tăm bằng những lát gỗ nhỏ chắc chắn hơn khi sử dụng. Để phục vụ công đoạn đánh lửa, Walker còn bổ sung cho mỗi hộp đựng diêm một miếng giấy nhám rắc một lớp bột thủy tinh lên trên.

Năm 1833, những que diêm bọc phôtpho đã ra đời ở Áo và Đức. Nhưng có một vấn đề đã nảy sinh, vì phôtpho trắng và vàng rất độc hại đối với những công nhân sản xuất diêm nên đến năm 1906 đã bị cấm sử dụng để sản xuất diêm trên toàn thế giới. Cuối cùng người ta đã tìm ra một loại phôtpho đỏ không độc để sản xuất ra những que diêm an toàn hơn. Những que diêm an toàn đầu tiên đã được sản xuất ở Thụy Sĩ vào năm 1844. Giờ đây thay vì bọc lên đầu que diêm tất cả những chất hoá học cần thiết thì người ta bôi phốtpho đỏ lên bề mặt của hộp và ta chỉ cần quẹt que diêm vào đó để lấy lửa.

Những que diêm không chỉ giúp tạo ra lửa, mà còn giúp chúng ta có một công cụ để học Toán một cách thú vị và hào hứng.

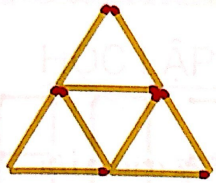
[1] *Phó hiệu trưởng trường THPT chuyên Hưng Yên*



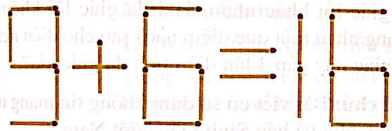
Chắc hẳn mỗi chúng ta đã từng làm những bài toán thú vị sau:

Bài 1. Dùng 3 que diêm xếp thành một số nhỏ hơn 4 và lớn hơn 3.

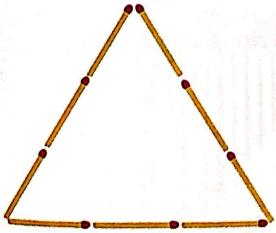
Bài 2. Hãy bớt 2 que diêm trong hình sau để được hai hình tam giác đều.



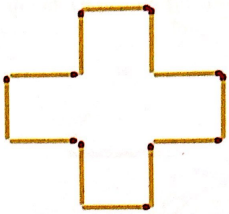
Bài 3. Hãy thêm 2 que diêm vào hình sau để được phép toán đúng.



Bài 4. Hãy di chuyển 3 que diêm ở hình sau để được ba tam giác có diện tích bằng nhau.

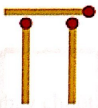


Bài 5. Hãy di chuyển 3 que diêm ở hình sau để được ba hình vuông có diện tích bằng nhau.

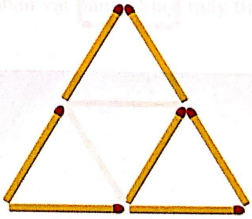


Sau đây là đáp án của các bài đố vui trên:

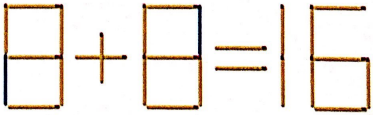
Bài 1. Số đó là Pi



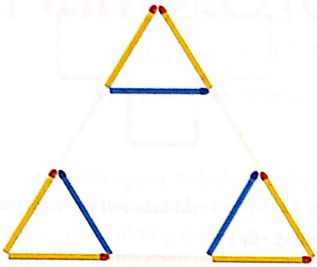
Bài 2. Di chuyển 2 que diêm (được làm nhạt màu) như hình sau:



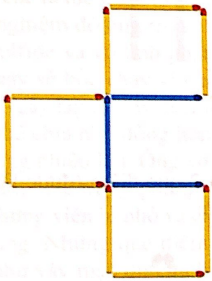
Bài 3. Thêm 2 que diêm ở vị trí màu xanh.



Bài 4. Dời 3 que diêm (vị trí đã làm nhạt màu) về vị trí màu xanh.



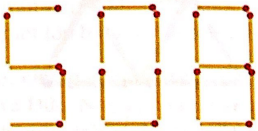
Bài 5. Dời 3 que diêm (vị trí đã làm nhạt màu) về vị trí màu xanh.



