TẠP CHÍ PI

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 2 - SỐ 1 THÁNG 1 . 2018

Máy tính lượng tử

Khoa học viễn tưởng giữa đời thực

FRACTAL

miền giao thoa của Toán học, Nghệ thuật và Quy luật tự nhiên

ISSN 2525-2437

TRONG SỐ NÀY

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

3 **Fractal - miền giao thoa của Toán học, Nghệ thuật và Quy luật tự nhiên (Phần 1)**
Phạm Huy Điển

TOÁN HỌC TỪ CỔ ĐIỂN ĐẾN HIỆN ĐẠI

Máy tính lượng tử - khoa học viễn tưởng giữa đời thực 9
Đỗ Ngọc Diệp

GIẢI TOÁN CÙNG BẠN

15 **Cần tối thiểu bao nhiêu bóng điện** *(tiếp theo)*
Nguyễn Khắc Minh

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

Nhiều tác giả

Thách thức kỳ này dành cho THCS 19
Thách thức kỳ này dành cho THPT 19
Giải bài kỳ trước 20

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

32 **Toán pháp đại thành - cuốn sách Toán Việt Nam đầu tiên** *(Phần 2)*
Nhiều tác giả

TRẠM THIÊN VĂN

Lịch sử định danh các ngôi sao và chòm sao 37
Phạm Ngọc Điệp

40 QUÁN TOÁN

TOÁN CỦA BI

45 **Học lập trình Scratch Bài 7: Vẽ thú trong rừng**
Bùi Việt Hà

52 **Thể lệ cuộc thi "Cùng Pi giải toán"**

54 **Chương trình đào tạo toán học Trường ĐH Thăng Long - Viện Toán học**

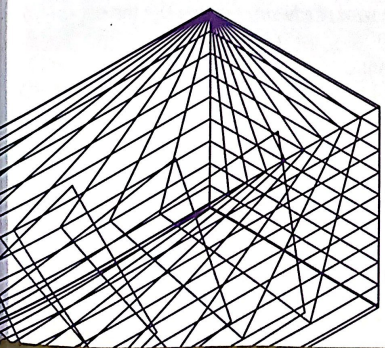
ĐƯỜNG VÀO TOÁN HỌC

55 **Biểu diễn Zeckendorf và trò chơi Fibonacci Nim**
Nguyễn Châu Anh

DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC

60 **Những thay đổi của cô giáo Tâm**
Chu Cẩm Thơ

63 ĐỜI SỐNG TOÁN HỌC



BÁO VỀ TRƯỜNG CŨ

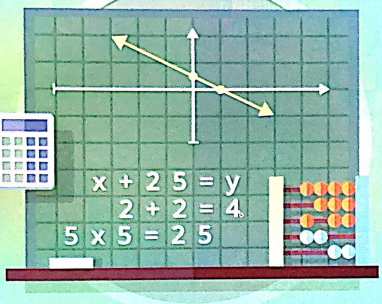
Tạp chí Pi rất vui mừng và biết ơn nhiều tổ chức, cá nhân đã gửi tạp chí đến các em học sinh và thầy cô giáo ở vùng sâu, vùng xa, gửi về trường học cũ của mình:

- **Ông Phạm Ngọc Hùng** mua 20 cuốn/kỳ tặng một số trường THCS và THPT.
- **Nhóm học sinh cũ** mua 15 số/kỳ tặng Trường THCS Phúc Lâm, Mỹ Đức, Hà Nội.
- **Ông Lê Tuấn Hoa** mua 10 cuốn/kỳ tặng Trường THPT chuyên Đại học Vinh.
- **Ông Nguyễn Ngọc Khôi** mua 5 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội.
- **Bà Trần Lưu Vân Hiền** mua 3 cuốn/kỳ tặng trường THPT Nguyễn Tri Phương, Phú Vang, Thừa Thiên Huế và 3 cuốn/kỳ tặng Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.
- **Ông Trần Bá Minh** mua 2 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Anhxtanh, Đống Đa, Hà Nội.
- **Ông Cao Kim Ánh** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Cao Xá, Lâm Thao, Phú Thọ và 1 cuốn/kỳ tặng Trường THPT Long Châu Sa, Lâm Thao, Phú Thọ.
- **Ông Ngô Huy Cẩn** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Lê Lợi, TP Tam Điệp, Ninh Bình.
- **Bà Đinh Thị Thu Cúc** mua 1 cuốn/kỳ tặng Trường THCS Diễn Thái, Diễn Châu, Nghệ An.
- **Quỹ Lê Văn Thiêm** mua 140 cuốn/kỳ làm phần thưởng cho học sinh giỏi toán.
- **Dự án BM2E** mua 2000 cuốn làm quà tặng cho học sinh và các trường
- **Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển toán học** mua 1395 cuốn làm tặng phẩm cho giáo viên học sinh các trường hè 2017 và Ngày hội Toán học mở 2017.
- **Liên minh STEM** mua 1360 cuốn làm phần thưởng trong các hoạt động STEM và tặng một số trường.
- **Hội Toán học Việt Nam** mua 1212 cuốn làm phần thưởng trong kỳ thi MYTS 2017 và 332 cuốn làm phần thưởng trong kỳ thi Olympic sinh viên 2017.
- **Trường Đại học FPT** mua 860 cuốn làm phần thưởng trong các hoạt động.
- **Trung tâm Giáo dục Titan** mua 400 cuốn làm quà tặng một số trường ở Vũng Tàu.
- **Chương trình Sách hóa Nông thôn** mua 300 cuốn tặng cho một số tủ sách nông thôn.

Chúng tôi biết rằng còn có nhiều bạn đọc cũng làm như vậy, nhưng Toà soạn không có được thông tin. Mong các bạn tiếp tục cung cấp thông tin để giúp Toà soạn hiểu rõ hơn về mức độ phổ cập của Tạp chí.

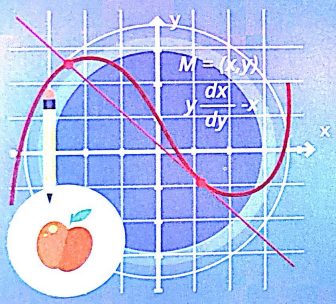
Nghĩa cử của các bạn đã giúp Pi đến gần hơn với các bạn học sinh và thầy, cô giáo.

Tạp chí Pi hy vọng phong trào BÁO VỀ TRƯỜNG CŨ ngày càng được hưởng ứng rộng rãi!



THỂ LỆ GỬI BÀI:

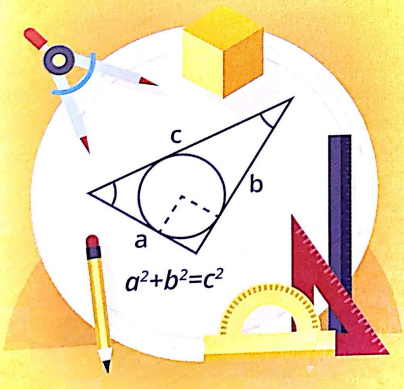
- Trên trang đầu bản thảo từng bài toán đề xuất, bài viết cần ghi rõ họ tên tác giả, nơi học tập/công tác, email và số điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo email với định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf. Chủ đề (subject) của email: Lời giải của bài nào; Bài toán đề xuất; Bài viết cho chuyên mục gì/hoặc không theo chuyên mục nào.
- Bản thảo có thể viết tay gửi qua bưu điện đến Tòa soạn.
- Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.



ĐỊA CHỈ GỬI BÀI:

- Qua email: ***bbt@pi.edu.vn***
- Qua bưu điện:

Tòa soạn Tạp chí Pi
P705 - B8, tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Số 1 Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.



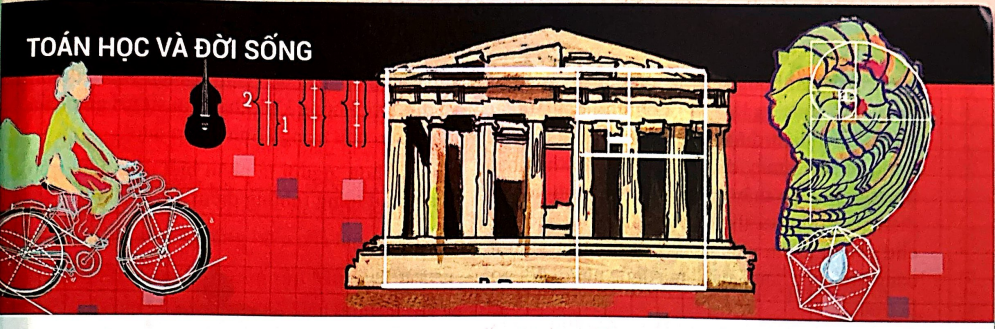
THỂ LỆ ĐẶT BÁO:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- **Đặt tại bưu điện gần nhất:** Mã của Tạp chí Pi là C057. (có thể đặt các số đã ra).

  Bạn đọc gặp vướng mắc trong đặt và nhận báo qua bưu điện xin gọi đường dây nóng 1900 545481 để được hỗ trợ.
- **Đặt tại website *www.pi.edu.vn*:** chọn nút Đặt tạp chí và làm theo hướng dẫn.
- **Đặt với Tòa soạn:**
  - Điền vào biểu mẫu tại đường dẫn ***http://gg.gg/DatTapChiPi.***
  - Hoặc gửi email đến địa chỉ ***info@pi.edu.vn*** nêu nhu cầu đặt báo, chi tiết người nhận báo (họ và tên, địa chỉ, điện thoại).

  Chuyển tiền đặt báo vào Tài khoản Tạp chí Pi số: 0851000012293, Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Hà Thành (trong nội dung chuyển tiền ghi rõ họ tên_điện thoại người chuyển tiền).
- **Đặt mua bản điện tử tại *Alezaa.com*.**



FRACTAL MIỀN GIAO THOA CỦA TOÁN HỌC, NGHỆ THUẬT VÀ QUY LUẬT TỰ NHIÊN

- Phạm Huy Điển -

Phần I. Khái niệm Fractal

1. Fractal là gì?

Theo lời dạy của các cụ - "trăm nghe không bằng một thấy", trước khi bắt đầu tìm hiểu fractal là gì, ta hãy xem nó trông như thế nào. Do vậy, xin bạn đọc bắt đầu bài báo này với việc xem xét cẩn thận hình minh họa dưới đây.

Thực sự hình này không biểu diễn cho những gì mà ta cảm giác là "có vẻ như". Đây không phải là bức ảnh về cảnh quan trên trái đất, trên mặt trăng, hay bất kỳ hành tinh nào khác. Nó cũng không phải là bức tranh của một họa sĩ khoa học viễn tưởng nhằm mô tả những cảnh quan nói

Hình 1: Một cảnh quan không hề có.

trên, và càng không phải là một tác phẩm nghệ thuật. Nó thực ra là "đồ giả hình học" 100%. Nó là biểu diễn được tạo ra bằng máy tính và được vẽ bằng máy tính, với hình hài khác hẳn những gì mà ta thấy trong thế giới hình học cổ điển (hay như ta thường gọi là hình học Euclid), và là thành viên trong "gia đình" các hình dạng hình học "quái đản" mà được người đời gọi là *fractal*.

Các hình dạng fractal tuy trông "khác thường" nhưng thực ra rất đơn giản, theo nghĩa rằng mỗi một chi tiết của chúng đã được sinh ra từ một vài dòng lệnh đơn giản cho máy tính. Những hình dạng này tuy rất liên quan nhưng lại hoàn toàn không giống bất cứ thứ gì có trong môn hình học cổ điển được biết đến trong chương trình phổ thông. Tuy nhiên, fractal không phải là "hư cấu hình học" mà là một phần của một chương toán học vốn cũng là cổ điển nhưng bị che khuất cho đến tận gần đây, vì thiếu các ứng dụng được quan tâm rộng rãi.

Để xác định "fractal là gì?" người ta đã đưa ra một số định nghĩa khá ngắn gọn và súc tích về fractal nhưng, tiếc thay, chúng không nhất quán và ta chỉ có thể hiểu được những định nghĩa này sau khi trải nghiệm với đủ nhiều loại hình hài fractal cụ thể.

2. Tập Mandelbrot

Hình dạng fractal nổi tiếng nhất có lẽ là tập Mandelbrot, mang tên nhà toán học đã khai sinh và đặt tên cho bộ môn hình học này (cho dù những hình dạng kiểu như vậy đã được biết đến trước ông từ rất lâu). Tập Mandelbrot được tạo ra bởi một kỹ thuật tổng quát, theo đó một hàm có dạng

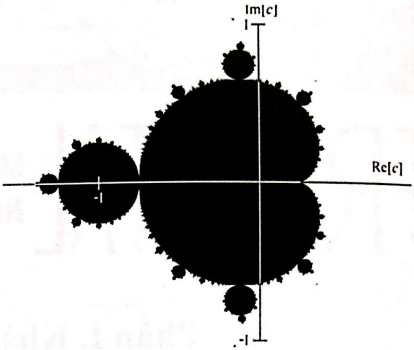
$$z_{n+1} = f(z_n),$$

được sử dụng để tạo ra một dãy các số phức. Trong trường hợp tập Mandelbrot thì hàm được dùng chính là

$$f(z_n) = z_n^2 + c.$$

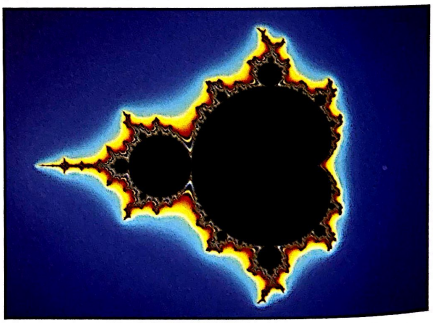
Tùy theo hành vi của dãy tạo ra từ điểm ban đầu $z_0 = 0$ mà điểm c được tô màu đen hay trắng (tức là được phân hoạch trên mặt phẳng phức thành 2 miền đối lập về màu sắc). Những điểm mà làm cho dãy số phức tạo ra bị chặn thì được tô màu đen, còn ngược lại thì được tô màu trắng. Tập các điểm màu đen chính là *tập Mandelbrot*, và được vẽ không khó khăn với sự trợ giúp của máy tính, như trong Hình 2 bên dưới.

Chi tiết hơn, người ta phân biệt các điểm trên vùng màu trắng (những điểm c làm cho dãy số



Hình 2. Tập Mandelbrot trên mặt phẳng phức.

phức sinh ra tiến tới vô cùng, gọi tắt là những "điểm phân kỳ") bằng cách tô màu cho mỗi điểm c tùy thuộc vào tốc độ tiến ra vô cùng của dãy tạo ra là nhanh hay chậm. Công việc gán màu và đánh giá "tốc độ phân kỳ" tuy là thú vị, nhưng cũng khá dài dòng, nên không được đề cập trong bài viết này để tránh làm nó trở nên quá dài. Với một cách gán màu phù hợp, người ta có được hình vẽ sinh động như dưới đây.



Hình 3. Tập Mandelbrot với các "điểm phân kỳ" được tô màu.

Một cách tô màu khác, cũng dựa trên hành vi của chuỗi tạo ra thuộc vào loại nào trong số các tình huống sau:

(a) giảm dần về 0;

(b) tiến tới vô cùng;

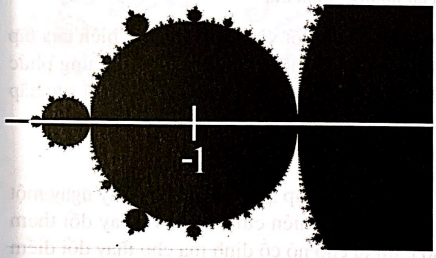
(c) dao động giữa một số trạng thái;

(d) không theo các khuôn mẫu nêu trên.

Khi ấy, tình huống (a) xảy ra ở phần bên trong của tập Mandelbrot, (b) xảy ra ở bên ngoài, còn (c) và (d) xảy ra ở vùng biên của tập.

Tính chất vùng biên của tập Mandelbrot

Biên của tập Mandelbrot thể hiện tính chi tiết và sự biến thiên vô hạn. Nó không bao giờ là "mịn màng" với bất kể tỷ lệ thu phóng nào. Khác hẳn với những gì ta thấy trong hình học Euclid cổ điển, khi phóng đại một khúc đường cong nhỏ (như một mảnh của cung tròn) ta sẽ thấy nó gần như là thẳng, nhưng với đường biên của tập Mandelbrot thì điều này không xảy ra. Dù có phóng đại đến cấp nào đi chăng nữa thì đường biên của tập này trông vẫn xù xì gai góc như khi chưa phóng đại. Chẳng hạn, khi phóng đại "phần đầu" của tập ta thấy nó cũng "xù xì gai góc" như khi chưa phóng đại (xem Hình 4), và thậm chí còn thấy nó "mọc" thêm ra một "cái đầu" nhỏ xíu như hạt gạo nữa.

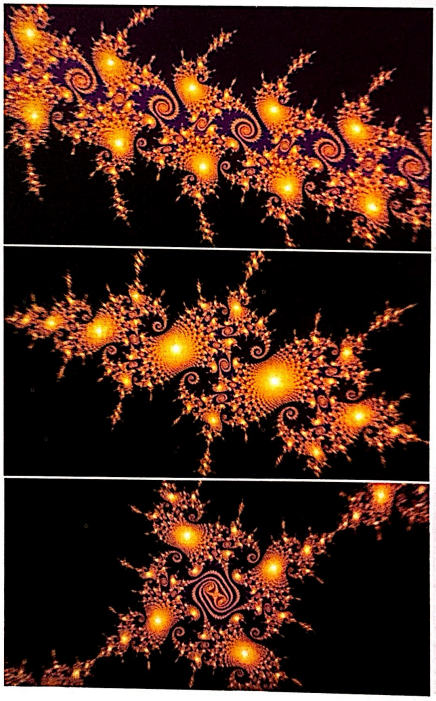


Hình 4. Phóng đại phần đầu của tập Mandelbrot.

Việc phóng đại tập Mandelbrot với các cấp độ khác nhau, mặt khác, lại cho thấy nó có vẻ như mang tính "tự đồng dạng", nghĩa là mỗi mẩu con của nó là đồng dạng với một phần lớn hơn. Tuy nhiên, điều này chỉ là chính xác trong lân cận của một số điểm đặc biệt. Nói chung, tập Mandelbrot chỉ có tính "gần như là tự đồng dạng", tức là có thể tìm được một bản sao nhỏ hơi khác với chính nó ở bất kỳ mức độ nhỏ bé nào. Các bản sao bé nhỏ của tập Mandelbrot mà ta thấy trong Hình 4 (bám xung quanh phần thân lớn hơn) chỉ khác nhau tí chút, chủ yếu là ở những "cái sợi" mỏng manh kết nối chúng với phần thân của tập. Người ta chứng minh được rằng tập Mandelbrot có tính liên thông, một điều tưởng như là hiển nhiên khi quan sát bằng mắt thường, nhưng khi phóng đại vùng biên của tập lên nhiều nhiều lần thì ta sẽ thấy đây là điều hoàn toàn không đơn giản.

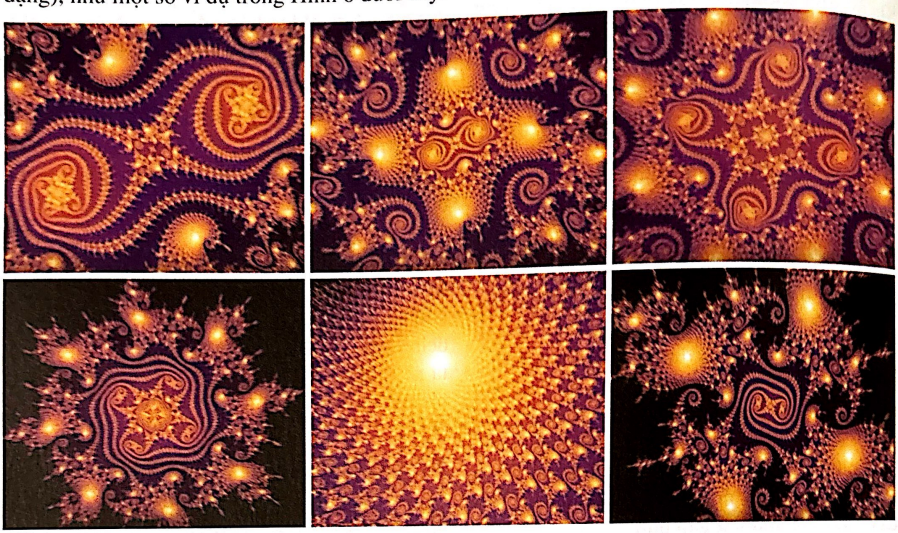
Phóng đại vùng biên của tập Mandelbrot

Thoạt nhìn (xem Hình 2 và Hình 4) ta có thể tưởng rằng vùng biên của tập Mandelbrot chỉ đơn giản là những hạt nhỏ với những sợi tơ phất phơ, nhưng khi phóng đại phiên bản được tô màu (Hình 3) lên rất nhiều lần (việc này hoàn toàn là khả thi nhờ máy tính) ta sẽ thấy rằng không gian xung quanh vùng biên của tập Mandelbrot là vô cùng phức tạp và kỳ lạ. Chẳng hạn, ta sẽ thấy những sợi nhỏ mang dáng dấp của những sợi "dây thừng" với các cấu trúc rất đa dạng, ví dụ như trong hình sau đây.



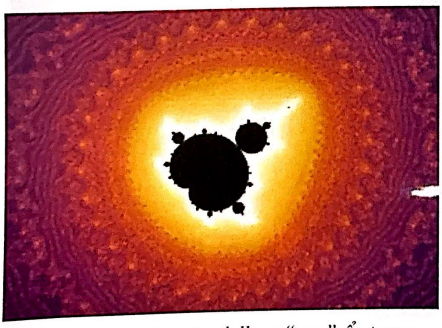
Hình 5. Cấu trúc của những "sợi dây" được phóng đại

Nếu phóng to hơn nữa, ta lại thấy những "dây thừng" không phải được "bện" từ sợi mà được cấu thành từ các "đám bụi" có cấu trúc còn đa dạng và phức tạp hơn nữa. Thật vậy, khi phóng đại mỗi "đám bụi" li ti lên thật nhiều lần ta sẽ thấy một "thế giới cấu trúc" cực kỳ độc đáo (và cũng rất đa dạng), như một số ví dụ trong Hình 6 dưới đây.



Hình 6. Cấu trúc đa dạng của những "đám bụi"

Rõ ràng, mỗi "đám bụi" cho ta một bức tranh kỳ ảo. Chỉ tiếc là ta không có đủ thời gian để tìm cho hết những dáng vẻ đa dạng của chúng. Điều thú vị là, nếu như ta phóng đại những vùng sáng le lói trong những "đám bụi" lên rất nhiều lần thì rất dễ bắt gặp hình hài của chính tập Mandelrot ban đầu (như trong Hình 7 bên dưới). Điều này cho ta thêm một minh chứng về tính "tự đồng dạng" của tập Mandelbrot.



Hình 7. Một tập Mandelbrot "con" ẩn trong "đám bụi".

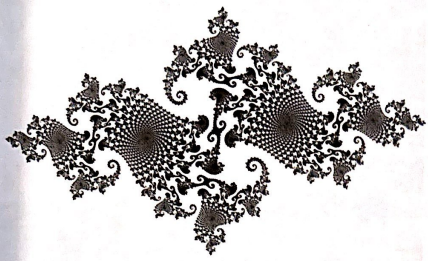
Rõ ràng, mỗi một vùng nhỏ bé trên biên của tập Mandelbrot là một thế giới vi mô vô cùng phức tạp và đa dạng. Chính điều này làm nên sức hấp dẫn của các hình dạng fractal.

3. Tập Julia

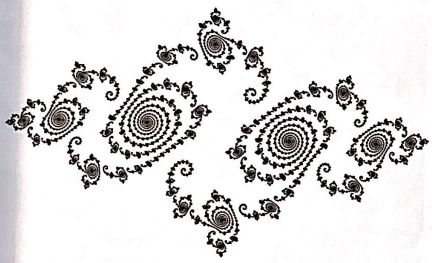
Từ định nghĩa tập Mandelbrot, ta thấy ngay một vấn đề cần nghiên cứu. Thay vì thay đổi tham số c thì ta cho nó cố định mà cho thay đổi điểm khởi đầu của dãy số phức tạo ra trong quá trình lặp, tức là không nhất thiết lấy $z_1 = f(0)$ mà cho $z_1 = f(z_0)$, với z_0 là một số phức nào đó. Khi ấy, dựa trên tiêu chí bị chặn hay không bị chặn của dãy số phức được tạo (tùy theo điểm khởi đầu z_0) mà ta có thể phân hoạch mặt phẳng phức thành 2 miền đối với tham số z_0. Tập những điểm z_0 mà dãy số phức khởi đầu từ nó là một dãy bị chặn được gọi là tập *Julia*. Tập này phụ thuộc vào tham số c và được ký hiệu là $J(c)$. Sau đây là một số ví dụ về tập này (ứng với các tham số c khác nhau.)

Các tập Julia dưới đây cho thấy sự thay đổi mạnh mẽ theo tham số c (chẳng hạn hai tập trong Hình

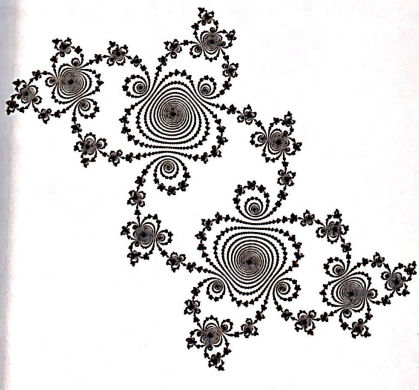
6 và Hình 7 có tham số khá gần nhau, nhưng lại khác nhau rất rõ rệt). Các tập này đều không có tính liên thông, tuy nhiên người ta chứng minh được rằng với những tham số c nằm trong tập Mandelbrot thì tập Julia tương ứng với nó là liên thông. Còn những tham số nằm bên ngoài tập Mandelbrot thì cho ra tập Julia có cấu trúc như những "đám bụi" (và thường được gọi là "đám bụi Fatou").



Hình 8. Tập Julia với c xấp xỉ bằng $-0.74-0.11*i$

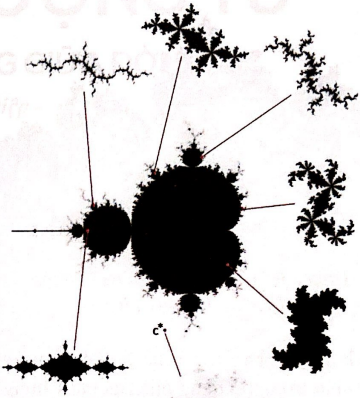


Hình 9. Tập Julia với c bằng $-0.75+0.11*i$



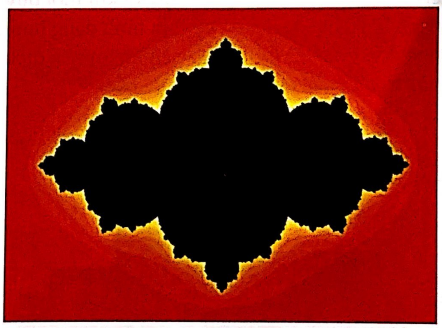
Hình 10. Tập Julia với c bằng $-0.1+0.651*i$

Để thấy rõ hơn các hình thái đa dạng của tập Julia khi tham số c thay đổi bên trong và bên ngoài tập Mandelbrot, ta hãy quan sát Hình 11 bên dưới. Trong hình là các tập Julia rất khác nhau ứng với các điểm được tô màu đỏ trong mặt phẳng phức. Rõ ràng với các điểm màu đỏ ở trên tập Mandelbrot (nằm ở trung tâm của hình) thì các tập Julia ứng với chúng là liên thông, còn khi điểm ở bên ngoài tập Mandelbrot (như điểm c^* chẳng hạn) thì tập Julia ứng với nó trông như một "đám bụi" (khá mờ, phải nhìn kỹ mới thấy).



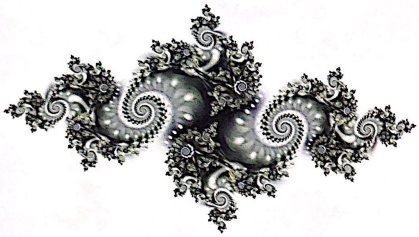
Hình 11. Các hình thái đa dạng của tập Julia

Với một tham số đặc biệt khi $c = 1-\varphi$, trong đó φ là tỷ lệ vàng (tức $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$), thì tập Julia chẳng những liên thông mà còn là một tập "đặc", như thấy dưới đây



Hình 12. Tập Julia khi $c = 1-\varphi$, trong đó φ là tỷ lệ vàng

Ngoài việc tô màu và phóng đại như đã làm đối với tập Mandelbrot, người ta có thêm một thú vui nữa với tập Julia, đó là quan sát sự thay đổi của nó theo sự biên thiên của tham số c, nhất là từ vùng bên trong rồi ra xung quanh tập Mandelbrot. Người ta sẽ thấy nó từ một "tập đặc" (như trong Hình 12 ở trên) được biến đổi thành các hình dạng kỳ lạ, như "con thoi đầu rồng" trong Hình 13 bên dưới, trước khi biến hóa thành những "đám bụi" (như thấy trong các Hình 8-10, hay là tập ứng với điểm c^* trong Hình 11).

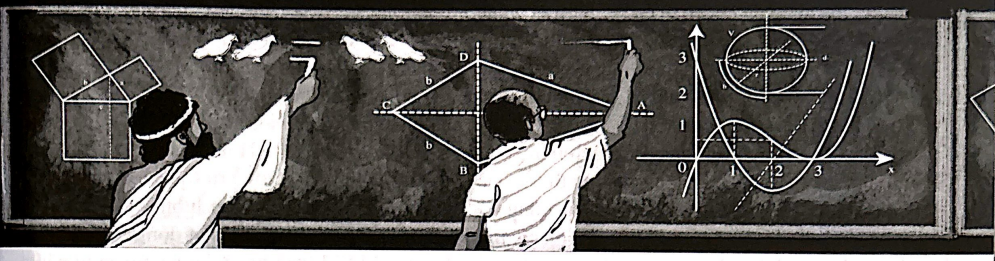


Hình 13. "Con thoi đầu rồng" Julia.
(khi $c = -0.8 + 0.156 * i$)

Tập Mandelbrot và tập Julia là hai ví dụ quen thuộc nhất trong họ hàng nhà fractal. Chúng rất đa dạng và phức tạp, nhưng lại được sinh ra từ những thuật toán hết sức đơn giản. Mọi người đều thừa nhận chúng có vẻ đẹp "kỳ ảo", rất khó giải thích nhưng lại dễ cảm nhận. Ta có thêm một minh chứng cho điều đã được nói đến nhiều - "Vẻ đẹp của Toán học là ở sự đơn giản".

Trên đây ta đã thấy những tập fractal thú vị được sinh ra từ phép lặp với những công thức đại số cực kỳ đơn giản. Điều gì sẽ xảy ra khi một quy trình lặp được áp dụng cho một hình dạng hình học đơn giản? Ta sẽ cùng nhau khám phá điều này trong phần tiếp theo của bài báo.

(*Còn tiếp*)



MÁY TÍNH LƯỢNG TỬ

KHOA HỌC VIỄN TƯỞNG GIỮA ĐỜI THỰC

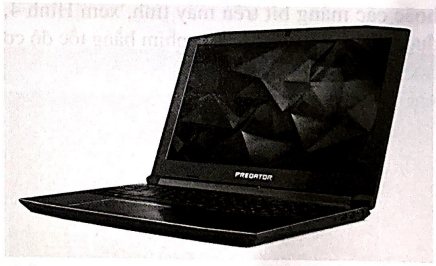
- Đỗ Ngọc Diệp -

Thế giới có thể trở nên không khoảng cách - có thể có mọi thứ từ mọi nơi; thời gian có thể trở nên không thành vấn đề - tức thì có, tức thì biến mất. Có thật những chuyện viễn tưởng như vậy ư? - Có - Nhờ có máy tính lượng tử trong tương lai, mọi việc có thể như vậy. Trong bài này chúng ta sẽ tìm hiểu sơ bộ về một thứ máy tính thú vị này: nó là gì, nó hoạt động ra sao và tương lai của nó thể nào.

Hình 1: Abacus

1. Viễn cảnh gì với máy tính lượng tử?

Bạn thử tưởng tượng một ngày kia, bạn thức dậy, vươn vai và ước có được ly cà phê Mỹ từ New York. Có ngay, một ly cà phê nóng hổi trên bàn của bạn. Bạn lại muốn có đĩa bánh pizza Italia, có ngay. Bạn có thể tàng hình sang New York, Tokyo, Paris... rồi lại tàng hình về ngay. Các phi thuyền bay trong không gian với vận tốc siêu thực. Tin tức truyền đi được bảo mật 100%. Mọi thứ có thể có từ mọi nơi và tức thì. Sao thế nhỉ? Câu trả lời - nhờ có viễn tải do máy tính lượng tử thực hiện. Vậy sao kỳ tài đến thế? - Là vì máy tính lượng tử có tốc độ nhanh gấp cả trăm triệu lần tốc độ của các thế hệ máy tính khủng thông thường hiện nay. Là vì có thể viễn tải, là vì có chia sẻ bí mật theo kiểu lượng tử,...



Hình 2: Laptop

2. Máy tính lượng tử là gì?

Trước khi trả lời câu hỏi này, ta hãy trả lời câu hỏi dễ hơn: máy tính là gì? *Máy tính cổ sơ nhất là bàn tính.* Máy tính hiện đại nhất hiện nay là các siêu máy tính, hay siêu laptop, xem Hình 1, 2, 3.

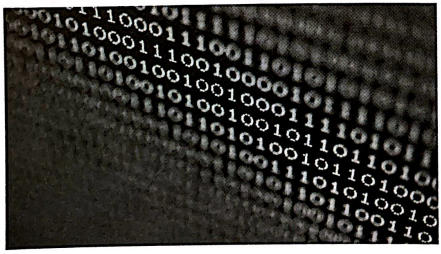
Hình 3: Đa dạng máy tính các loại.

Chúng giống nhau ở chỗ đều làm việc trên các dãy bít có hai trạng thái: đẩy qua bên trái hay đẩy lại qua bên phải trên bàn tính, hoặc tắt hay bật các đèn điện từ trong các vi mạch máy tính. Thao tác cơ bản trên bàn tính là sức người đẩy qua đẩy lại các con tính trên bàn tính nghe như những bàn nhạc khi bạn vào các hiệu thuốc bắc khi họ tính tiền các đơn thuốc, hay các cổng xử lý trên mạng đèn diện tử trong các vi mạch, mà chúng được tích hợp lại trong các bộ vi xử lý gọi là CHIP. Nếu ta nhìn một bảng vi mạch đang hoạt động, các bóng điện tử li ti sẽ tắt, bật liên tục như các vì sao lấp lánh trên bầu trời. *Tốc độ tính toán* trên bàn tính phụ thuộc vào tốc độ người dùng gảy các con tính trên bàn tính hay tốc độ xử lí vi mạch trên các con chip. Như vậy có thể nói tốc độ tính toán hiện nay phụ thuộc vào tốc độ cơ học gảy con tính hay tốc độ vi xử lý trong các vi mạch bằng nguyên tắc điện tử. *Tốc độ này nhỏ thua nhiều trăm triệu lần tốc độ xử lý dùng nguyên tử năng*, cái mà máy tính lượng tử dùng. Cho nên máy tính lượng tử, một khi ra đời có tính năng vượt trội.

Một máy tính bất kể loại nào, dù là bàn tính hay máy tính xách tay hay siêu máy tính, đều hoạt động theo các cung đoạn: nhập dữ liệu (các dãy con tính ở giữa của bàn tính hay các dãy bit

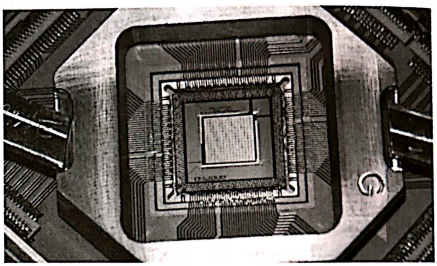
$$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$$

hoặc các mảng bít trên máy tính, xem Hình 4, được nhập vào qua các bàn phím bằng tốc độ cơ học do con người),



Hình 4: Dãy bits, mảng bits

Các xử lý tính toán, người gảy bàn tính suy nghĩ xem đẩy đi đâu - sang trái, sang phải hay nhớ lên hàng trên; vi mạch tính toán bằng các *cổng* tích hợp sẵn trong bộ vi xử lý CHIP và kết xuất đầu ra (người dùng bàn tính đọc kết quả trên bàn tính, máy tính cho kết quả ra ở màn hình). Máy tính lượng tử có các *mảng (array) các qubit* (quantum bit) để ghi các dữ liệu đầu vào, có các *cổng lượng tử* (quantum gates) để thực hiện các thao tác tính toán và chúng được tích hợp trong *CHIP lượng tử*, xem Hinh 5 và có kết xuất đầu ra gọi là phép đo lượng tử (quantum measurement). Cho nên máy tính lượng tử giống như một hệ cơ học lượng tử hoạt động trên nguyên lý của các hệ lượng tử sử dụng nguyên tử năng. Đó là nguyên nhân vì sao nó có tốc độ tính toán siêu phàm.

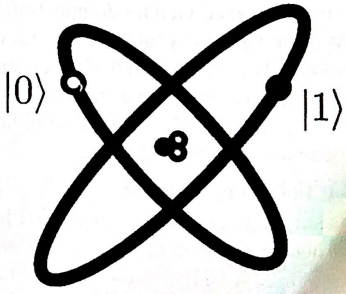


Hình 5: Thí nghiệm Quantum Chip

3. Bits và qubits

Ta hãy đi sâu hơn một chút xem nguyên lý hoạt động của máy tính lượng tử: thế nào là các qubit, thế nào là các cổng lượng tử, các yếu tố cấu thành máy tính lượng tử.

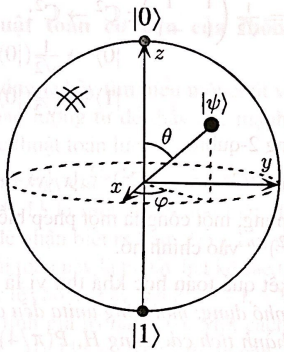
Một bit cổ điển chỉ nhận đúng hai trạng thái 0 hoặc 1: giống như vị trí bên trái hay bên phải đối với các con tính trên bàn tính, nó cũng giống như trạng thái tắt hay bật của các đèn điện tử trong các vi mạch máy tính, xem Hình 1 và 2.



Hình 6: Mô hình nguyên tử cho qubit

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \\ 1 \end{cases}$$

Các bit lượng tử không chỉ nhận hai trạng thái thuần túy cổ điển $|0\rangle$ và $|1\rangle$ nói trên mà có thể nhận các giá trị *siêu vị* (superposition) nhập nhằng $x|0\rangle + y|1\rangle$ với hệ số phức gữa $|0\rangle$ và $|1\rangle$, x và y là hai số phức có tổng bình phương các môđun là 1, $|x|^2 + |y|^2 = 1$, xem Hình 6. Sao lại rắc rối vậy? - Lý do là vì các qubit là các hệ lượng tử có độ tự do phức là 2 ứng với hai trạng thái 0 hoặc 1 cơ học hay điện tử. Thế nên, tập các trạng thái của một qubit lập thành mặt cầu 3-chiều trong không gian 4-chiều thực, gọi là *mặt cầu Bloch*, xem Hình 7.