Nhân dịp bước sang năm mới 2018 mời bạn đọc của tạp chí Pi thử sức cùng 18 que diêm với những câu hỏi thú vị sau:

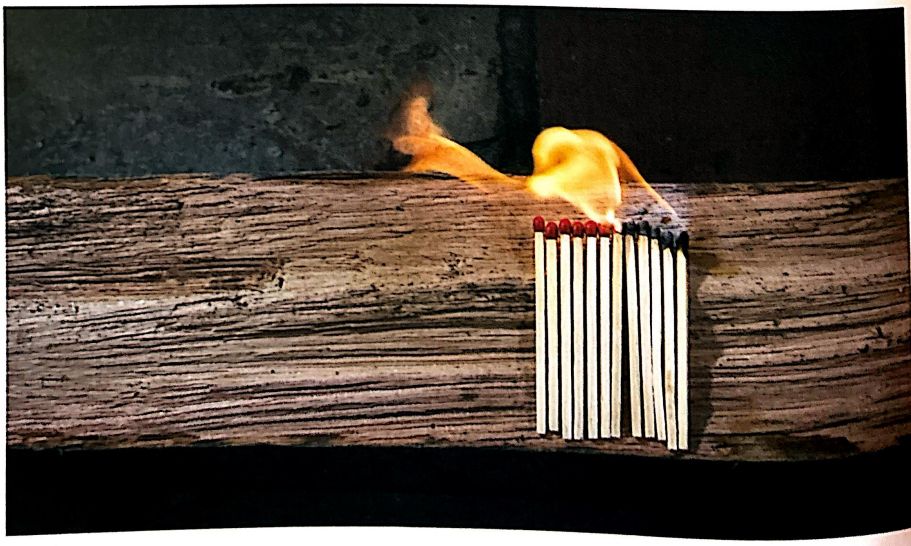
Câu 1. Xếp 18 que diêm thành 6 hình vuông có diện tích bằng nhau.

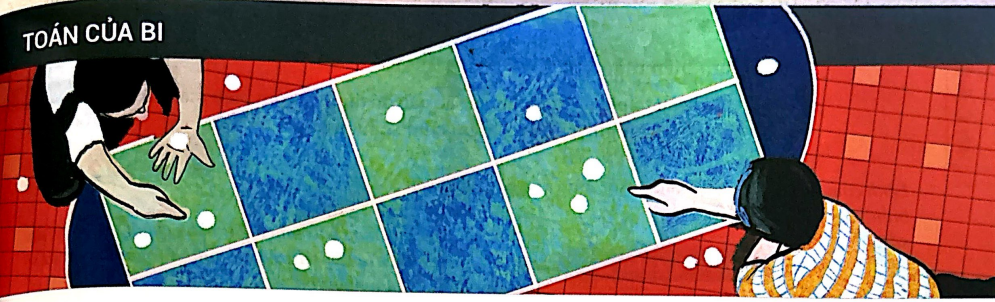
Câu 2. Với 18 que diêm xếp được một số có 3 chữ số. Hãy di chuyển 1 que diêm để được hình biểu diễn số có 3 chữ số lớn nhất có thể được?



Câu 3. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía đối với mỗi đường thẳng đi qua hai đỉnh kề của nó. Hãy dùng 18 que diêm xếp thành 2 hình đa giác lồi khác nhau (Hai đa giác lồi không chung nhau một que diêm nào) sao cho diện tích đa giác này gấp 3 lần diện tích đa giác kia?

Ghi chú: Bài viết có sử dụng thông tin mạng từ Wikipedia và báo Sinh viên Việt Nam.





HỌC LẬP TRÌNH SCRATCH

Bùi Việt Hà

BÀI 8. MÈO ĂN TÁO

Mục tiêu:

Học xong bài này em sẽ biết:

- Cách điều khiển nhân vật chuyển động bằng cách nháy chuột.
- Cảm biến màu sắc và cảm biến va chạm.
- Thiết kế 1 trò chơi hoàn chỉnh: Mèo ăn táo.

Nội dung bài học

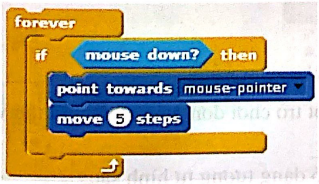
1. Có thể dùng chuột điều khiển nhân vật được không?