Hình 7: Mặt cầu Bloch

Các mảng qubit gồm các qubit chạy song song. Hệ các qubit chạy song song được thể hiện như các dãy (tích tensơ) $|x\rangle = |x_1\rangle \dots |x_n\rangle$,

$$x = \sum_{i=0}^{2^n-1} x_i|i\rangle, \qquad |x|^2 := \sum_{i=0}^{2^n-1} |x_i|^2 = 1,$$

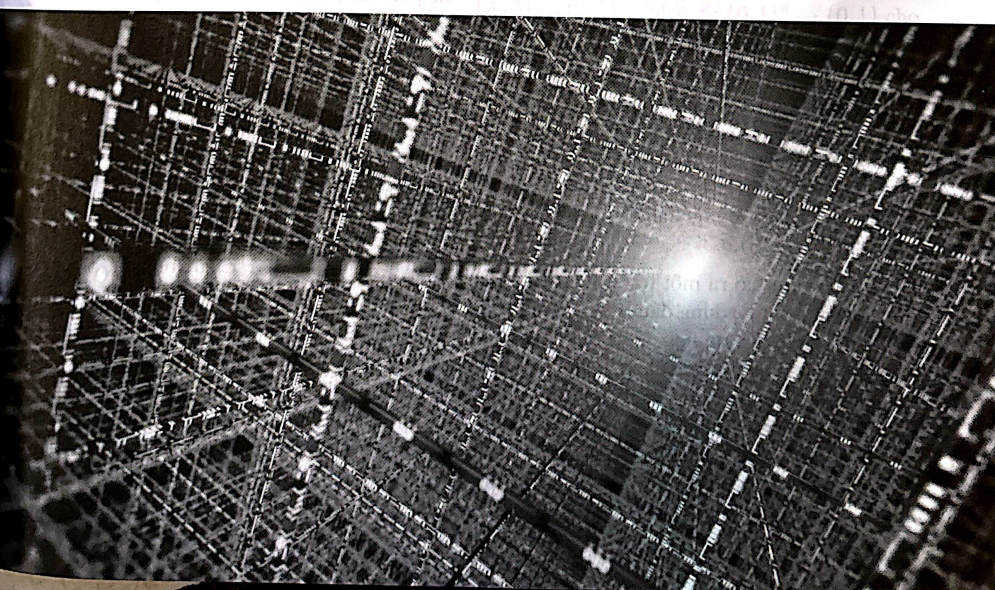
với $|i\rangle := |0\rangle \dots \underbrace{|1\rangle}_{i} \dots |0\rangle$ là các vectơ cơ sở của hệ quy chiếu chuẩn trong $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$.

4. Các cổng lượng tử

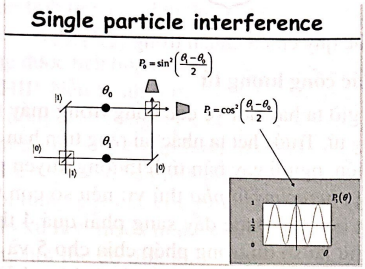
Bây giờ ta hãy nói về các cổng trong máy tính lượng tử. Trước hết ta nhắc lại rằng trên bàn tính cổ điển, người gảy bàn tính thường xuyên phải dùng *phép chuyển pha* thú vị: nếu số con tính ở cột bên trái được đẩy sang phải quá 4 thì ta chỉ giữ lại số dư trong phép chia cho 5 và nhớ 1 sang bên cột bên phải. Nếu ở cột bên phải mà số con tính được đẩy sang trái quá 1 thì ta chỉ giữ lại số dư chia cho 2 còn nhớ 1 lên hàng trên. Ôi, đây chính là phép tính cộng trong $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$. Trong máy tính thông thường các số được viết ở dạng nhị phân, gồm các dãy 0,1 và phép toán nhị phân cũng thường xuyên thực hiện chuyển pha như là phép nhớ sang trái, nhớ lên hàng trên đã nói. Máy tính lượng tử dùng cổng chuyển pha

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \begin{matrix} |0\rangle & \to |0\rangle, \\ |1\rangle & \to |0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle, \end{matrix}$$

với các pha $\varphi \in [0, 2\pi)$ bất kì.

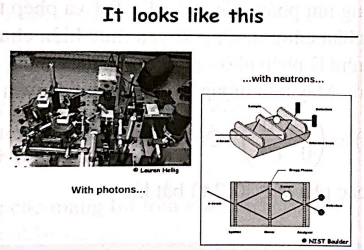


Cổng xuất hiện sớm nhất trong lịch sử ra đời của máy tính lượng tử và có vai trò rất đặc biệt là *cổng tách bím B (beamsplitter)*. Nó có tính chất rất đặc biệt là $B^2 = NOT$, tức là có thể xem nó như căn bậc 2 của phủ định, cái mà trong logic cổ điển không tồn tại, và được cho là phi lí, phi logic, xem Hình 8.



Hình 8: Cổng tách bím B (beamsplitter)

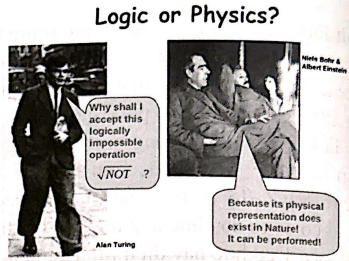
Cổng này tồn tại như một thực thể vật lý và người ta đã thiết kế thí nghiệm được, xem Hình 9.



Hình 9: Thiết kế thí nghiệm cổng tách bím

Cổng $B^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cho phép ở đầu vào là hai trạng thái $|0\rangle$ và $|1\rangle$ ở đầu ra là hai trạng thái $|1\rangle$ với xác suất là $p_1 = \cos^2(\theta_1 - \theta_0)$ và trạng thái $|0\rangle$ với xác suất $p_2 = \sin^2(\theta_1 - \theta_0)$.

Cổng tách bím tạo ra một tranh luận đáng kể giữa các nhà vật lý, đúng đầu là A. Einstein và N. Bohr và các nhà tin học đứng đầu là A. Turing: chấp nhận hay không chấp nhận cổng này. Có thể tưởng tượng ra là A. Turing thì bảo tại sao chúng ta lại phải chấp nhận điều phi logic vậy, trong khi N. Bohr và A. Einstein các nhà vậy lý hàng đầu thì khẳng định chúng ta phải chấp nhận thực tế là như vậy (có thể thí nghiệm thấy) xem Hình 10.



Hình 10: A. Turing, A. Einstein và N. Bohr

Một cổng khác rất đặc biệt là cổng Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2;$$
$$|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$
$$|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

và cổng 2-qubit

$$CNOT : (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2} \to (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}, |x\rangle|y\rangle \to |x\rangle|x \oplus y\rangle.$$

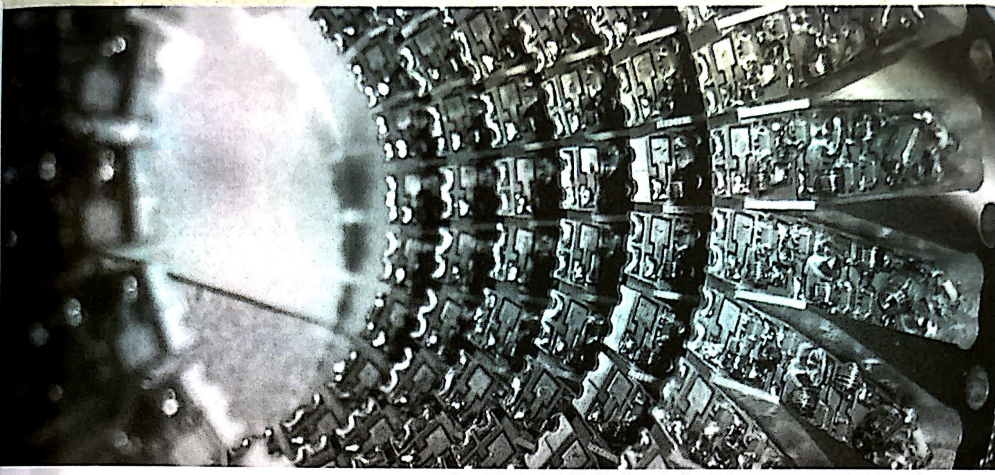
Nói chung, một cổng là một phép biến đổi unita từ $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ vào chính nó.

Một kết quả toán học khá thú vị là *Định lý về cổng phổ dụng: mọi cổng unita đều có thể phân tích thành tích các cổng H, $P(\pi/4)$ và CNOT nói trên*. Kết quả này đưa đến một hệ quả rất thú vị là mọi cổng unita đều có thuật toán hữu hạn để phân tích thành tích các cổng cơ bản. Nghĩa là có thể lập trình!

5. Rối lượng tử

Một trong các thuộc tính cơ bản của máy tính lượng tử là có thể tạo ra các *rối lượng tử (quantum entanglement)*, tức là các trạng thái lượng tử không thể tách thành các trạng thái song song. Người ta dùng chính các trạng thái này, ví dụ trạng thái Bell hay trạng thái Greenberger-Horne-Zeillinger (GHZ), để bảo mật thông tin và đo đạc đầu vào, kết xuất đầu ra.

Các trạng thái Bell và các trạng thái GHZ đều lập thành các cơ sở trực chuẩn của các không gian trạng thái Hilbert và do thế có thể đo đạc các hệ số biến đổi Frourier trừu tượng tương ứng. Bình phương mô đun các hệ số cho xác suất quan sát thấy trạng thái tương ứng.



6. Vài thuật toán cơ bản của thông tin lượng tử

Bây giờ chúng ta hãy tìm hiểu một chút về một số thuật toán lượng tử để thấy sức mạnh vượt trội của các thuật toán lượng tử.

Bài toán lượng giá hàm Boolean. Cho $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ là một hàm chưa biết. Ta cần lượng giá để nhận biết ra hàm $f(x)$. Lời giải cổ điển cho bài toán này là ta hãy liệt kê các trường hợp và thực tế cho ta thấy cần $2^{2-1}+1=3$ phép tham vấn (tính giá trị hàm số). Một cách tổng quát, nếu $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ thì ta cần 2^n+1 phép tham vấn để kết luận hàm có tính chất gì.

Thật là thú vị, trong tính toán lượng tử ta có thể dùng cổng lượng giá

$$U_f : |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \to (-1)^{f(x)}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

Thuật toán Deutsch-Jozsa về tính hằng hay tính cân bằng. Cho $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ là một hàm chưa biết. Ta cần lượng giá để tìm xem nó có *tính chất hằng* $f(x) = const$, tức là $f(0) = f(1)$, hay *tính chất cân bằng*, tức là số giá trị $f(x)$ bằng 1 bằng số giá trị $f(x)$ bằng 0. Lời giải cổ điển cho bài toán này là ta hãy liệt kê các trường hợp và thấy cần $2^{2-1}+1=3$ phép tham vấn (tính giá trị hàm số). Một cách tổng quát, nếu $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ có tính chất hằng hay cân bằng nói trên thì ta cần cỡ $2^{n-1}+1$ phép tham vấn để kết luận hàm có tính chất gì. Thế nhưng máy tính lượng tử tính toán nhanh hơn nhiều, chỉ cần cỡ n phép toán.

Thuật toán tìm kiếm của Grover. Cho $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ là một hàm số trên tập $\{0,1\}^n$ và nhận giá trị 0 hoặc 1, hãy tìm vị trí k để $f(x) = 1$ nếu $x = (0,\ldots,\underbrace{1}_{k},0,\ldots,0)$ và $f(y) = 0, \forall y \in \{0,1\}^n, y \neq x$. Trong lời giải bằng máy tính hiện nay cần đến 2^n+1 tham vấn. Ấy thế mà máy tính lượng tử với thuật toán tìm kiếm của Grover chỉ mất cỡ $2^{n/2}$ phép tính. Ví dụ dùng máy tính cổ điển mất 10.000 phép tính thì máy tính lượng tử chỉ cần 100 phép tính thôi. Tốc độ nhanh đáng kể đấy chứ.

Thuật toán Bernstein-Vazirani tìm hệ số của hàm bậc nhất. Bây giờ ta hãy xét bài toán tìm hệ số của hàm bậc nhất $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ cho bởi công thức $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Lời giải cổ điển là ta cần tính giá trị của hàm tại n điểm $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \ldots, x_n^{(i)})$, $i = 1,\ldots,n$ bằng cách giải hệ n phương trình bậc nhất n biến $a_1,\ldots,a_n$

$$\begin{cases} a_1x_1^{(1)} + \cdots + a_nx_n^{(1)} & = & y^{(1)} \\ a_1x_1^{(2)} + \cdots + a_nx_n^{(2)} & = & y^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdot \\ a_1x_1^{(n)} + \cdots + a_nx_n^{(n)} & = & y^{(n)} \end{cases}$$

Tính toán lượng tử cho luôn thuật toán chỉ cần đúng n tham vấn.

Thuật toán Simon tìm chu kì hàm tuần hoàn. Cho hàm (chính xác hơn, là ánh xạ) $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ có tính chất tuần hoàn, tức

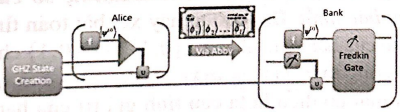
là có một $s \in \{0,1\}^n$ sao cho $f(x+s) = f(x)$, cho mọi $x \in \{0,1\}$. Hãy tìm chu kì s. Trên máy tính thông thường bài toán cần cỡ $2^{n/2}$ phép toán. Ấy vậy mà trên máy tính lượng tử, thuật toán của Simon cho lời giải chỉ cần cỡ n phép toán.

Thuật toán tìm logarithm rời rạc và bài toán phân tích số ra thừa số nguyên tố.

Áp dụng thuật toán Simon trên, người ta giải bài toán tìm bậc của phần tử a trong nhóm đồng dư theo số nguyên m bits M, tức là số mũ nhỏ nhất để a^r chia cho M dư 1. Ông Peter Shor đã đưa ra thuật toán giải chỉ cần cỡ m^2 phép toán và gọi đó là logarithm rời rạc. Áp dụng thuật toán này và Định lý Fermat nhỏ vào bài toán phân tích số ra thừa số nguyên tố chỉ mất cỡ m^2 phép toán. Điều này thật bất ngờ vì trước đó người ta tin là bài toán phân tích số ra thừa số nguyên tố có độ phức tạp cỡ hàm mũ. Kết quả này của Peter Shor đã mở ra cả một cuộc cách mạng trong kĩ thuật mật mã (cryptography).

7. Những chân trời mới mở ra sau tính toán lượng tử.

Người ta đã thí nghiệm viễn tải được qubit đi cự li khá xa, ví dụ 25km. Rồi gần đây người ta còn tuyên bố là đã chế được máy tính lượng tử và viễn tải trên vệ tinh, tàu thuỷ thí nghiệm...



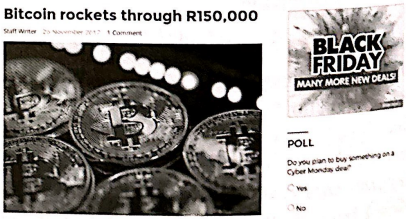
Hình 11: Séc lượng tử

Tuy máy tính lượng tử chưa chế tạo xong nhưng kết quả của tính toán lượng tử mà ta vừa điểm qua ở trên mở ra chân trời rộng mở cho nhiều ngành khoa học và công nghệ: công nghệ thông tin lượng tử với hy vọng bảo mật tuyệt đối, buộc công nghệ mật mã cũ như RSA phải thay đổi vì có nguy cơ bị máy tính lượng tử bẻ khoá mọi mã công khai. Người ta cũng đã viết ra các phần mềm cho thuật toán khác như viễn tải (teleportation), tính toán siêu tốc với chấp nhận lỗi (fault-tolerant computing) để sửa. Tính toán lượng tử đã được các nhà vật lý minh hoạ như các mạng spin của các cặp hạt Fermi và từ đó có áp dụng đáng kể vào các ngành không ngờ như kế toán siêu tốc, tiền điện tử (bitcoin) lượng tử, séc lượng tử (e-cheques) bảo mật 100%, xem Hình 11.

Séc điện tử lượng tử và bitcoin lượng tử khác với bitcoin hiện nay, xem Hình 11 là trên séc lượng tử có dán thêm các qubit bảo mật.

Hình 12: Bitcoin

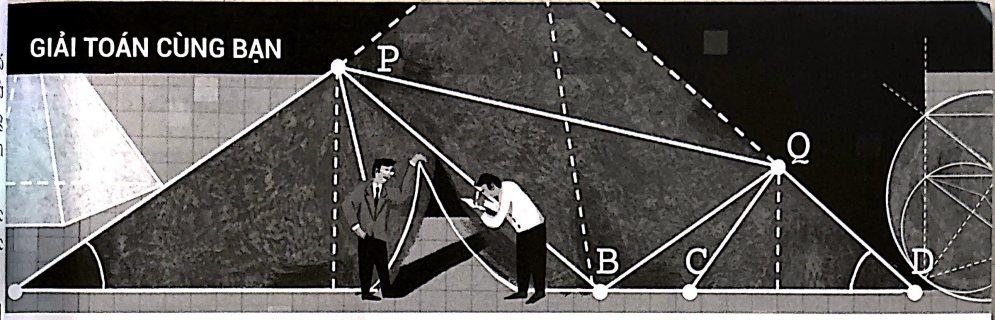
Chắc các bạn sẽ hỏi: vậy chứ ở Việt Nam ta đã có ai làm chưa? - Có đấy - *Nhóm nghiên cứu TLU-QCQI ở Đại học Thăng Long* nghiên cứu tính toán lượng tử theo quan điểm gần toán học và vật lý: viết thuật toán tìm kiếm mẫu, bài toán người bán hàng, cài đặt hộp đen với tri thức heuristic, cài đặt nhờ phân tích Cartan trong đại số Lie, bài toán tìm kiếm với đầu vào bất kì, viễn thông với bảo mật lượng tử, tiền lượng tử, tôpô lượng tử,...



Hình 13: Bitcoin 2

Nhóm đã hoàn thành và đã đăng hơn 100 bài báo nghiên cứu trên các tạp chí khoa học uy tín của thế giới, một số tiến sĩ và thạc sĩ đầu tiên đã bảo vệ tại Việt Nam.

Các bạn trẻ, còn chần chừ gì nữa, *hãy học toán thật tốt và tàng hình vào thế giới lượng tử.*



CẦN TỐI THIỂU BAO NHIÊU BÓNG ĐIỆN? *(Tiếp theo kì trước)*

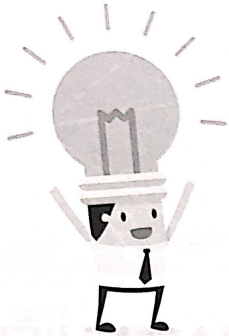
- Nguyễn Khắc Minh -

Ở phần 1 của bài viết (xem Tạp chí Pi tập 1, số 12, tháng 12.2017, trang 13 - 17), sau khi trao đổi với bạn đọc về những "mày mò" trên con đường đi tìm lời giải cho bài P84 (Tạp chí Pi tập 1, số 8, tháng 8.2017, trang 19) và trình bày lời giải thu được sau những "mày mò" đó, chúng tôi có trưng cầu bạn đọc ý về một cảm nhận từ lời giải vừa nêu. Đó là, kích thước của bảng ô vuông chỉ ảnh hưởng tới phần tính số ô đen trong bảng; vì thế, bằng cách chỉnh sửa một cách thích hợp các dữ liệu trong công thức tính số ô đen ở lời giải đã trình bày của bài P84, ta sẽ có lời giải cho bài toán khái quát sau:

Bài toán khái quát. *Cho các số nguyên dương p và q. Một cánh đồng trồng thanh long có dạng một bảng ô vuông kích thước $p \times q$ (bảng có $p \cdot q$ ô vuông đơn vị). Ta gọi mỗi đỉnh của mỗi ô vuông đơn vị là một nút. Để chiếu sáng cánh đồng về ban đêm, người ta cắm những cái que ở các nút (ở một nút cắm một que), ở đầu mỗi que có treo một bóng điện. Biết rằng mỗi bóng điện chỉ có thể chiếu sáng toàn bộ các ô vuông đơn vị có chung nút mà ở đó có cắm que treo bóng điện ấy.*

Hỏi cần dùng tối thiểu bao nhiêu bóng điện để có thể chiếu sáng toàn bộ cánh đồng, kể cả trong trường hợp không may có một bóng điện bị cháy?

Để kiểm chứng cảm nhận nêu trên, hiển nhiên, bạn cần chậm rãi đọc lại lời giải của bài P84, cũng như quá trình "mày mò" đi tới lời giải đó, để hiểu rõ hơn, kĩ hơn về lời giải và những điều ẩn chứa phía sau lời giải ấy. Khi đó, hẳn bạn sẽ thấy các con số 2017 và 2018 không hề "vô can" trong quá trình tìm ra lời giải cho bài P84, mức độ ảnh hưởng của các con số đó tới lời giải của bài toán cũng không đơn giản như đã nêu trong cảm nhận trên. Cụ thể, chính vì tính lẻ của 2017 và tính chẵn của 2018 mà trong quá trình suy xét, giữa cách phân chia bảng 2016×2018 thành các dãy hình vuông 2×2 nằm liên tiếp nhau theo chiều dọc và cách phân chia bảng đó thành các dãy hình vuông 2×2 nằm liên tiếp nhau theo chiều ngang, ta đã chọn cách phân chia theo chiều dọc. Chính vì 2017 là số lẻ nên theo cách suy xét của ta, số bóng điện tối thiểu cần dùng cho mỗi hình chữ nhật 2017×2 là một số chẵn; điều này cùng với phân bố của các bóng điện trong trường hợp tối ưu (theo nghĩa "tiết kiệm bóng điện nhất") đã tạo cho ta cơ hội phân chia các bóng điện cần có (trong trường hợp tối ưu) thành các cặp, đôi một rời nhau; từ đó mà nảy sinh ra giải pháp tạo ra các ô đen làm "đại diện" cho các cặp bóng điện, làm cơ sở cho việc chỉ ra số bóng điện tối thiểu cần dùng.



Như thế, tính khả dụng của lời giải bài P84 đối với việc giải Bài toán khái quát không như ta đã vội tưởng, mà nó phụ thuộc vào tính chẵn, lẻ của các số nguyên dương p, q.

Hiển nhiên, lời giải bài P84 cho ta lời giải của Bài toán khái quát, trong trường hợp một trong hai số nguyên dương p, q là số lẻ và số còn lại là số chẵn. Hơn nữa, dễ thấy, lời giải bài P84 còn cho ta lời giải của Bài toán khái quát, trong trường hợp cả hai số nguyên dương p, q đều là số lẻ. Vì thế, lời giải bài P84 cho ta lời giải của Bài toán khái quát, trong trường hợp trong hai số nguyên dương p, q có ít nhất một số lẻ. Nói cách khác, lời giải bài P84 cho ta lời giải của Bài toán sau, gọi là P84':

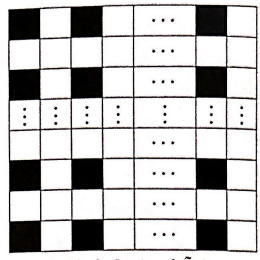
Bài P84'. *Cho các số nguyên dương p và q mà trong đó có ít nhất một số là số lẻ. Một cánh đồng trồng thanh long có dạng một bảng ô vuông kích thước $p \times q$ (bảng có $p \times q$ ô vuông đơn vị). Ta gọi mỗi đỉnh của mỗi ô vuông đơn vị là một nút. Để chiếu sáng cánh đồng về ban đêm, người ta cắm những cái que ở các nút (ở một nút cắm một que), ở đầu mỗi que có treo một bóng điện. Biết rằng mỗi bóng điện chỉ có thể chiếu sáng toàn bộ các ô vuông đơn vị có chung nút mà ở đó có cắm que treo bóng điện ấy.*

Hỏi cần dùng tối thiểu bao nhiêu bóng điện để có thể chiếu sáng toàn bộ cánh đồng, kể cả trong trường hợp không may có một bóng điện bị cháy?

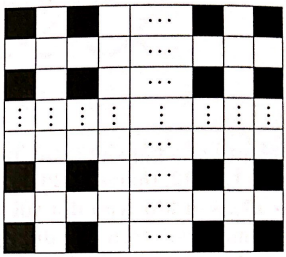
Lời giải.

Vì trong bài toán đang xét, hàng và cột của bảng có vai trò như nhau nên không mất tổng quát, giả sử p là số lẻ.

Tô đen một số ô vuông đơn vị của bảng như ở Hình 1a, nếu q là số chẵn, và như ở Hình 1b, nếu q là số lẻ.



Hình 1a (q chẵn)



Hình 1b (q lẻ)

Ta sẽ gọi mỗi ô vuông đơn vị được tô đen là một *ô đen*.

Hiển nhiên, do việc chiếu sáng phải không bị ảnh hưởng khi có một bóng điện nào đó bị cháy, nên mỗi ô đen sẽ cần tối thiểu 2 bóng điện đảm bảo việc chiếu sáng. Vì bóng điện chiếu sáng ô đen này không thể chiếu sáng ô đen khác (do không có hai ô đen nào có chung nút) nên số bóng điện tối thiểu cần dùng để chiếu sáng tất cả các ô đen bằng $2s$, trong đó s là số ô đen. Vì vậy, số bóng điện cần dùng để chiếu sáng toàn bộ cánh đồng không ít hơn $2s$.

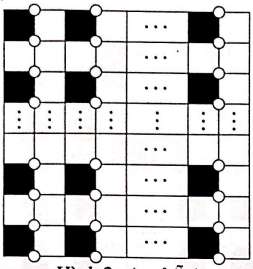
Dễ thấy,

$$s = \frac{p+1}{2} \cdot \left[\frac{q+1}{2}\right] = \left[\frac{p+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{q+1}{2}\right].$$

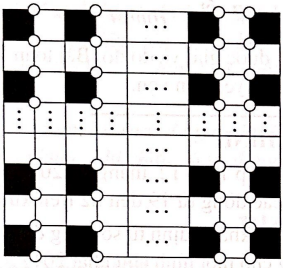
Do đó, theo trên, số bóng điện cần dùng để chiếu sáng toàn bộ cánh đồng không ít hơn $2 \cdot \left[\frac{p+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{q+1}{2}\right]$.

Bằng cách bố trí $2 \cdot \left[\frac{p+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{q+1}{2}\right]$ bóng điện như ở Hình 2a, nếu q là số chẵn, và như ở Hình 2b, nếu q là số lẻ, toàn bộ cánh đồng (tức, toàn bộ bảng) sẽ được chiếu sáng, kể cả trong trường

hợp không may có một bóng điện bị cháy (trong các Hình, mỗi hình tròn nhỏ thể hiện một bóng điện).



Hình 2a (q chẵn)



Hình 2b (q lẻ)

Vậy, số bóng điện tối thiểu cần dùng để chiếu sáng toàn bộ cánh đồng theo yêu cầu đề bài là $2\cdot\left[\frac{p+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{q+1}{2}\right]$ (bóng).

Như vậy, để giải Bài toán khái quát, ta chỉ còn phải xét trường hợp cả hai số nguyên dương p, q đều là số chẵn. Nói cách khác, ta cần tìm lời giải cho bài toán sau, gọi là P84":

Bài P84". *Cho các số nguyên dương chẵn p và q. Một cánh đồng trồng thanh long có dạng một bảng ô vuông kích thước $p \times q$ (bảng có $p \cdot q$ ô vuông đơn vị). Ta gọi mỗi đỉnh của mỗi ô vuông đơn vị là một nút. Để chiếu sáng cánh đồng về ban đêm, người ta cắm những cái que ở các nút (ở một nút cắm một que), ở đầu mỗi que có treo một bóng điện. Biết rằng mỗi bóng điện chỉ có thể chiếu sáng toàn bộ các ô vuông đơn vị có chung nút mà ở đó có cắm que treo bóng điện ấy.*

Hỏi cần dùng tối thiểu bao nhiêu bóng điện để có thể chiếu sáng toàn bộ cánh đồng, kể cả trong trường hợp không may có một bóng điện bị cháy?

Rõ ràng, các ô đen được tạo ra theo cách ở lời giải bài P84' đã không còn hữu dụng trong việc tìm ra đánh giá thỏa đáng cho số bóng điện tối thiểu cần dùng ở bài toán này. Hơn nữa, đối với tình huống đang xét, phương án bố trí các bóng điện như ở lời giải bài P84' (và cũng là ở lời giải bài P84) không hẳn là phương án tiết kiệm bóng điện nhất (bạn có thể thấy điều này qua những thông tin thu được trong quá trình mày mò tìm lời giải cho bài P84). Như thế, bước chuyển từ bài P84 sang bài P84" là một bước khái quát đáng kể.

Thủy chung (vì chưa thấy lí do để phải thay đổi) với ý tưởng "tạo ra các vùng "đen", để từ đánh giá về số bóng điện tối thiểu cần dùng ở các vùng đó, đưa ra đánh giá về số bóng điện tối thiểu cần dùng cho toàn bảng", ta sẽ đi tìm một phương án bố trí tối ưu các bóng điện; từ đó, tìm cách tạo ra các vùng "đen" thích hợp.

Với định hướng trên, bằng các suy xét như khi đi tìm lời giải cho bài P84, bạn có thể tìm ra lời giải dưới đây cho bài P84" (bạn hãy tự làm rõ các suy xét này nha).

Lời giải bài P84".

Vì trong bài toán đang xét, hàng và cột của bảng có vai trò như nhau nên không mất tổng quát, giả sử $p \le q$.

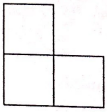
Tô đen một số ô vuông đơn vị của bảng theo cách sau:

– Phân chia bảng đã cho thành $\frac{p}{2}$ hình chữ nhật $2 \times q$.

– Với mỗi $k \in \{1; 2; \ldots; \frac{p}{2}\}$, tô đen một số ô vuông đơn vị của hình chữ nhật thứ k (kể từ dưới lên trên) như ở Hình 3 dưới đây:

Hình 3

Ta gọi mỗi hình



là một hình thước thợ.

Gọi mỗi hình thước thợ được tô đen là một *hình thước thợ đen*; gọi mỗi ô vuông đơn vị được tô đen và không thuộc hình thước thợ đen là một *ô đen*. Hình thước thợ đen và ô đen được gọi chung là *vùng đen*.

Do việc chiếu sáng phải không bị ảnh hưởng khi có một bóng điện nào đó bị cháy, nên mỗi hình thước thợ đen sẽ cần tối thiểu 3 bóng điện (dễ thấy), mỗi ô đen sẽ cần tối thiểu 2 bóng điện.

Vì bóng điện chiếu sáng vùng đen này không thể chiếu sáng vùng đen khác (do không có hai vùng đen nào có chung nút) nên số bóng điện tối thiểu cần dùng để chiếu sáng tất cả các vùng đen bằng $3m+2n$, trong đó, m là số hình thước thợ đen trong toàn bảng và n là số ô đen trong toàn bảng. Vì vậy, số bóng điện cần dùng để chiếu sáng toàn bộ cánh đồng không ít hơn $3m+2n$.

Dễ thấy, ta có

$$m=\frac{p}{2} \text{ và } n=\frac{q}{2}\cdot\frac{p}{2}-\frac{p}{2}.$$

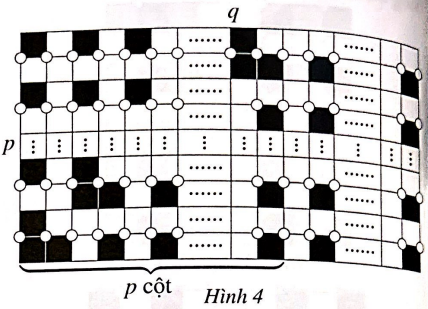
Do đó

$$3m+2n=\frac{pq}{2}+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}(pq+p).$$

Bằng cách bố trí $\frac{1}{2}(pq+p)$ bóng điện như ở Hình 4, toàn bộ cánh đồng (tức, toàn bộ bảng) sẽ được chiếu sáng, kể cả trong trường hợp không may có một bóng điện bị cháy (trong Hình, mỗi hình tròn nhỏ thể hiện một bóng điện).

Vậy, tóm lại, với lưu ý tới giả sử $p \le q$, ta có số bóng điện tối thiểu cần dùng để chiếu sáng toàn bộ cánh đồng (tức, toàn bảng $p \times q$) theo yêu cầu của đề bài là:

$$\frac{1}{2}(pq+p)=\frac{1}{2}(pq+\min\{p,q\}).$$



Hình 4

Bài P84" được giải và do đó, Bài toán khái quát được giải quyết trọn vẹn.

ĐÍNH CHÍNH

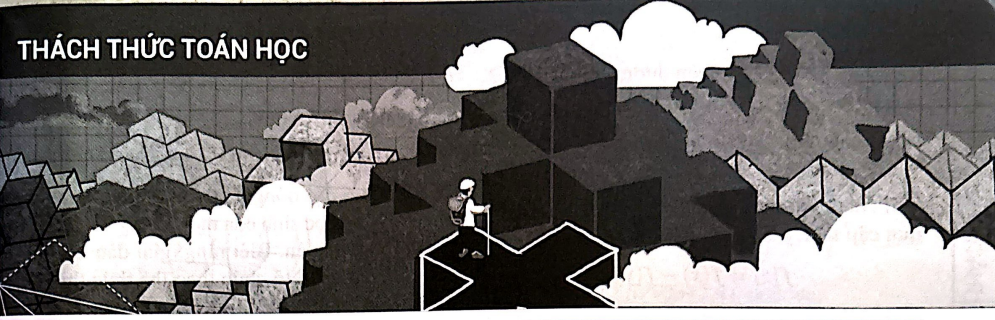
Tạp chí Pi tập 1, số 12, tháng 12.2017, trang 16, cột trái, các dòng từ 19 đến 22 trên xuống:

+ Đã in: thì khẳng định từ số bóng điện tối thiểu cần dùng cho một hình chữ nhật 2017×2 có thể đưa ra đánh giá cho số bóng tối thiểu cần dùng cho toàn bảng lại còn khó hơn!

+ Nay sửa thành: thì khẳng định số bóng điện tối thiểu cần dùng cho một hình chữ nhật 2017×2 bằng các lập luận toán học chặt chẽ đã khó, khẳng định từ số bóng điện tối thiểu cần dùng cho một hình chữ nhật 2017×2 có thể đưa ra đánh giá cho số bóng tối thiểu cần dùng cho toàn bảng lại còn khó hơn!

Chân thành cáo lỗi cùng bạn đọc.

Đồng thanh long ban đêm - ảnh Internet



- *Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng (nếu gửi qua đường e-mail) hoặc một tờ giấy riêng (nếu gửi qua đường bưu điện).*
- *Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục "Thách thức kì này" cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ trên trang bài toán hoặc bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).*
- *Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.*

THÁCH THỨC KÌ NÀY

Dành cho cấp THCS

P131. Cho x, y, z là các số thực dương, thoả mãn điều kiện

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

Chứng minh rằng

$$2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)\le 3$$
$$\le 3(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx.$$

Trần Nam Dũng (Tp. Hồ Chí Minh).

P132. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có đường chéo AD song song với cạnh BC, $AD=2BC$, đồng thời AD là phân giác trong của các góc $\angle EAB$ và $\angle CDE$. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại P. EP cắt AD tại Q. Chứng minh rằng $QB=QC$.

Trần Quang Hùng (Hà Nội)

P133. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) có tính chất: ab là ước của $a+b^2+1$.

Hà Duy Hưng (Hà Nội)

P134. Có 8 đồng xu, trong đó có 7 đồng xu thật và 1 đồng xu giả. Biết rằng các đồng xu thật có khối lượng như nhau và khối lượng của đồng xu giả khác khối lượng của đồng xu thật. Hỏi, chỉ dùng một chiếc cân đĩa (không có quả cân), ta có thể tìm ra đồng xu giả và biết nó nặng hơn hay nhẹ hơn đồng xu thật, sau đúng 4 lần cân hay không?

Nguyễn Khắc Minh (Hà Nội) st.

Dành cho cấp THPT

P135. Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) cố định. B và C là hai điểm cố định nằm trên đường tròn đó, sao cho ba điểm B, O, C không thẳng hàng. Một điểm A di động trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O), sao cho tam giác ABC không là tam giác cân. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AO cắt các đường thẳng BH và CH tương ứng tại M và N. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH. Chứng minh rằng đường thẳng AT luôn đi qua một điểm cố định.

Hà Minh Thơ (Phú Thọ) st.

P136. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x=y-\frac{1}{y^n},\ y=z-\frac{1}{z^n} \text{ và } z=x-\frac{1}{x^n}.$$

Nguyễn Thanh Giang (Tp. Hồ Chí Minh) st.

P137. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu $\mathbb{Q}_n$ là tập tất cả các số hữu tỉ có dạng $\frac{m}{n}$, với m là một số nguyên.

Tìm tất cả các hàm số tăng ngặt $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ có tính chất: Với mỗi số nguyên dương n, và với mọi cặp số $x, y \in \mathbb{Q}_n$, tồn tại số $z \in \mathbb{Q}_n$ sao cho

$$f(z) = f(x) - f(y).$$

($\mathbb{Q}$ kí hiệu tập số hữu tỉ và $\mathbb{R}$ kí hiệu tập số thực).

Nguyễn Duy Thái Sơn (Đà Nẵng)

P138. Cho số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương (a, b) có tính chất:

$$ab \mid a^n + b^{2n} + 1.$$

Hà Duy Hưng (Hà Nội)

P139. Cho số nguyên $n \geq 2$. Cho đa thức

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^k a_k x^{n-k} + \cdots + \\ + (-1)^{n-1} a_{n-1}x + (-1)^n a_n$$

có n nghiệm nguyên dương, gọi là $x_1, x_2, \ldots, x_n$, không đồng thời bằng nhau và có tính chất: tổng nghịch đảo của chúng là một số nguyên.

Đặt $m = \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Chứng minh rằng m là số nguyên dương và đa thức

$$Q(x) = a_n(x+1)^m - (x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)$$

không có nghiệm dương.

Nguyễn Lê Huy (Nam Định) st.

P140. Có 6 đội bóng đá tham gia một giải thi đấu bóng đá học sinh của một trường Trung học phổ thông chuyên. Biết rằng, giải đấu kéo dài 45 ngày và được tổ chức theo thể thức thi đấu vòng tròn (nghĩa là, hai đội bất kì đều thi đấu với nhau đúng một trận). Hỏi Ban tổ chức giải có tất cả bao nhiêu phương án sắp xếp lịch thi đấu sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1) Ba trận đấu đầu tiên có sự góp mặt của cả 6 đội và diễn ra trong ba ngày liên tiếp, mỗi ngày một trận;
2) Kể từ trận đấu thứ ba, giữa hai trận đấu liên tiếp có ít nhất hai ngày không có trận đấu nào.

(Hai phương án sắp xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại trận đấu thứ k ($k \geq 1$) sao cho ở trận đấu đó, hai đội gặp nhau trong phương án này khác hai đội gặp nhau trong phương án kia hoặc tồn tại trận đấu thứ k ($k \geq 3$) mà thời gian giữa trận đó và trận thứ $k+1$ ở phương án này khác ở phương án kia).

Lưu Thanh Hà (Kiên Giang)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

P101. Cho phương trình $3x^2 - 5\sqrt{3}x - 1 = 0$.

1/ Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt, khác $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Gọi hai nghiệm đó là x_1 và x_2, với $x_1 < x_2$.

2/ Không giải phương trình đã cho, hãy tính số trị của biểu thức sau:

$$P = \frac{1}{(2-\sqrt{3}x_1)^3} - \frac{1}{(2-\sqrt{3}x_2)^3}.$$

Lời giải *(theo ý tưởng giải của đa số lời giải mà Tòa soạn nhận được).*

1/ Vì $(-1)\cdot 3 = -3 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt (và trái dấu).