Trong bài học 5, em đã biết cách điều khiển nhân vật chuyển động bằng bàn phím. Hôm nay em sẽ biết thêm cách điều khiển nhân vật bằng chuột máy tính. Em hãy quan sát bảng sau có 2 lệnh có liên quan.

mouse down? Nhóm lệnh cảm biến.	Khi người cùng nháy chuột thì lệnh này này sẽ nhận ngay giá trị Đúng, ngược lại khi người dùng không nháy chuột, lệnh luôn có giá trị Sai.
point towards mouse-pointer Nhóm lệnh chuyển động.	Nhân vật sẽ xoay về hướng của con trỏ chuột.

Ví dụ nếu em muốn mỗi khi nháy chuột, nhân vật sẽ lập tức quay về hướng con trỏ chuột và tiến về phía chuột một số bước, chúng ta sẽ thiết lập đoạn chương trình sau.

Điều khiển nhân vật bằng chuột.



Mỗi khi người dùng nháy chuột, nhân vật sẽ quay về hướng vị trí vừa nháy chuột và tiến lên 5 bước.

Như vậy nếu chúng ta nháy chuột liên tục, nhân vật sẽ tiến nhanh về phía con trỏ chuột.

2. Cảm biến màu sắc

Khi nhân vật tiếp tục với một màu sắc nào đó thì lệnh cảm biến màu sắc 

sẽ lập tức trả lại giá trị Đúng, ngược lại sẽ luôn là giá trị Sai.

Lệnh cảm biến màu sắc.

Màu sắc gây cảm biến.

Cách xác định màu sắc cảm biến: nháy chuột tại ô này, sau đó nháy chuột lên vị trí trên màn hình (bên trong cửa sổ Scratch) có màu cần tìm.

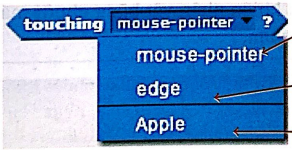
Ví dụ lập trình điều khiển nếu nhân vật tiếp xúc với màu vàng thì sẽ kêu lên "Màu vàng đây rồi". Đoạn chương trình như sau.

3. Cảm biến va chạm

Cảm biến va chạm sẽ nhận biết thời điểm khi nhân vật va chạm với một đối tượng khác trên màn hình. Scratch cho phép nhận biết (cảm biết) sự va chạm vào 3 loại đối tượng sau: 1- con trò chuột; 2- cạnh sân khấu; 3- nhân vật khác.

Khi va chạm vào các loại đối tượng trên, lệnh sau đây sẽ ngay lập tức trả lại giá trị Đúng, còn bình thường lệnh này sẽ trả lại giá trị Sai.

Lệnh cảm biến va chạm.



va chạm với con trỏ chuột.

va chạm với cạnh sân khấu.

va chạm với nhân vật khác.

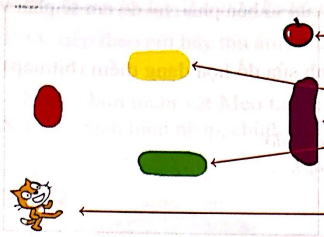
Ví dụ nếu muốn điều khiển nhân vật con mèo nếu va chạm với quả táo thì kêu meo meo, chúng ta có đoạn chương trình sau.

4. Thiết kế trò chơi Mèo ăn Táo

Bây giờ chúng ta cùng thiết kế một trò chơi đơn giản nhưng rất thú vị, trò chơi Mèo ăn Táo.

Giao diện chương trình sẽ phải có dạng tương tự hình sau:

Meo an Tao.sb2



***Quả táo** đặt ở đây, góc phải trên sân khấu.*

Các đống rơm nằm ngẫu nhiên trên sân khấu.

Mèo đặt ở đây, góc trái dưới sân khấu.

Yêu cầu của trò chơi như sau:

– Nhân vật chính của chương trình là Mèo con và quả Táo.

– Em cần điều khiển Mèo đi đến chỗ quả táo và ăn Táo. Điều khiển bằng chuột. Nếu đến được Táo, Mèo sẽ kêu meo meo và nói "Meo meo ăn Táo ngon quá".

– Khi điều khiển Mèo, em cần giúp Mèo đi khéo léo để không tiếp xúc với các đống rơm. Nếu chạm vào một đống rơm Mèo sẽ kêu "Ối ối" và chương trình sẽ dừng lại.