Với $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, ta có:

$$3x^2 - 5\sqrt{3}x - 1 = 3\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 5\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \\ = -7 \neq 0.$$

Do đó, $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ không là nghiệm của phương trình đã cho; nói cách khác, tất cả các nghiệm của phương trình đó khác $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2/ Đặt $t_1 = 2 - \sqrt{3}x_1$ và $t_2 = 2 - \sqrt{3}x_2$, ta có:

$$P = \frac{1}{t_1^3} - \frac{1}{t_2^3} = \frac{t_2^3 - t_1^3}{(t_1\cdot t_2)^3} \\ = \frac{(t_2-t_1)^3 + 3(t_2\cdot t_1)(t_2-t_1)}{(t_1\cdot t_2)^3} \quad (1.1)$$

$$t_2 - t_1 = -\sqrt{3}(x_2 - x_1) \\ = -\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1\cdot x_2} \\ \text{(do } x_2 > x_1\text{)};$$

$$t_1\cdot t_2 = 4 - 2\sqrt{3}(x_1+x_2) + 3x_1x_2.$$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho

nên theo định lý Viete, ta có:

$$x_1+x_2=\frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ và } x_1x_2=-\frac{1}{3}.$$

Do đó

$$t_2-t_1=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2-4\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=-\sqrt{29}; \quad (1.2)$$

$$t_1\cdot t_2=4-2\sqrt{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}+3\left(-\frac{1}{3}\right)=-7. \quad (1.3)$$

Thế (1.2) và (1.3) vào (1.1), ta được:

$$P=\frac{(-\sqrt{29}+3(-7)\cdot(-\sqrt{29})}{(-7)^3}=\frac{8\sqrt{29}}{343}.$$

Cách 2 (*của người chấm bài*).

1/ Làm như phần 1/ ở Cách 1.

2/ Vì x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho nên $-\sqrt{3}x_1$ và $-\sqrt{3}x_2$ là hai nghiệm của phương trình

$$3\cdot\frac{1}{(-\sqrt{3})^2}x^2-5\sqrt{3}\cdot\frac{1}{-\sqrt{3}}x-1=0,$$

hay $x^2+5x-1=0$. (2.1)

Vì $-\sqrt{3}x_1$ và $-\sqrt{3}x_2$ là hai nghiệm của phương trình (2.1) nên $2-\sqrt{3}x_1$ và $2-\sqrt{3}x_2$ là hai nghiệm của phương trình

$$(x-2)^2+5(x-2)-1=0$$

hay $x^2+x-7=0$. (2.2)

Vì $2-\sqrt{3}x_1$ và $2-\sqrt{3}x_2$ là hai nghiệm của phương trình (2.2) nên $t_1=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}x_1}$ và $t_2=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}x_2}$ là hai nghiệm của phương trình

$$-7x^2+x+1=0. \quad (2.3)$$

Hơn nữa, do $x_1<x_2$ nên $2-\sqrt{3}x_1>2-\sqrt{3}x_2$. Mà phương trình (2.2) có hai nghiệm trái dấu (do $1\cdot(-7)=-7<0$) nên $2-\sqrt{3}x_1>0>2-\sqrt{3}x_2$. Suy ra $t_1>0>t_2$.

Ta có:

$$P=t_1^3-t_2^3=(t_1-t_2)^3+3t_1t_2(t_1-t_2). \quad (2.4)$$

Lại có:

$$t_1-t_2=\sqrt{(t_1-t_2)^2}=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$$

(do $t_1>t_2$).

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (2.3), ta được:

$$t_1+t_2=\frac{1}{7} \text{ và } t_1\cdot t_2=-\frac{1}{7}. \quad (2.5)$$

Vì thế

$$t_1-t_2=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2-4\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{\sqrt{29}}{7}. \quad (2.6)$$

Thế (2.5) và (2.6) vào (2.4), ta được:

$$P=\left(\frac{\sqrt{29}}{7}\right)^3+3\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{\sqrt{29}}{7}=\frac{8\sqrt{29}}{343}.$$

Bình luận và Nhận xét.

1. Tuy bài đã ra có dạng rất cơ bản trong phạm vi nội dung chương trình môn Toán lớp 9 hiện hành, số lượng bạn đọc gửi lời giải tới Tòa soạn không thật nhiều. Ngoại trừ một bạn học sinh lớp 7 có lời giải không đúng (do nhầm lẫn trong việc so sánh $2-\sqrt{3}x_1$ và $2-\sqrt{3}x_2$), tất cả các bạn còn lại đều chứng minh phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt bằng cách tính biệt thức Δ. Hơn nữa, do kĩ năng thực hiện các biến đổi đại số chưa thật tốt nên các bạn đã gặp phải những biểu thức khá cồng kềnh trong quá trình giải ý 2/ (của bài đã ra).

2. Kết quả sau đã được sử dụng trong Lời giải Cách 2: "*Giả sử phương trình bậc 2*

$$ax^2+bx+c=0 \quad (*)$$

có nghiệm thực. Khi đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (*) thì

+) αx_0, *với α là một số thực khác 0 tùy ý, là nghiệm của phương trình*

$$\frac{1}{\alpha^2}\cdot ax^2+\frac{1}{\alpha}\cdot bx+c=0;$$

+) $x_0+\beta$ *với β là một số thực tùy ý, là nghiệm của phương trình*

$$a(x-\beta)^2+b(x-\beta)+c=0;$$

+) $\dfrac{1}{x_0}$ *(với giả thiết thêm $x_0\neq 0$) là nghiệm của phương trình*

$$cx^2+bx+a=0."$$

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh kết quả nêu trên bằng cách dùng định nghĩa nghiệm của phương trình. Hơn thế, bằng cách đó, bạn đọc

còn có thể dễ dàng chứng minh kết quả khái quát sau:

"Nếu x_0 là nghiệm của phương trình bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \ (a_0 \neq 0) \text{ thì}$$

+) αx_0, *với α là một số thực khác 0 tùy ý, là nghiệm của phương trình*

$$\frac{1}{\alpha^n} \cdot a_0x^n + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \cdot a_1x^{n-1} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{n-k}} \cdot a_kx^{n-k} + \cdots + \frac{1}{\alpha} \cdot a_{n-1}x + a_n = 0;$$

+) $x_0 + \beta$, *với β là một số thực tùy ý, là nghiệm của phương trình*

$$a_0(x-\beta)^n + a_1(x-\beta)^{n-1} + \cdots + a_k(x-\beta)^{n-k} + \cdots + a_{n-1}(x-\beta) + a_n = 0;$$

+) $\frac{1}{x_0}$ *(với giả thiết thêm $x_0 \neq 0$) là nghiệm của phương trình*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-k}x^{n-k} + \cdots + a_1x + a_0 = 0."$$

3. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Quang Minh* (lớp 9/3, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa, Đồng Nai), *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A1,1trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh), nhóm bạn *Lê Gia Bảo - Hồ Long Nhật* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa) và *Hoàng Lê Nhật Tùng* (sinh viên K61 Sư phạm Toán, ĐHQG Hà Nội).

Nguyễn Khắc Minh

P102. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $p^2 + 15pq + q^2$ là

a) một lũy thừa của 17.

b) một số chính phương.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

a) Giả sử (p, q) là cặp số nguyên tố sao cho

$$p^2 + 15pq + q^2 = 17^n,$$

trong đó, n là số nguyên dương.

Vì $p, q > 1$ nên $17^n = p^2 + 15pq + q^2 > 17$. Suy ra $n \geq 2$. Do đó

$$p^2 + 15pq + q^2 \equiv 0 \pmod{17^2}$$

hay $(p-q)^2 + 17pq \equiv 0 \pmod{17^2}$. (1)

Suy ra $(p-q)^2 \equiv 0 \pmod{17}$. (2)

Từ (2), vì 17 là số nguyên tố nên

$$(p-q)^2 \equiv 0 \pmod{17^2}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3), suy ra $pq \equiv 0 \pmod{17}$. Từ đây, vì 17, p, q là các số nguyên tố, ta được $p = 17$ hoặc $q = 17$.

Do vai trò của p và q như nhau nên không mất tổng quát, giả sử $p = 17$. Khi đó, từ (2) suy ra

$$q^2 \equiv 0 \pmod{17};$$

dẫn tới $q = 17$.

Ngược lại, với $p = q = 17$, ta có

$$p^2 + 15pq + q^2 = 17^2 + 15 \times 17^2 + 17^2 = 17^3.$$

Vậy, có duy nhất cặp số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(17, 17)$.

b) Giả sử (p, q) là cặp số nguyên tố sao cho

$$p^2 + 15pq + q^2$$

là một số chính phương.

Vì p, q là các số nguyên tố nên nếu $p, q \neq 3$ thì $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod 3$. Do đó

$$p^2 + 15pq + q^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

Mà một số chính phương không thể đồng dư với 2 theo modulo 3 nên từ đó suy ra trong 2 số p, q phải có ít nhất một số bằng 3.

Do vai trò của p và q như nhau nên không mất tổng quát, giả sử $p = 3$. Khi đó, ta có

$$q^2 + 45q + 9$$

là một số chính phương; nghĩa là, tồn tại số nguyên dương r sao cho

$$q^2 + 45q + 9 = r^2. \quad (4)$$

Ta có

$$(4) \Leftrightarrow 4q^2 + 180q + 36 = 4r^2$$
$$\Leftrightarrow (2q+45)^2 - 1989 = 4r^2$$
$$\Leftrightarrow (2q - 2r + 45)(2q + 2r + 45) = 1989. \quad (5)$$

Vì $1989 = 3^2 \times 13 \times 17$ nên tất cả các cách phân tích 1989 thành tích của 2 số nguyên dương là:

$$1989 = 1 \times 1989 = 3 \times 663 = 9 \times 221$$
$$= 13 \times 153 = 17 \times 117 = 39 \times 51, \quad (6)$$

Đặt $s = 2q - 2r + 45$ và $t = 2q + 2r + 45$; ta có $s < t$ và $s \cdot t = 1989$ (theo (5)). (7)

Hơn nữa, do $s + t = 4q + 90$ nên

+) $s + t \geq 98$ (vì $q \geq 2$); (8)

+) $s + t - 90$ chia hết cho 4, nhưng không chia hết cho 16 (vì q là số nguyên tố). (9)

Từ (6), (7), (8) và (9) suy ra chỉ có thể xảy ra các khả năng sau:

$$(s,t) = (1,1989),\ (s,t) = (9,221),$$
$$(s,t) = (13,153) \text{ và } (s,t) = (17,117).$$

+) Với $(s,t) = (1,1989)$, ta có

$$q = \frac{s+t-90}{4} = 475.$$

+) Với $(s,t) = (9,221)$, ta có

$$q = \frac{s+t-90}{4} = 35.$$

+) Với $(s,t) = (13,153)$, ta có

$$q = \frac{s+t-90}{4} = 19.$$

+) Với $(s,t) = (17,117)$, ta có

$$q = \frac{s+t-90}{4} = 11.$$

Từ đó, vì q là số nguyên tố, ta được $q = 11$ và $q = 19$.

Ngược lại, với $(p,q) = (3,11)$ ta có

$$p^2 + 15pq + q^2 = 3^2 + 15 \times 3 \times 11 + 11^2 = 625 = 25^2$$

và với $(p,q) = (3,19)$ ta có

$$p^2 + 15pq + q^2 = 3^2 + 15 \times 3 \times 19 + 19^2 = 1225 = 35^2.$$

Vậy, tóm lại, do tính đối xứng của p và q, ta được tất cả các cặp số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $(3,11)$, $(11,3)$, $(3,19)$ và $(19,3)$.

Nhận xét.

1. Tất cả các lời giải mà Tòa soạn nhận được đều có cách giải ý a) của bài toán giống với cách giải ý a) ở lời giải trên; một số ít lời giải chưa chính xác, do không chứng minh số mũ $n \geq 2$.

2. Đối với việc giải ý b), một số bạn, do chưa tận dụng triệt để các tính chất của tình huống đang xét nên đã phải xét quá nhiều trường hợp; một số bạn khác lại xét chưa hết các trường hợp có thể xảy ra; cũng có một số bạn biết loại bớt trường hợp nhưng lại không giải thích vì sao có thể loại các trường hợp đó.

3. Một số lời giải cho kết quả đúng nhưng thiếu toàn bộ quá trình lập luận dẫn đến kết quả đó. Những lời giải như vậy không được coi là lời giải đúng.

4. Có bạn lập luận rằng "với mọi số nguyên a, b, với mọi số nguyên tố p, nếu $a^2 \equiv b^2 \pmod p$ thì $a \equiv b \pmod p$". Lấy, chẳng hạn, $a = 11, b = 3$ và $p = 7$, các bạn sẽ thấy lập luận trên là sai.

5. Các bạn có lời giải đúng: *Lê Gia Bảo* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Lê Quí Đôn, Khánh Hòa), *Lâm Nhựt Thịnh* (lớp 11CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh) và *Hoàng Lê Nhật Tùng* (sinh viên K61 Sư phạm Toán, ĐHQG Hà Nội).

Lưu Thanh Hà

P103. Cho tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi I_1, I_2, I_3 và I_4 tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác DAB, ABC, BCD và CDA. Gọi O_1, O_2, O_3 và O_4 tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AI_2I_4, BI_1I_3, CI_2I_4 và DI_1I_3. Chứng minh rằng

1/ $I_2I_4 \perp AC$ và $I_1I_3 \perp BD$;

2/ Các điểm O_1, O_2, O_3 và O_4 tương ứng nằm trên các đường thẳng AI, BI, CI và DI.

Lời giải (*của người chấm bài*). Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau:

Bổ đề. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB lần lượt tại D, E và F. Khi đó

$$AE = AF = \frac{CA + AB - BC}{2},$$
$$BF = BD = \frac{AB + BC - CA}{2},$$
$$CD = CE = \frac{BC + CA - AB}{2}.$$

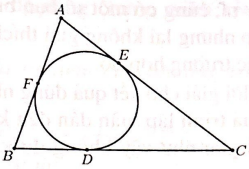
Chứng minh.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của một đường tròn, ta có:

$$AE = AF, BF = BD, CD = CE.$$

Lại có:

$$AE + AF + BF + BD + CD + CE = AB + BC + CA.$$



Suy ra $2AE + 2BD + 2CD = AB + BC + CA$.

Mà $BD + CD = BC$ nên $2AE = AB - BC + CA$.

Do đó $AF = AE = \dfrac{CA + AB - BC}{2}$.

Chứng minh tương tự, ta được

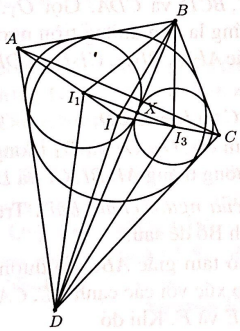
$$BF = BD = \frac{AB + BC - CA}{2}$$

và $$CD = CE = \frac{BC + CA - AB}{2}.$$

Trở lại bài toán.

1/ Gọi X là tiếp điểm của đường tròn (I_1) với BD. Theo bổ đề, ta có

$$BX = \frac{BA + BD - AD}{2} \quad (1)$$



Vì $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp nên

$$AB + CD = BC + AD,$$

hay $BA - AD = BC - CD$. (2)

Từ (1), (2) và áp dụng bổ đề cho tam giác BCD, suy ra

$$BX = \frac{BC - CD + BD}{2} = BX',$$

với X' là tiếp điểm của (I_3) và BD. Do đó, $X \equiv X'$, hay X cũng là tiếp điểm của (I_3) và BD. Vì thế, $I_1X \perp BD$ và $I_3X \perp BD$. Suy ra $I_1I_3 \perp BD$.

Khẳng định $I_2I_4 \perp AC$ được chứng minh bằng cách tương tự.

2/ Do $I_2I_4 \perp AC$ nên

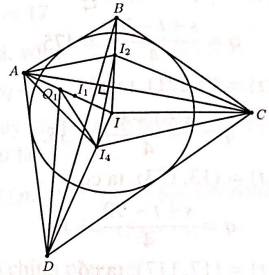
$$\angle I_4I_2A = 90^\circ - \angle I_2AC < 90^\circ.$$

Tương tự, ta có $\angle I_2I_4A < 90^\circ$.

Do AI_2 và AI_4 lần lượt là phân giác của các góc $\angle BAC$ và $\angle DAC$ nên

$$\angle I_2AI_4 = \frac{1}{2}\angle BAD < 90^\circ.$$

Như vậy AI_2I_4 là tam giác nhọn, và vì thế O_1 nằm trong tam giác AI_2I_4.



Vì $AC \perp I_2I_4$ nên AC là đường cao của tam giác AI_2I_4. Do đó

$$\angle O_1AI_4 = \angle I_2AC.$$

Vì thế, ta có

$$\angle O_1AD = \angle O_1AI_4 + \angle I_4AD = \angle I_2AC + \angle CAI_4$$
$$= \angle I_2AI_4 = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

Suy ra AO_1 là phân giác trong của góc $\angle BAD$; do đó, O_1 nằm trên AI.

Chứng minh tương tự, ta cũng có O_2, O_3 và O_4 lần lượt nằm trên BI, CI và DI.

Bình luận và Nhận xét.

1. Trong lời giải trên, ta đã sử dụng kết quả quen thuộc sau để rút ra $\angle O_1AI_4 = \angle I_2AC$:

"Gọi O, I, H tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Khi đó, $\angle IAO = \angle IAH$."

Bạn đọc hãy tự chứng minh lại kết quả nêu trên.

2. Khi cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ suy biến thành tam giác, từ bài đã ra ta sẽ thu được Bài 4 trong đề thi của kỳ thi Romani Master in Mathematics, năm 2015:

"Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ADB, ACD. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AKL nằm trên AI."

Bạn đọc có thể tìm thấy bài toán trên tại đường link sau: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1058212p4575366

3. Người chấm bài này cũng đã suy nghĩ, tìm cách mở rộng bài toán vừa nêu trên và đã đi đến bài toán sau:

Bài toán đề xuất. Cho tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi I_1, I_2, I_3 và I_4 tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác DAB, ABC, BCD và CDA. Gọi O_1, O_2, O_3 và O_4 tương ứng là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AI_2I_4, BI_1I_3, CI_2I_4 và DI_1I_3. Chứng minh rằng:

1/ $O_1O_3 \perp AC$ và $O_2O_4 \perp BD$.

2/ Đường nối trung điểm các đoạn thẳng I_1I_3 và I_2I_4 đi qua I.

3/ Đường nối trung điểm các đoạn thẳng O_1O_3 và O_2O_4 đi qua I.

Tính đúng của các khẳng định trong bài toán trên đã được kiểm chứng bằng máy tính; tuy nhiên, tới thời điểm này, vẫn chưa có lời giải toán học cho bài toán đó. Mong rằng bạn đọc cùng quan tâm tìm lời giải cho bài toán.

4. Trong số các lời giải cho bài đã ra, mà Tòa soạn nhận được cho tới thời điểm bản thảo lên trang, lời giải của các bạn có tên sau đây là lời giải đúng: *Nguyễn Quang Minh* (lớp 9/3, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa, Đồng Nai), *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh) và *Nguyễn Trung Sơn* (lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang).

Trần Quang Hùng

P104. Tìm số nguyên $n \geq 3$ nhỏ nhất có tính chất: Với mọi cách tô n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$, đôi một phân biệt và theo thứ tự đó nằm cách đều nhau trên một đường thẳng, bởi hai màu, luôn tồn tại ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} $(1 \leq i \leq 2j-i \leq n)$ được tô cùng màu.

Lời giải (*theo đa số lời giải mà Tòa soạn nhận được*).

Giả sử các điểm được tô bởi hai màu, đen và trắng.

Xét 8 điểm $A_1, A_2, ..., A_8$, được tô màu như sau: $A_1, A_2, A_5, A6$ được tô màu trắng; A_3, A_4, A_7, A_8 được tô màu đen. Dễ thấy, không có ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} $(1 \leq i < 2j-i \leq 8)$ nào được tô cùng màu.

Do đó $n \geq 9$.

Ta sẽ chứng minh $n = 9$ là số có tính chất như đề bài yêu cầu.

Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại một cách tô 9 điểm $A_1, A_2, ..., A_9$ bởi hai màu, đen và trắng, sao cho không có ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} $(1 \leq i < 2j-i \leq 9)$ nào được tô cùng màu.

•*Trường hợp 1:* Tồn tại $i \in \{3; 4; 5\}$ sao cho các điểm A_i và A_{i+2} được tô cùng màu, giả sử là màu trắng. Khi đó, các điểm $A_{i-2}, A_{i+1}, A_{i+4}$ phải được tô màu đen (chú ý rằng $i-2 \geq 1$ và $i+4 \leq 9$), vô lý.

•*Trường hợp 2:* Với mọi $i \in \{3; 4; 5\}$, các điểm A_i và A_{i+2} được tô khác màu.

Không mất tổng quát, giả sử A_5 được tô màu trắng. Khi đó, A_3 và A_7 được tô màu đen. Nhờ tính đối xứng, ta có thể giả sử rằng A_4 được tô màu trắng và A_6 được tô màu đen. Khi đó, A_8 được tô trắng (do A_6, A_7 và A_8 không được tô cùng màu); suy ra, A_2 được tô đen (do A_2, A_5 và A_8 không được tô cùng màu) và A_9 được tô trắng (do A_7, A_8 và A_9 không được tô cùng màu). Do đó, A_1 phải vừa được tô trắng (do A_1, A_2 và A_4 không được tô cùng màu), vừa được tô đen (do A_1, A_5 và A_9 không được tô cùng màu), là điều vô lý.

Những điều vô lí nhận được ở trên cho ta điều muốn chứng minh.

Vậy, tóm lại, $n = 9$ là số nguyên nhỏ nhất có tính chất như đề bài yêu cầu.

Bình luận và Nhận xét.

1. Hầu hết các lời giải mà Tòa soạn nhận được đều là lời giải đúng. Tuy nhiên, ngay trong một số lời giải đúng cũng có những nhược điểm về suy luận logic, cần rút kinh nghiệm. Cụ thể:

– Do không ý thức được rằng nếu số nguyên $n \geq 4$ không có tính chất như đề bài yêu cầu thì số nguyên $n-1$ cũng không có tính chất đó, một số bạn đã cồng kềnh hóa lời giải bằng việc

xét lần lượt từng số nguyên n thuộc tập hợp $\{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

– Một vài bạn, do **chưa hiểu rõ khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất** nên đã giải bài ra theo lược đồ sau:

+ Chứng minh các số n thuộc tập hợp $\{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ không có tính chất như đề bài yêu cầu;

+ Chứng minh $n = 9$ là số có tính chất như đề bài yêu cầu;

+ Chứng minh tất cả các số nguyên $n > 9$ đều có tính chất như đề bài yêu cầu;

+ Từ kết quả chứng minh ở các bước trên, suy ra $n = 9$ là số nguyên nhỏ nhất cần tìm.

2. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Quang Minh* (lớp 9/3, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa, Đồng Nai); *Trần Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh); *Nguyễn Quốc Hưng*, *Phạm Đình Anh Khoa* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh) và *Doãn Quang Tiến* (lớp 11A1, trường THPT Phú Mỹ, Huyện Tân Thành, Bà Rịa - Vũng Tàu).

3. Có thể phát biểu lại bài đã ra dưới dạng: "Tìm số nguyên $n \geq 3$ nhỏ nhất có tính chất: Với mọi cách phân chia tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên thành hai tập con khác rỗng, luôn tồn tại một dãy số cách đều gồm 3 số hạng mà tất cả các số hạng của nó đều thuộc cùng một tập con."

Dạng phát biểu trên gợi ý cho ta đặt ra và tìm cách giải quyết bài toán khái quát sau:

Bài toán khái quát. Cho số nguyên $k \geq 3$. Tìm số nguyên $n \geq k$ nhỏ nhất có tính chất: Với mọi cách phân chia tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên thành hai tập con khác rỗng, luôn tồn tại một dãy số cách đều gồm k số hạng mà tất cả các số hạng của nó đều thuộc cùng một tập con.

Lưu ý rằng, hướng khái quát trên không phải là duy nhất.

Hà Thanh

P105. Cho số thực $a > 0$ và cho dãy số (x_n), $n = 1, 2, \ldots$, được xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{x_n}}{n^2} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$

Lời giải 1 (*của bạn Nguyễn Quang Minh, lớp 11 chuyên Toán, trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh*).

Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\sqrt{x_n}}{n^2} > 0 \quad \forall n \geq 1. \qquad (*)$$

Do đó, (x_n) là dãy số tăng.

Hơn nữa, từ $(*)$ còn suy ra

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i}}{i^2}$$

$$< \sqrt{x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}$$

$$< \sqrt{x_{n+1}}\left(1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right)$$

$$= \sqrt{x_{n+1}}\left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \sqrt{x_{n+1}}\left(2 - \frac{1}{n}\right) < 2\sqrt{x_{n+1}}.$$

Do đó, $x_{n+1} - 2\sqrt{x_{n+1}} - a < 0$. Suy ra

$$\sqrt{x_{n+1}} < 1 + \sqrt{a+1}.$$

Như vậy, (x_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $(1+\sqrt{a+1})^2$; vì thế, nó có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải 2 (*của bạn Trần Tiến Mạnh, lớp 12A1, trường THPT chuyên, Đại học Vinh*).

Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\sqrt{x_n}}{n^2} > 0, \forall n \geq 1.$$

Do đó, (x_n) là dãy số tăng và $x_n > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh dãy (x_n) bị chặn trên.

Thật vậy, ta có

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{x_n}}{n^2} < x_n + \frac{2\sqrt{x_n}}{n^2} + \frac{1}{n^4}$$

$$= \left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{n^2}\right)^2, \forall n \geq 1.$$

Suy ra

$$\sqrt{x_{n+1}} < \sqrt{x_n} + \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{x_{n+1}} < \sqrt{x_n} + \frac{1}{n^2} < \sqrt{x_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$$
$$< \cdots < \sqrt{x_1} + 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Để ý rằng

$$\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

ta suy ra $\sqrt{x_{n+1}} < \sqrt{a} + 2$.

Do đó, dãy (x_n) bị chặn trên bởi $(\sqrt{a}+2)^2$.

Vậy, (x_n) là dãy tăng và bị chặn trên; do đó, nó có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Bình luận và Nhận xét.

1. Đây là một bài toán khá cơ bản về giới hạn. Tuy nhiên, số bạn tham gia giải bài này không nhiều. Ngoài hai bạn Nguyễn Quang Minh và Trần Tiến Mạnh, còn có bạn *Doãn Quang Tiến* (11A1, trường THPT Phú Mỹ, Huyện Tân Thành, Bà Rịa - Vũng Tàu) và bạn *Trương Mạnh Tuấn* (lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội) cũng có lời giải đúng.

2. Cả hai lời giải nêu trên đều sử dụng đến bất đẳng thức

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Có một cách đánh giá chặt hơn cho tổng này, như sau:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2^2 - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$$
$$= 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}} + \cdots + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{5}{3} - \frac{2}{2n+1} < \frac{5}{3}.$$

Đánh giá của bạn Trần Tiến Mạnh cũng có thể làm chặt hơn; cụ thể, ta có thể chứng minh $x_n < (\sqrt{a}+1)^2$.

Những sự làm chặt kể trên được nêu ra chỉ để bạn đọc tham khảo; chúng không cần thiết cho việc giải bài đã ra.

Trần Nam Dũng

P106. Cho dãy số $(u_n)_{n\geq 1}$ được xác định như sau:

i) $u_n \in \{-1; 1\}$, với mọi n nguyên dương;

ii) $u_1 = -1, u_2 = 1$;

iii) Với mỗi số nguyên dương k, đứng giữa số 1 thứ k và số 1 thứ $(k+1)$ trong dãy (tính từ trái qua phải) có đúng $k+1$ số -1.

Hãy tìm một công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Trước hết, nhận thấy, với $k \in \mathbb{N}^*$, nếu u_m, $m \in \mathbb{N}^*$, là số hạng nhận giá trị 1 và là số 1 thứ k (kể từ số hạng đầu tiên) trong dãy thì m số hạng đầu tiên của dãy sẽ gồm đúng k số hạng nhận giá trị 1 và

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

số hạng nhận giá trị -1. Vì vậy, nếu u_m là số 1 thứ k (kể từ số hạng đầu tiên) trong dãy thì

$$m = k + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+3)}{2}.$$

Với mỗi $t \in \mathbb{N}$, đặt $f(t) = \dfrac{t(t+3)}{2}$.

Xét $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý. Khi đó, với $k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$f(k) \leq n \Leftrightarrow k^2 + 3k - 2n \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{-3 + \sqrt{8n+9}}{2}.$$

Vì vậy, dễ thấy , nếu đặt $k_n = \left[\frac{-3+\sqrt{8n+9}}{2}\right]$ thì $k_n \in \mathbb{N}$, và từ sự tương đương nói trên ta có:

$$f(k_n) \leq n \leq f(k_n + 1).$$

Do vậy, theo nhận xét ở trên, trong số n số hạng đầu tiên của dãy số, có đúng k_n số hạng nhận giá trị 1. Suy ra, tổng S_n của n số hạng đầu tiên của dãy số được tính theo công thức:

$$S_n = 1 \cdot k_n + (-1) \cdot (n - k_n)$$
$$= 2k_n - n = 2\left[\frac{-3+\sqrt{8n+9}}{2}\right] - n$$

với mọi số nguyên dương n.

Bình luận và Nhận xét.

1. Các bạn *Nguyễn Nam Hưng* (lớp 9A11, trường THCS Ngô Tất Tố, Quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh), *Nguyễn Quang Minh* (lớp 9/3, trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp. Biên Hòa, Đồng Nai), *Bùi Khánh Vĩnh* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh) và một bạn quên ghi tên có lời giải

đúng và hoàn chỉnh. Bạn *Nguyễn Quang Minh* (lớp 11 chuyên Toán, trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh) có lời giải tương đối hoàn chỉnh (lập luận của bạn ở một đôi chỗ chưa hoàn toàn chặt chẽ).

2. Công thức thu được trong lời giải trên hiển nhiên đúng khi $n = 0$, nếu ta quy ước $S_0 = 0$. Vì thế, từ kết quả của bài đã ra, ta thu được một công thức thú vị, xác định số hạng tổng quát của dãy số đã cho:

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 2\left(\left[\frac{-3+\sqrt{8n+9}}{2}\right] - \left[\frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2}\right]\right) - 1$$
$$\forall n \geq 1.$$

Nguyễn Duy Thái Sơn

P107. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$4xy \cdot f(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2) \cdot f(2x) \cdot f(2y),$$

với mọi số thực x, y.

($\mathbb{R}$ kí hiệu tập số thực).

Lời giải (*của Đáp án*).

Giả sử f là một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1: Tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(2x_0) = 0$.*

Thế $x = x_0$ vào phương trình hàm đã cho, ta được

$$4x_0 \cdot y \cdot f(x_0^2 - y^2) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, $f(x_0^2 - y^2) = 0 \ \forall y > 0$.

Từ đó, vì $x_0^2 - y^2$ nhận mọi giá trị thực nhỏ hơn x_0^2 nên

$$f(t) = 0 \ \forall t \leq 0. \quad (1)$$

Do đó, thế $y = y_0$, với y_0 là một số thực âm tùy ý, vào phương trình hàm đã cho, ta được

$$4x \cdot y_0 \cdot f(x^2 - y_0^2) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, $f(x^2 - y_0^2) = 0 \ \forall x > 0$.

Từ đó, vì $x^2 - y_0^2$ nhận mọi giá trị thực lớn hơn $-y_0^2$ nên

$$f(t) = 0 \ \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(x) \equiv 0$.

Ngược lại, dễ thấy hàm số vừa nêu trên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

• *Trường hợp 2: Không tồn tại $x \neq 0$ sao cho $f(2x) = 0$.*

Thế $y = \sqrt{x^2 - 2x}$, $x \geq 2$, vào phương trình hàm đã cho, ta được

$$4x\sqrt{x^2 - 2x} \cdot f(2x)$$
$$= 2x \cdot f(2x) \cdot f(2\sqrt{x^2 - 2x}) \ \forall x \geq 2.$$

hay $f(2\sqrt{x^2 - 2x}) = 2\sqrt{x^2 - 2x} \ \forall x \geq 2$.

Từ đó, vì với $x \geq 2$, biểu thức $\sqrt{x^2 - 2x}$ nhận mọi giá trị thực không âm nên

$$f(t) = t \ \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Do đó, với mọi $y < 0$, với mọi $x > |y|$, ta có

$$4xy \cdot (x^2 - y^2) = (x^2 - y^2) \cdot 2x \cdot f(2y),$$

hay $f(2y) = 2y \ \forall y < 0$.

Như thế, $f(t) = t \ \forall t < 0$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ngược lại, dễ thấy, hàm số vừa nêu trên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy, tóm lại, có tất cả hai hàm số cần tìm là: $f(x) \equiv 0$ và $f(x) = x$.

Nhận xét.

1. Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên, chỉ có 4 bạn có lời giải đúng. Rất nhiều bạn vẫn còn mắc những lỗi cơ bản khi giải phương trình hàm, điển hình như:

"Từ $f(x) \cdot g(x) = h(x) \cdot g(x) \ \forall x \in M$ suy ra $f(x) = h(x) \ \forall x \in M$, mà không hề kiểm tra $g(x)$ có khác 0 với mọi $x \in M$ hay không!"

2. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Tuấn Hoàng* (lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Tp Hà Nội); *Trần Tiến Mạnh* (lớp 12A1, trường THPT chuyên Đại học Vinh), *Nguyễn Hùng Sơn* (lớp 11A2, trường THPT Lê Quý Đôn, Huyện Trực Ninh, Nam Định) và *Trương Mạnh Tuấn* (lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội).

Võ Quốc Bá Cẩn

P108. Các đường phân giác trong xuất phát từ A, B, C của tam giác nhọn ABC tương ứng cắt các cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi I là tâm

đường tròn nội tiếp tam giác ABC và gọi H là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng

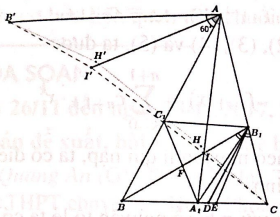
$$AH+BH+CH \geq AI+BI+CI.$$

Lời giải (*của PSC IMO 2016*).

Không mất tổng quát, giả sử

$$\alpha = \angle BAC \leq \beta = \angle CBA \leq \gamma = \angle ACB.$$

Đặt $a = BC$, $b = CA$ và $c = AB$.



Trước hết, ta chứng minh $A_1B_1C_1$ là tam giác nhọn.

Trên cạnh BC, lấy các điểm D và E sao cho $B_1D \parallel AB$ và B_1E là phân gác trong của góc $\angle BB_1C$.

Vì $\angle B_1DB = 180^\circ - \beta$ là góc tù nên $BB_1 \geq B_1D$. Do đó

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BB_1}{B_1C} > \frac{DB_1}{B_1C} = \frac{BA}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Vì thế, $BE > BA_1$ và

$$\frac{1}{2}\angle BB_1C = \angle BB_1E > \angle BB_1A_1.$$

Bằng cách tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{2}\angle BB_1A > \angle BB_1C_1.$$

Suy ra

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle BB_1A_1 + \angle BB_1C_1$$
$$< \frac{1}{2}(\angle BB_1C + \angle BB_1A) = 90^\circ.$$

Do đó, $\angle A_1B_1C_1$ là góc nhọn. Từ đây, nhờ tính đối xứng, suy ra $A_1B_1C_1$ là tam giác nhọn.

Gọi F là giao điểm của BB_1 và A_1C_1. Từ $\alpha \leq \gamma$, ta được $a \leq c$. Suy ra

$$BA_1 = \frac{ca}{b+c} \leq \frac{ac}{a+b} = BC_1$$

và do đó, $\angle BC_1A_1 \leq \angle BA_1C_1$.

Từ đó, vì BF là phân giác trong của $\angle A_1BC_1$, suy ra

$$\angle B_1FC_1 = \angle BFA_1 \leq 90^\circ.$$

Do đó, H nằm cùng phía với C_1 đối với đường thẳng BB_1. Điều này chứng tỏ H nằm trong tam giác BB_1C_1.

Bằng cách tương tự, từ $\alpha \leq \beta$ và $\beta \leq \gamma$, ta chứng minh được H nằm trong các tam giác CC_1B_1 và AA_1C_1.

Vì $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ nên $\alpha \leq 60^\circ \leq \gamma$. Do đó

$$\angle BIC \leq 120^\circ \leq \angle AIB.$$

• *Trường hợp 1:* $\angle AIC \geq 120^\circ$.

Quay các điểm B, I, H một góc 60° quanh điểm A đến các điểm B', I', H', sao cho B' và C nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Vì $AI'I$ là tam giác đều, ta có:

$$AI+BI+CI = I'I+B'I'+IC$$
$$= B'I'+I'I+IC. \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$AH+BH+CH = H'H+B'H'+HC$$
$$= B'H'+H'H+HC. \quad (2)$$

Vì $\angle AII' = \angle AI'I = 60^\circ$, $\angle AI'B' = \angle AIB \geq 120^\circ$ và $\angle AIC \geq 120^\circ$ nên tứ giác $B'I'IC$ là tứ giác lồi và nằm cùng phía với A đối với đường thẳng $B'C$.

Do H nằm trong tam giác ACC_1 nên H nằm ngoài tứ giác $B'I'IC$.

Do H nằm trong tam giác ABI nên H' nằm trong tam giác $AB'I'$. Điều này chứng tỏ H' nằm ngoài tứ giác $B'I'IC$ và do đó tứ giác $B'H'HC$ chứa tứ giác $B'I'IC$. Vì thế, chu vi của tứ giác $B'I'IC$ không thể vượt quá chu vi của tứ giác $B'H'HC$. Kết hợp điều này với (1) và (2), ta được:

$$AH+BH+CH \geq AI+BI+CI.$$

•*Trường hợp 2:* $\angle AIC < 120^\circ$.

Quay các điểm B, I, H một góc 60° quanh điểm C đến các điểm B', I', H', sao cho B' và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC. Tiếp theo, bằng cách tương tự như ở trường hợp trên, ta sẽ chứng minh được bất đẳng thức của đề bài.

Nguyễn Khắc Minh

P109. Cho số nguyên q và cho dãy số (a_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, được xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_1 = q \text{ và } a_n = qa_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p > 2$, ta đều có $a_p - q^p$ chia hết cho p.

Lời giải (*của tác giả bài toán*).

Xét dãy đa thức $(f_n(x))$, được cho bởi: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ và

$$f_{n+1}(x) = x \cdot f_n(x) + n \cdot f_{n-1}(x) \ \forall n \geq 1.$$

Từ định nghĩa dãy (a_n), dễ dàng chứng minh được

$$a_n = f_n(q) \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bằng qui nạp theo n, ta sẽ chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k,$$

trong đó

$$c_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n-k \text{ lẻ} \\ (n-k-1)!!C_n^k & \text{nếu } n-k \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Thật vậy, bằng kiểm tra trực tiếp, dễ thấy ta có điều muốn chứng minh khi $n = 0, 1$.

Giả sử điều muốn chứng minh đã đúng đến $n \geq 1$. Khi đó, theo công thức xác định dãy $(f_n(x))$, ta có:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= x \cdot f_n(x) + n \cdot f_{n-1}(x) \\ &= x \cdot \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \cdot x^k + n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} c_{n,k-1} \cdot x^k + \sum_{k=0}^{n-1} nc_{n-1,k} \cdot x^k \\ &= nc_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n,k-1} + nc_{n-1,k}) \cdot x^k \\ &\quad + c_{n,n-1} \cdot x^n + c_{n,n} \cdot x^{n+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Vì $n-1$ và $n+1$ có cùng tính chẵn lẻ, $n \cdot (n-2)!! = n!!$ (theo định nghĩa) và $C_{n-1}^0 = C_{n+1}^0$ nên

$$n \cdot c_{n-1,0} = c_{n+1,0}. \tag{2}$$

Vì $n - (n-1) = (n+1) - n = 1$ là số lẻ nên

$$c_{n,n-1} = c_{n+1,n}. \tag{3}$$

Hiển nhiên, $c_{n,n} = c_{n+1,n+1}$. (4)

Với mỗi $1 \leq k \leq n-1$, vì $n-k+1$ và $n-k-1$ có cùng tính chẵn lẻ nên:

+) Nếu $n+1-k$ lẻ thì $c_{n,k-1} + nc_{n-1,k} = 0$;

+) Nếu $n+1-k$ chẵn thì

$$\begin{aligned} & c_{n,k-1} + nc_{n-1,k} \\ &= (n-k)!!C_n^{k-1} + n \cdot (n-k-2)!!C_{n-1}^k \\ &= (n-k)!!C_{n-1}^k + (n-k)!!C_n^k \\ &= (n-k)!!(C_{n-1}^k + C_n^k) = (n-k)!!C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Do đó, $c_{n,k-1} + nc_{n-1,k} = c_{n+1,k}$. (5)

Từ (1), (2), (3), (4) và (5), ta được

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n+1,k} \cdot x^k.$$

Vì thế, theo nguyên lí qui nạp, ta có điều muốn chứng minh.