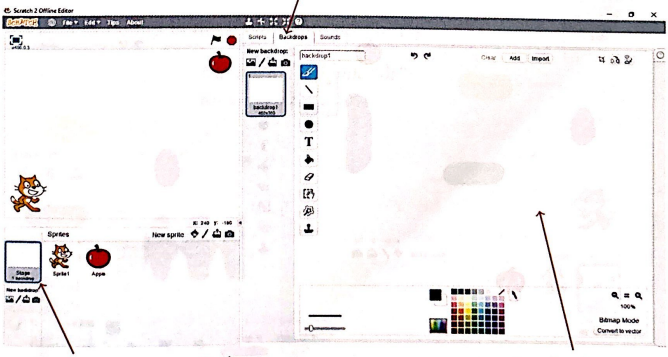
a. Thiết kế nhân vật

Em hãy bổ sung nhân vật quả Táo vào chương trình để kết hợp với nhân vật Mèo con đã có sẵn như hình sau.

b. Thiết kế nền sân khấu

Công việc tiếp theo là vẽ các đống rơm trên nền sân khấu. Các bước thực hiện như hình sau:

*2. Nháy vào nút **Backdrops** để vào chức năng chỉnh sửa sân khấu.*

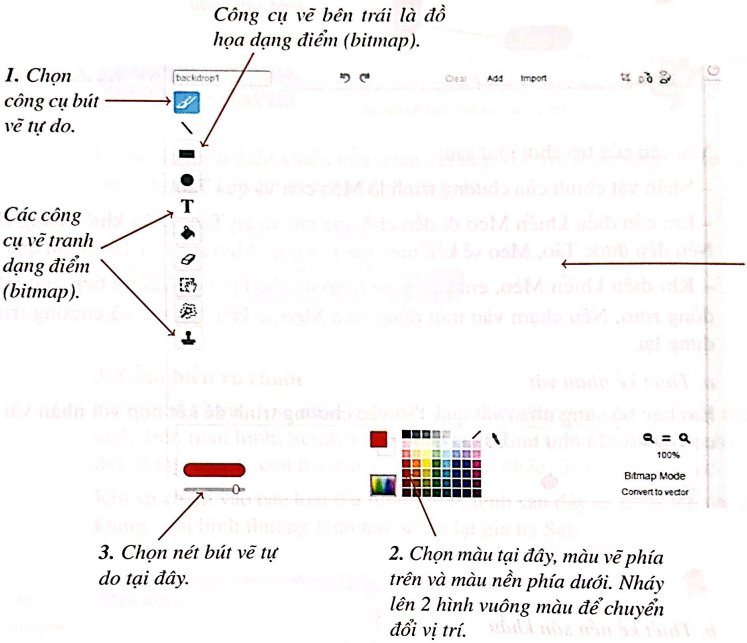


1. Nháy vào ô này để bắt đầu công việc.

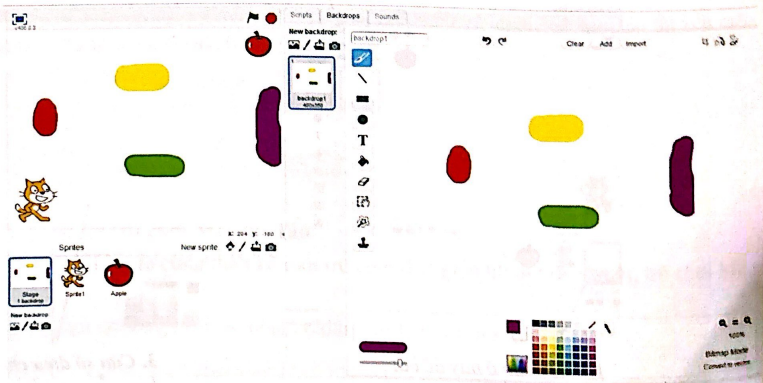
3. Cửa sổ điều chỉnh đồ họa nền sân khấu.

Chúng ta sẽ tập trung chú ý vào cửa sổ bên phải, tại đó em sẽ phải vẽ các đống rơm trên màn hình.

Màn hình sau là cửa sổ vẽ, chỉnh sửa đồ họa dạng điểm (bitmap). Em hãy chú ý đến các điều sau:



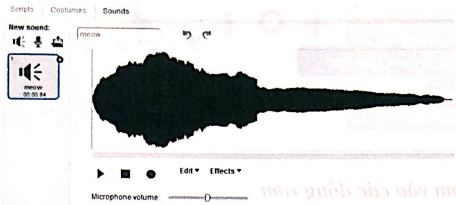
Em hãy sử dụng công cụ bút vẽ tự do để vẽ một số đống rơm với các màu khác nhau trên sân khấu, ví dụ như hình sau:



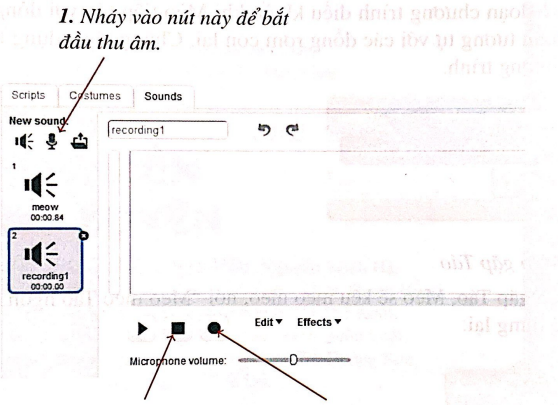
c. Thu âm trực tiếp âm thanh cho Mèo.

Bước tiếp theo em hãy thu âm trực tiếp âm thanh "ối ối" cho Mèo. Cách làm như sau:

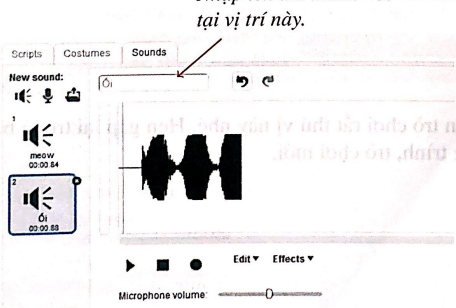
– Nháy chọn nhân vật Mèo tại khung điều khiển nhân vật, sau đó nháy vào nút Sounds, màn hình nhập, chỉnh sửa âm thanh như sau sẽ xuất hiện.



– Bước tiếp theo là thu âm trực tiếp âm thanh "ối ối" cho Mèo con.

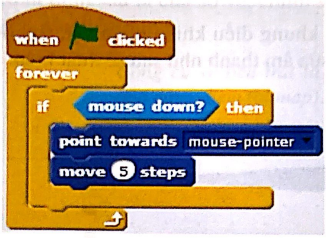


– Việc cuối cùng là đặt tên cho âm thanh này.



d. Lập trình điều khiển Mèo bằng chuột

Đoạn chương trình điều khiển này đã được trình bày trong mục 1.



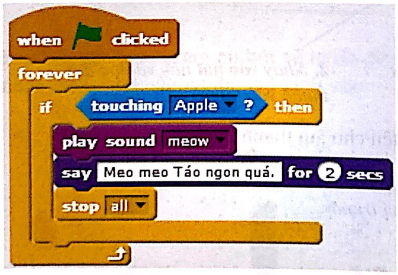
e. Khi Mèo va chạm vào các đống rơm

Mèo cần tránh xa các đống rơm, nếu chẳng may tiếp xúc phải thì lập tức kêu ối ối và chương trình dừng lại.

Đây là 1 đoạn chương trình điều khiển khi Mèo tiếp túc với đống rơm màu tím. Hoàn toàn tương tự với các đống rơm còn lại. Chúng ta sử dụng lệnh **stop all** để dừng chương trình.

f. Khi Mèo gặp Táo

Khi Mèo gặp Táo, Mèo sẽ kêu meo meo, nói "Meo meo Táo ngon quá" và chương trình sẽ dừng lại.



Em hãy hoàn thiện trò chơi rất thú vị này nhé. Hẹn gặp lại trong bài học tiếp theo với những chương trình, trò chơi mới.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. **Email giao dịch:** *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: (024) 3215.1407 Fax: (024) 3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Lê Quốc Tuấn
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: Summer Love... by Gurly
(https://gurly.deviantart.com/art/Summer-Love-44336336)

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 25.000 đồng

JOURNAL

facebook.com/pijournal

Giá: 25.000 đồng
www.pi.edu.vn