Từ đó, do với p là số nguyên tố lẻ ta có

$$c_{p,k} \equiv 0 \pmod{p} \text{ với mọi } 0 \leq k \leq p-1$$

(vì $C_p^k \equiv 0 \pmod{p}$ với mọi $1 \leq k \leq p-1$) nên

$$a_p = f_p(q) = \sum_{k=0}^{p} c_{p,k} \cdot q^p \equiv q^p \pmod{p}.$$

hay $a_p - q^p$ chia hết cho p.

Bình luận và Nhận xét.

1. Theo chia sẻ của tác giả bài toán, từ định nghĩa dãy (a_n), có thể thấy a_n phụ thuộc vào q như một hàm đa thức; từ đó, nảy sinh ý tưởng viết a_n dưới dạng

$$a_n = f_n(q),$$

với $f_n(x)$ là một đa thức. Khi đó, từ công thức xác định dãy (a_n), dễ dàng có được công thức xác định dãy đa thức $f_n(x)$.

2. Bạn *Nguyễn Tiến Hoàng* (lớp 11 Toán, Trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh) cũng tiếp cận bài đã ra theo hướng của lời giải trên và có lời giải đúng. Khác với tác giả bài toán, bạn Hoàng đã sử dụng dãy đa thức $f_n(x)$ để chứng minh kết luận của bài ra bằng cách khảo sát các tính chất của dãy đa thức đó. Cụ thể, bạn Hoàng đã chứng minh và sử dụng các kết quả sau để suy ra kết luận của bài đã ra:

• *Kết quả 1:* Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ là một đa thức bậc n, với hệ số nguyên và có hệ số cao nhất bằng 1.

• *Kết quả 2:* Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x) = n \cdot f_{n-1}(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• *Kết quả 3:* Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, nếu

$$f_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

thì $c_i = 0$ với mọi $i \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$ mà $n - i$ là số lẻ.

3. Trong số các lời giải mà Tòa soạn nhận được, có một lời giải sử dụng hàm sinh. Tuy nhiên, lời giải này chưa đúng do mắc một số lỗi về kiến thức cơ bản liên quan đến chuỗi lũy thừa và phép tính nguyên hàm. Bên cạnh đó, còn có các lời giải sai do tác giả của các lời giải đó đã sử dụng phương pháp tìm số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính để tìm số hạng tổng quát của dãy (a_n).

4. Ngoài bạn Nguyễn Tiến Hoàng, chỉ duy nhất bạn *Bùi Khánh Vĩnh* (lớp 10CT1, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh) có lời giải đúng.

Hà Duy Hưng – Nguyễn Khắc Minh

THƯ TÒA SOẠN

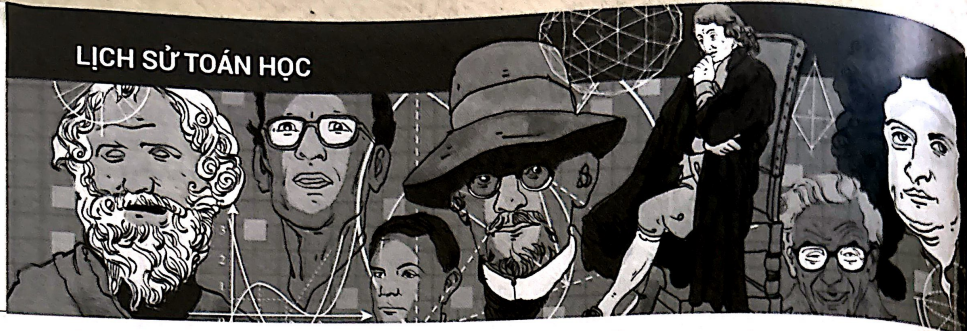
Từ ngày 26/11 đến ngày 28/12/2017, Tòa soạn đã nhận được

*** Bài toán đề xuất, bài viết của các bạn có tên sau:**

Trương Quang An (GV THCS Nghĩa Thắng, Quảng Ngãi), *Nguyễn Anh Dũng* (Bắc Giang), *Trần Vũ Duy* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Nguyễn Thanh Giang* (Hiệu phó THPT chuyên Hưng Yên), *Lê Quốc Hán* (GV ĐH Vinh, Nghệ An), *Nguyễn Việt Hùng* (THPT chuyên KHTN, ĐHQGHN), *Nguyễn Lái* (GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên), *Nguyễn Duy Liên* (GV THPT chuyên Vĩnh Phúc), *Hồ Long Nhật* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa), *Nguyễn Hoàng Phúc* (TP Vinh, Nghệ An), Nguyễn Thọ Tùng (Hà Nội), *Ngô Văn Thái* (THPT Phạm Quang Thẩm, Thái Bình), *Phạm Văn Thuận* (Trung tâm Toán Hexagon, Hà Nội), *Phạm Hữu Trung* (THPT Nguyễn Công Trứ, TP.HCM), *Vũ Tiến Việt* (Học viện An ninh nhân dân).

*** Lời giải của các bạn có tên sau:**

Đoàn Hồng Anh (Catherine Doan) (Lớp 11, Canada), *Lê Minh Quỳnh Anh* (THCS Trần Mai Ninh, Thanh Hóa), *Lê Tuấn Anh* (Lớp 11, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), *Nguyễn Thái Bình* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Nguyễn Hữu Danh* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Vũ Văn Dũng* (THCS Lý Tự Trọng, Hà Giang), *Trần Vũ Duy* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Phạm Trần Minh Đức* (Lớp 10 Toán 1, THPT Chuyên KHTN, Hà Nội), *Nguyễn Doãn Hải* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương), *Lê Đức Hiếu* (Lớp 10T1, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam), *Trần Khắc Hùng* (Lớp 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang), *Nguyễn Quốc Huy* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Phạm Đình Anh Khoa* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Nguyễn Huyền Ngọc Mai* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Lê Đức Minh* (Lớp 8T1, THCS Đoàn Thị Điểm, Hà Nội), *Trần Hồng Nguyên* (THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Phạm Văn Long Phước* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương), *Võ Minh Quân* (Lớp 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt), *Nguyễn Huỳnh Sang* (Lớp 10 chuyên Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định), *Nguyễn Hùng Sơn* (Lớp 11A2, THPT Lê Quý Đôn, Nam Định), *Nguyễn Trung Sơn* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang), *Nguyễn Tấn Tài* (Lớp 12A, THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước), *Nguyễn Doãn Tiến* (Lớp 11A1, THPT Phú Mỹ, Vũng Tàu), *Võ Đỗ Hoàng Tin* (Lớp 10CT, THPT Nguyễn Thượng Hiền, TP.HCM), *Lê Tuấn Tú* (óp 9T, THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội), *Nguyễn Đình Thanh* (Lớp 12A1, THPT Huỳnh Thúc Kháng, Quảng Nam), *Nguyễn Hữu Thịnh* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Trương Nguyễn Trân* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Bùi Khánh Vĩnh* (Lớp 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP.HCM), *Nguyễn Tường Vy* (Lớp 10 Toán, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang).



TOÁN PHÁP ĐẠI THÀNH
CUỐN SÁCH TOÁN VIỆT NAM ĐẦU TIÊN

Tạ Duy Phượng [1], Lê Đình Sơn [2], Cung Thị Kim Thành [3], Phan Thị Ánh Tuyết [4]

(Tiếp theo)

3.3 Các bài toán đại số

3.3.1 Các bài toán lập và giải hệ phương trình bậc nhất

Bài 3.3.1 Sĩ nhân tọa tịch dư khiếm pháp (Tính số học trò ngồi trên chiếu, trang 30b) Nay có một số học trò đến trường, ngồi trên các chiếu, nếu mỗi chiếu ngồi 5 người thì thiếu 4 người, nếu 4 người ngồi một chiếu thì thừa 3 người. Hỏi có bao nhiêu học trò, bao nhiêu chiếu?

Đáp viết: Cộng số người thừa (3 người) và số người thiếu (4 người) được 7 chiếu. Lấy $5 \times 7 = 35$ người, (vì) ngồi 5 người 1 chiếu thì thiếu 4 người, nên số người là $35 - 4 = 31$ người.

Giải (theo ngôn ngữ hiện đại): Gọi x là số chiếu, y là số học trò. Theo bài ra ta có hệ:

$$\begin{cases} 5x = y + 4 \\ 4x = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 31. \end{cases}$$

Vậy số chiếu là 7, số học trò là 31.

Bài 3.3.2 (trang 31a) Nay có số quân nhân ngồi (dự tiệc) mỗi bàn là 8 người thì thiếu 6 người, mỗi bàn 7 người thì thừa 3 người. Hỏi có bao nhiêu quân nhân trên bàn tiệc?

Đáp viết: Cộng 6 người thiếu và 3 người dư được 9 bàn. Lấy 7 người nhân với nó: $7 \times 9 = 63$ người, lại thêm vào 3 người, tìm được số người là 66 người.

Giải (theo ngôn ngữ hiện đại): Gọi x là số bàn, y là số quân nhân. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} 8x = y + 6 \\ 7x = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 66. \end{cases}$$

Vậy số quân nhân trên bàn tiệc là 66 người.

Lời bình: Các bài toán dạng *lập và giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn* ngày nay thường được dạy theo quy tắc chung: Tính D theo "anh bạn cầm bát ăn cơm", sau đó tính x và y. Trong hai bài trên của *Toán pháp đại thành*, đầu bài cho dưới dạng đặc biệt, $b = b' = -1$. Vì vậy, chỉ cần trừ hai phương trình (cộng thừa với thiếu) là triệt tiêu y và tìm được x.

Giải theo Lương Thế Vinh nhanh hơn!

Những bài toán dạng này đã có trong *Cửu chương toán thuật- The Nine Chapters on the Mathematical Art* (trước Công nguyên, được Liu Hui biên tập vào Thế kỉ III) và được gọi là dạng toán 盈不足 (Ying bu zu - excess 盈 and deficit

[1] *Viện Toán học, tdphuong@math.ac.vn*
[2] *Trường Trung học Phổ thông Tĩnh Gia 1, Thanh Hóa, sonld.thpttinhgia1@thanhhoa.edu.vn*
[3] *Thạc sĩ Hán Nôm, kimthanhhnue@gmail.com*
[4] *Thạc sĩ Hán Nôm, phananhtuyet.23291@gmail.com*

不足 -Doanh bất túc-Thừa không đủ hay Một thừa một thiếu).

Ở Ai Cập và châu Âu, phương pháp này được gọi là *Phương pháp vị trí sai kép* (Method of the double false position), ngày nay vẫn được dùng trong giải hệ phương trình, trong tính gần đúng nghiệm của phương trình phi tuyến,...

3.3.2 Phép khai phương

Toán pháp đại thành trình bày qui tắc khai căn (khai phương) bậc hai dưới dạng một bài thơ. Phép khai căn bậc hai cần thiết trong các bài toán: biết diện tích (hình vuông) tìm cạnh, hoặc trong các bài toán: Chia số tiền cho số người, biết mỗi người nhận được số tiền bằng số người,...

Bài 3.3.3 (trang 38b) Nay có số tiền là 43337 quán 6 mạch 40 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Đáp viết: Tiền tích là 2600 vạn 2600 văn, số người là 5099 người, mỗi người nhận được 5099 văn, ngoài ra còn dư 2799 văn.

Giải: Đổi đơn vị: 43337 quán 6 mạch 40 văn = $43337 \times 600 + 6 \times 60 + 40 = 26002600$.

Gọi x là số người, ta có

$$x^2 = 26002600 = 5099^2 + 2799 \text{ văn.}$$

Vậy mỗi người được 5099 văn dư 2799 văn.

Bài 3.3.4 (trang 38a) Nay có số tiền là 2 mạch 1 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.5 (trang 38b) Nay có số tiền là 6 mạch 1 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.6 (trang 7a) Có số tiền là 198 quán, 3 mạch, 45 văn, hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.7 (trang 7a) Có số tiền là 346 quán, 5 mạch 36 văn, hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.8 (trang 7a) Có số tiền là 25 quán 2 mạch 9 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.9 (trang 7a) Có số tiền là 535 quán 8 mạch 9 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.10 (trang 7a) Có số tiền là 766 quán 1 mạch 24 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.11 (trang 7b) Có số tiền là 1341 quán 9 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

Bài 3.3.12 (trang 7b) Có số tiền là 1587 quán 6 mạch 16 văn. Hỏi (khai phương) được bao nhiêu?

Bài 3.3.13 (trang 38b) Nay có số tiền là 4 quán 11 văn. Hỏi khai phương được bao nhiêu?

3.3.3 Các bài toán lập và giải hệ phương trình vô định

Ngoài các bài toán lập và giải hệ phương trình bậc nhất, *Toán pháp đại thành* còn có một số bài toán lập và giải phương trình vô định.

Bài 3.3.14 (trang 31a) Nay có 1 mạch 40 văn, mua hai loại quả, loại một mỗi quả 3 văn, loại hai mỗi quả 1 văn, hỏi có bao nhiêu?

Thảo viết (Giải sơ lược): Trước hết tính gộp giá tiền của hai loại quả (3+1=4), rồi đổi đơn vị số tiền đề bài cho (1 mạch 40 văn=100 văn), chia cho nhau. Muốn tìm số tiền mua quả loại một, lấy 3 văn nhân với số vừa tìm được. Đối với quả loại hai, cũng thực hiện tương tự.

Lời bình: *Toán pháp đại thành* chỉ cho một đáp số. Giải phương trình nghiệm nguyên $3x + y = 100$, ta được tất cả 34 đáp số.

Bài 3.3.15 (Vấn tượng mã tịnh dương nhân mục số toán pháp – Phép toán hỏi số voi, ngựa, dê và người chăn dắt – trang 64a) Số voi, số ngựa và số dê cộng lại được 1000, không biết có bao nhiêu người, chỉ biết tổng là 1000, (biết) (nuôi một) voi 9 người, chăm ngựa 3 người, mỗi người chăn 20 dê. Thử hỏi những người biết tính toán bốn phương, có bao nhiêu voi, ngựa, dê, bao nhiêu người?

Đáp số: Võ nhân 540 người, số dân thường 420 người, số người chăn dê 40 người; Số voi: 60; Số ngựa: 140; Số dê: 800 đầu.

Thảo viết (Sơ lược cách giải): Trước hết tính 3×9 được 27 làm pháp, lấy số đó nhân với 20 dê, tìm được số võ nhân; (số võ nhân) chia cho 9, được số voi; 27 "giảm cửu, gia tam", nhân với 10, tìm được số thảo nhân (dân thường/người cắt cỏ), chia 3, tìm được số ngựa; Lại lấy số võ nhân "giảm" đi 1000 người, tìm được số mục nhân (số người chăn dắt), (lấy số mục nhân này) nhân với 20, tính được số đầu dê.

Giải (theo phương pháp hiện đại): Gọi số voi, số ngựa, số dê tương ứng là x, y, z (x, y, z nguyên,

không âm). Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x+3y+z/20=1000; \\ x+y+z=1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 180x+60y+z=20000; \\ x+y+z=1000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 179x+59y=19000; \\ x+y+z=1000. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình vô định, được hai đáp số:

1) $x=1, y=319, z=680$. Cần 9 người chăn voi, 957 người chăn ngựa và 34 người chăn dê;

Hoặc

2) $x=60, y=140, z=800$. Cần 540 người chăn voi, 420 người chăn ngựa và 40 người chăn dê.

Lời bình 1 Lời giải của Lương Thế Vinh chỉ cho một đáp số. Nó cũng không phải là lời giải tổng quát cho bài toán dạng này (xem phân tích của A. Volkov trong [4]).

Lời bình 2 Đây có lẽ là bài toán hay nhất và độc đáo nhất trong *Toán pháp đại thành*. Bài toán dạng *Trăm trâu trăm cỏ* đã có trong nhiều sách toán cổ của thế giới (với những phát biểu khác nhau như: gà trống giá 5 đồng, gà mái giá 3 đồng, 1 đồng mua được ba gà con,...), nhưng bài toán 1000 voi, ngựa, dê (số lớn) thì không đâu trên thế giới có ngoài *Toán pháp đại thành* (xem [4]). Nhiều sách toán hiện nay dưới bài *Trăm trâu trăm cỏ* thường ghi: Một bài toán cổ, hoặc: Lương Thế Vinh, *Toán pháp đại thành*, hoặc: Lương Thế Vinh, *Đại thành toán pháp*. Theo khảo cứu của chúng tôi, trong *Toán pháp đại thành* chỉ có Bài 3.3.15 (1000 voi, ngựa, dê) mà không có bài *Trăm trâu trăm cỏ*. Có lẽ Lương Thế Vinh đã đi từ *thực tiễn Việt Nam* (voi, ngựa đã là *những chiến binh* trong quân đội nhà Lê) để đặt và giải bài toán này chăng?

3.4 Các bài toán hình học

3.4.1 Các bài toán sử dụng tam giác vuông đồng dạng

Trong Mục 3.1 đã trình bày bài *Thơ đo bóng*. Dưới đây là ba bài toán dạng *biết bóng của cây, tìm chiều cao của cây*.

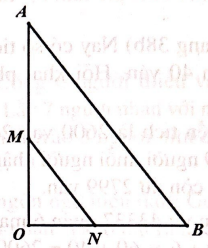
Bài 3.4.1 (trang 64a) Nay có một cái cây, bóng của nó trên mặt đất dài 3 trượng, hỏi cây cao bao nhiêu?

Đáp viết: Lấy một cây gậy dài 1 trượng dựng dựa vào gốc cây, thấy bóng của nó trên mặt đất dài 7 xích 5 thốn. Hàng trên lấy bóng cây 3 trượng. Tìm được cây cao 4 trượng.

Giải (theo ngôn ngữ hiện đại): Gọi $x = OA$ (thốn) là chiều dài của cây. Ta có: $\Delta OMN \sim \Delta OAB$. Suy ra

$$OA = \frac{OM.OB}{ON} = \frac{100.300}{75} = 400.$$

Vậy chiều cao của cây là 400 thốn = 4 trượng.



Bài 3.4.2 (trang 26a) Nay có một cây sào, bóng dài 40 trượng, nếu như lấy (một điểm trên cây sào) chiều cao là 1 trượng, thì bóng của nó ở phía dưới dài 1 trượng 2 xích, hỏi cây sào dài bao nhiêu trượng, xích, thốn?

Bài 3.4.3 (trang 26a) Nay có một cái cây có bóng dài 10 trượng, lấy (một điểm trên cây) cao 1 trượng thì bóng của nó ở phía dưới là 9 xích, hỏi cây cao bao nhiêu trượng, xích, thốn?

Lời bình: Đây là những bài toán sử dụng tam giác đồng dạng trong chương trình lớp 10 hiện nay. Bài 3.4.1 không cho trước một điểm trên cây, mà bắt học trò *tự thực nghiệm* (lấy gậy dài 1 trượng, đo bóng của nó là 7 xích 5 thốn). Những bài toán dạng này trong *Toán pháp đại thành* khá đơn giản so với những bài cùng dạng trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* của Nguyễn Hữu Thận (1829) hoặc trong *Hải đảo toán kinh* của Liu Hui (thế kỉ III). Vì vậy, không nên ca ngợi quá lời, coi đây là một đóng góp toán học lớn của Lương Thế Vinh, như một số sách Danh nhân viết.

3.4.2 Tính diện tích và thể tích

Toán pháp đại thành có một lượng lớn bài toán tính diện tích và thể tích: Tính diện tích hình vuông, diện tích hình chữ nhật, diện tích hình thang, diện tích hình tam giác, diện tích hình mũ ông công (gồm hai hình vuông khác nhau về kích thước xếp liền kề), diện tích hình tạo bởi một số hình thang xếp liền kề, diện tích tứ giác, diện tích hình tròn, diện tích một phần hình tròn, diện tích hình sừng trâu, diện tích hình cái trống, diện tích hình con mắt, tính thể tích các khối đa diện,...Từ đó áp dụng vào các bài toán thực tế: tính khối lượng đất đắp đê, tính số viên gạch trong xây dựng, tính thể tích và tải trọng của thuyền,... Số π được tính xấp xỉ bằng 3. Do đó diện tích hình tròn có bán kính r trong *Toán pháp đại thành* được tính theo công thức $3r^2$; Chu vi hình tròn được tính theo công thức $6r$.

Lời bình: *Toán pháp đại thành* sử dụng số π xấp xỉ bằng 3 có thể được coi là một minh chứng cho khả năng đây chính là cuốn sách có nguồn gốc từ thế kỉ XV do Lương Thế Vinh soạn. Trong *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (1829), Nguyễn Hữu Thận đã nói đến phương pháp tính gần đúng số π bằng cách tính chu vi đa giác đều nội ngoại tiếp hình tròn khi gấp đôi số cạnh và lấy π xấp xỉ đến 8 chữ số. Ông cũng đã biết đến các phân số xấp xỉ khá tốt số π là: $22/7$ thì thừa mà $157/50$ thì thiếu, còn $\pi = 355/113$ là tốt nhất.

Ghi chú: Tương tự như đơn vị đo trọng lượng (1 cân=16 lạng), một số đơn vị đo độ dài và đo diện tích, thể tích ngày xưa không tương thích với các đơn vị đo hiện nay. Thí dụ, 1 sào ($= 360m^2$ bằng 15 thước vuông (1 thước vuông $=24m^2$,...). Điều này khiến việc giải mã các bài toán về diện tích, thể tích trong các sách toán Hán Nôm gặp nhiều khó khăn. Bài viết này không trình bày các ví dụ tính diện tích, thể tích trong *Toán pháp đại thành*. Hi vọng sẽ có bài viết riêng về *Tính diện tích và thể tích* trong các sách toán Hán Nôm. Bạn đọc quan tâm có thể tìm hiểu qua tài liệu gốc [7].

4 Thay lời kết

Tìm hiểu Di sản sách toán Hán Nôm có ý nghĩa thiết thực trong dạy và học toán, đồng thời cũng bổ sung và chính xác hóa thêm một số tư liệu lịch sử, góp phần làm phong phú và trung thực hơn các giai thoại dân gian về các Danh nhân văn hóa-nhà toán học.

Lương Thế Vinh–nhà toán học đầu tiên của Việt Nam–một Danh nhân văn hóa có sức ảnh hưởng và lan tỏa xuyên suốt không gian và thời gian. Ông đã được nhà nước và nhân dân thờ làm Phúc thần. Cách đây vài chục năm, *trò chơi ô số toán học* (đặt các hòn sỏi vào các ô theo một qui luật nào đó, thí dụ, nhân đôi mỗi khi sang ô mới), tương truyền do Lương Thế Vinh nghĩ ra, vẫn được trẻ em quê hương Ông chơi trong sân đền thờ Ông (ghi theo lời nhà giáo-nhà sử học Bùi Văn Tam). Dưới đây là ảnh thờ và bức tượng đồng Trạng lường Lương Thế Vinh (mới được cung tiến), tại đền thờ Ông (thôn Cao Phương, huyện Vụ Bản, Nam Định).

Tượng và ảnh thờ tại đền thờ Lương Thế Vinh do nhóm tác giả chụp.

Bài viết này trình bày một phần những tìm hiểu ban đầu về *Toán pháp đại thành*. Do khoảng cách về thời gian, ngôn ngữ, tư duy toán học và các phương pháp tính toán sử dụng trong *Toán pháp đại thành* khác xa ngôn ngữ, tư duy, trình độ và phương pháp nghiên cứu của toán học hiện đại. Bài viết chưa thể trình bày hết những nội dung của *Toán pháp đại thành*. Bài viết cũng chưa phân tích sâu ảnh hưởng của Lương Thế Vinh đối với toán học Việt Nam trong các thế

hệ tiếp theo, cũng như ảnh hưởng của toán học Trung Hoa lên *Toán pháp đại thành* và sáng tạo toán học của người Việt Nam qua *Toán pháp đại thành*. Tuy nhiên, chúng tôi cũng hi vọng bài viết đã vẽ lên được một bức tranh, tuy chưa thật đầy đủ, nhưng khá trung thực và tương đối toàn cảnh về *Toán pháp đại thành*. Hi vọng rằng trong một ngày không xa, lịch sử toán học Việt Nam, trong đó có *Toán pháp đại thành*, sẽ được phổ biến rộng rãi hơn, được đưa vào chương trình giảng dạy và sẽ được trình bày đầy đủ hơn trong các sách lịch sử toán học.

Lời cám ơn. Các tác giả chân thành cám ơn Giáo sư Hà Huy Khoái đã gợi ý viết bài này và đã góp nhiều ý kiến sâu sắc giúp nâng cao chất lượng bài viết. Các tác giả cũng chân thành cám ơn nghiên cứu sinh trường Đại học Thanh Hoa (Đài Loan) Đoàn Thị Lệ, đã cung cấp một phần bản dịch *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*.

Tài liệu trích dẫn.

[1] Hoàng Xuân Hãn, *Hàn Tín điểm binh*, Báo Khoa học, Quyển II, Số 13-14, trang 1-7; In lại trong: *La Sơn Yên Hồ Hoàng Xuân Hãn, Tác phẩm được giải thưởng Hồ Chí Minh*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1998, trang 1081–1089.

[2] Tạ Ngọc Liễn, *Vài nét về toán học ở nước ta thời xưa*, in trong *Tìm hiểu khoa học kỹ thuật trong lịch sử Việt Nam*, Nhà xuất bản Khoa học Xã hội, 1979, trang 289-314.

[3] Lê Đình Sơn, *Tìm hiểu Toán pháp đại thành*, Luận văn Thạc sĩ toán học, Trường Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa, 2017.

[4] A. Volkov, *On the origins of the "Toan phap dai thanh (Great Compendium of Mathematical Methods)"*, in Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts, B. van Dallen (eds.), Proceedings of International Conference *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2002, pp. 369-410.

[5] A. Volkov, *State mathematics education in traditional China and Vietnam: formation of "mathematical hagiography" of Lương Thế Vinh (1441-1496?)*, In: Trinh Khac Manh and Phan Van Cac (eds.), *Confucianism in Vietnam*, Nhà xuất bản Khoa học Xã hội, Hà Nội, 2006, trang 272-309.

[6] 韩琦 Han Qi, 中越历史上天文学与数学的交流 *Trung Việt lịch sử thượng thiên văn học dữ số học dích giao lưu*, China Historical Material of Sciences and Technology 中国科技史料, số 2 năm 1991, trang 3-8.

[7] Lương Thế Vinh, 算法大成 *Toán pháp đại thành*, Mã số thư viện Hán Nôm: Bản A: A.2931; Bản B: Vhv.1152.

[7b] Cung Thị Kim Thành, Bản thảo bản dịch *Toán pháp đại thành*, 2016-2017.

[8] 阮有慎 Nguyễn Hữu Thận (1829), *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm.

Đền thờ Lương Thế Vinh tại quê hương ông (Cao Phương, Liên Bảo, Vụ Bản, Nam Định).

LỊCH SỬ ĐỊNH DANH CÁC NGÔI SAO VÀ CHÒM SAO

- Phạm Ngọc Điệp -

Trong lịch sử, các ngôi sao đóng vai trò quan trọng đối với nhiều nền văn minh trên thế giới. Chúng trở thành một phần tín ngưỡng tôn giáo, được sử dụng trong định vị và định hướng. Sự xuất hiện và biến mất của các ngôi sao theo thời gian được coi như một cuốn "thiên lịch" giúp phát triển nông nghiệp và đánh dấu thời gian. Để dễ dàng cho việc sử dụng chúng, người cổ đại nhóm những ngôi sao sáng thành những hình dạng dễ nhận biết, đó chính là thời điểm khái niệm các chòm sao ra đời. Bằng mắt thường ta có thể nhìn thấy khoảng 10.000 ngôi sao. Tuy nhiên, chỉ những ngôi sao sáng nhất mới có tên riêng và chúng thường có những cái tên rất cổ. Điều lý thú là phần lớn các ngôi sao lại có tên theo tiếng Ả Rập như Achernar, Aldebaran, Alderamin, Fomalhaut, Hamal,... một vài ngôi khác có tên theo tiếng Hy Lạp, La-tinh và số còn lại không rõ nguồn gốc. Lịch sử định danh sao trải qua nhiều thăng trầm, tuy vậy, dù nguồn gốc của chúng có đến từ đâu thì tên gọi của các ngôi sao vẫn là một phần di sản văn hoá tập thể của nhân loại.

Định danh ngôi sao

Danh mục sao được biết đến sớm nhất được các nhà thiên văn học Babylon ở Lưỡng Hà (tây Á) biên soạn vào cuối thiên niên kỷ hai trước Công nguyên (TCN). Bản đồ sao chính xác cổ nhất được biết đến nay xuất hiện từ thời Ai Cập cổ đại năm 1534 TCN. Hy Lạp, tuy không phải là cái nôi sinh ra việc định danh sao, nhưng nhiều tên gọi sao ngày nay lại bắt nguồn từ đây. Một trong những danh mục sao đầu tiên ở Hy Lạp được Aristillus cùng với Timocharis lập ra vào khoảng năm 300 TCN. Năm 129 TCN, Hipparchus lập nên một danh mục sao mới, ông so sánh kết quả của mình với Timocharis và

phát hiện ra rằng kinh độ của các ngôi sao thay đổi theo thời gian. Người Hy Lạp thường mô tả các ngôi sao dựa vào vị trí của chúng trong chòm sao. Ví dụ, Ptolemy nói về một ngôi sao bằng cách mô tả "ngôi màu đỏ trên con mắt phía nam" để nói về ngôi sao mà ngày nay chúng ta gọi là Aldebaran thuộc chòm sao Kim Ngưu.

Cách đây hơn một nghìn năm, trước cả khi Hồi giáo thịnh hành, những người sống ở Bán đảo Ả Rập đã đặt tên cho các ngôi sao. Tuy nhiên, tên Ả Rập của nhiều ngôi sao xuất hiện sau này lại là bản dịch từ những mô tả trong tiếng Hy Lạp cổ. Trong cuốn sách nổi tiếng của mình, *Hệ thống vĩ đại thiên văn học* (*The Great System of Astronomy*), tiếng Ả Rập gọi là *Almagest*, Ptolemy, dựa vào công trình của những nhà thiên văn học Hy Lạp tiền bối như Hipparchus, đã lập nên một danh mục về vị trí và độ sáng của 1.022 ngôi sao, chia thành 48 chòm (cơ sở của hệ thống các chòm sao hiện đại ngày nay). Sách của Ptolemy được dịch sang tiếng Ả Rập vào khoảng thế kỷ thứ 8, thứ 9. Sau đó, vào thế kỷ 12, nó được dịch ra tiếng La-tinh từ tiếng Ả Rập (chứ không phải bản gốc tiếng Hy Lạp!) và trở nên nổi tiếng ở châu Âu. Nhiều mô tả trong tiếng Ả Rập từ cuốn *Almagest* sau đó được sử dụng rộng rãi như là tên của các ngôi sao. Các nhà thiên văn học Hồi giáo sử dụng cách mô tả vị trí của Ptolemy để đặt tên cho các ngôi sao, đồng thời họ cũng thêm vào nhiều tên mới lấy từ truyền thuyết Ả Rập và những tài liệu thiên văn học Hồi giáo. Trong khi châu Âu đang trải qua thời kỳ "Đêm trường trung cổ" thì thiên văn học Hồi giáo lại trên đà phát triển. Các nhà thiên văn học Hồi giáo trung cổ năng động trong việc đặt tên cho sao, phát minh ra các thiết bị thiên văn có thể tính vị trí của các ngôi sao, xây dựng những viện nghiên cứu - quan sát thiên văn lớn nhằm lập nên những danh mục sao. Một trong những thành tựu nổi bật nhất trong thời kỳ này của thiên văn học Hồi giáo là *Sách về những ngôi sao cố định* (*Book of Fixed Stars*) do nhà thiên văn học Hồi giáo Abd al-Rahman al-Sufi (903-986) viết. Cuốn sách được hoàn thành vào khoảng năm 964, trong đó al-Sufi xem xét lại và cập nhật nội dung cuốn *Almagest* của Ptolemy, đưa vào thêm nhiều tên sao, đồng thời minh hoạ đầy đủ vị trí, độ sáng và màu sắc của tất cả những ngôi sao mà ông biết thời đó. Các thế kỷ sau đó những người Ả Rập du cư tiếp tục đặt tên cho những ngôi sao trên bầu trời - ví dụ Aldebaran và Betelgeuse - vì họ cho rằng những ngôi sao này là tượng trưng cho con người và động vật trên Trái Đất. Nhìn chung phần lớn tên sao được đặt dựa vào vị trí của chúng trong chòm sao, một vài tên là bản dịch trực tiếp từ mô tả của Ptolemy, một số tên khác mô tả đặc tính ngôi sao đó. Nhiều ngôi sao có tên Ả Rập với tiền tố "*al*" tương đương với mạo từ "*the*" trong tiếng Anh, ví dụ, Algol (ma cà rồng). Theo thời gian việc thêm tiền tố này trở nên khá tuỳ tiện, do đó, tên của nhiều ngôi sao có nguồn gốc Ả Rập khi có, khi không tiền tố al này. Có người cho rằng sở dĩ nhiều ngôi sao có tên Ả Rập vì người Hy Lạp chưa thực sự đặt tên cho các ngôi sao mà họ chỉ mô tả chúng thôi. Ở châu Âu, vào thời Trung Cổ và Phục Hưng, nhiều tác giả sao chép hoặc dịch lại nhiều tên sao từ tiếng Ả Rập "một cách không chính xác" vì không tường tận tiếng Ả Rập. Do đó, trong một số trường hợp ý nghĩa của tên sao bị thay đổi hoàn toàn, đôi khi sự chuyển ngữ sai lệch còn tạo nên những từ không có nghĩa, hay tên của sao này lại gắn cho sao khác. Chính vì vậy mà lịch sử định danh sao khá phức tạp.

Hình ảnh chòm sao Phi Mã (Pegasus) từ Nasir al-Din al-Tusi's Tarcama-i Kitab-i Suvaru'l-kevâkib, Süleymaniye Library, MS Ayasofya 2595, fol. 37a.

Năm 1603, nhà thiên văn học người Đức Johann Bayer (1572-1625) đề xuất một hệ thống sử dụng chữ cái Hy Lạp để đặt tên cho các ngôi sao, được gọi là định danh Bayer. Danh mục ban đầu của Bayer chứa 1.564 ngôi sao. Theo cách

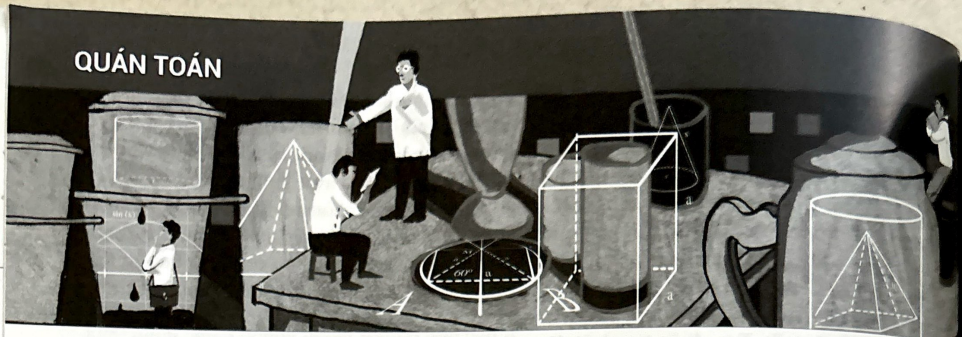
này, tên của một ngôi sao được bắt đầu bằng một chữ cái Hy Lạp (alpha, beta, gamma, vân vân) và theo sau là sở hữu cách tên chòm sao trong tiếng La-tinh. Những chữ cái này thường gắn với ngôi sao theo độ sáng của chúng, ngôi sao sáng nhất trong chòm thường được gọi là sao "alpha". Ví dụ, Vega, ngôi sao sáng nhất của chòm Thiên Cầm (Lyra) được gọi là "alpha Lyrae" (trong đó Lyrae là sở hữu cách của Lyra có nghĩa là "của Lyra"). Tuy nhiên, quy luật đặt tên này không được tuân thủ tuyệt đối, có nhiều chòm sao mà sao "alpha" của nó không phải là sao sáng nhất, và một số chòm không có sao alpha. Vấn đề của định danh Bayer là số lượng chữ cái Hy Lạp chỉ có giới hạn (24 chữ) trong khi số sao sáng trong một chòm thường lớn hơn. Bayer mở rộng cách định danh của mình sử dụng chữ Roman in thường (từ "a" tới "z") và in hoa (từ "A" đến "Q"). Năm 1712, nhà thiên văn học người Anh John Flamsteed giới thiệu một cách định danh khác, thay vì dùng chữ cái Hy Lạp ông dùng số cho phần trước của tên sao còn phần sau ông vẫn giữ như cách định danh của Bayer. Ví dụ: 61 Cygni là sao số 61 của chòm Thiên Nga (Cygnus). Hệ thống số này được gọi là Định danh Flamsteed. Ngày nay hai cách định danh này vẫn đang được sử dụng.

Định danh chòm sao

Khái niệm chòm sao có từ thời tiền sử, được khắc trên đá và đất sét ở Lưỡng Hà khoảng 3000 TCN. Các ngôi sao trong một chòm thực ra có khoảng cách đến Trái Đất khác nhau; các sao có chuyển động riêng nên hình dạng của chòm sao thay đổi theo thời gian (từ chục đến trăm nghìn năm), sự thay đổi hình dạng này có thể dự đoán được dựa vào chuyển động riêng của các sao đo được từ trắc lượng học thiên thể (astrometry). Mô tả về các chòm sao cổ nhất mà chúng ta được biết đến từ một bài thơ có tên là Phaenomena, được viết vào khoảng năm 270 TCN bởi nhà thơ Hy Lạp Aratus. Tuy nhiên, bài thơ cũng cho thấy rằng, những chòm sao được đề cập đến có từ rất lâu trước thời của Aratus. Không ai biết chính xác, ở đâu, khi nào và ai đã sáng tạo ra chúng. Những chòm sao của Aratus không có chòm sao nào trên Nam Bán cầu, thiếu nhiều chòm sao khác, vì vậy, người ta đoán rằng, tác giả tạo nên những chòm sao ban đầu này sống ở vĩ độ khoảng 36° Bắc – phía nam của Hy Lạp, bắc của Ai Cập tương tự với vĩ độ của người Babylon và Sumer cổ. Kiến thức về những chòm sao bằng cách nào đó được truyền đến Ai Cập, từ đó những học giả Hy Lạp biết về chúng.

Theo thời gian, nhiều chòm sao mới được bổ sung nhờ đóng góp quan trọng của một số nhà thám hiểm người Hà Lan: Gerardus Mercator (năm 1551); Pieter Keyser và Frederick de Hautmann (những năm 1600). Sau đó, hai nhà thiên văn học người Ba Lan Johannes Hevelius (năm 1690) và Nicolas Louis de Lacaille người Pháp (những năm 1750) lần lượt điền đầy các chòm sao trên cả hai Bắc và Nam Bán cầu.

Năm 1930, Hiệp hội Thiên văn Quốc tế chia bầu trời thành 88 chòm sao với ranh giới rõ ràng và chính xác dựa vào 48 chòm sao liệt kê trong cuốn *Almagest* của Ptolemy: 36 chòm nằm trên Bắc Bán cầu và 52 chòm nằm trên Nam Bán cầu. Với cách chia này, mọi hướng trên bầu trời đều thuộc về một chòm sao nào đó. Vì vậy, với các nhà thiên văn ngày nay, chòm sao không những chỉ đến một mảng sao mà tới một vùng trời được xác định. Trong 88 chòm sao này: 42 chòm mô tả động vật, 29 vật thể vô tri và 17 con người hoặc các nhân vật thần thoại. Tên viết tắt của các chòm sao thường là ba chữ cái đầu tiên từ tên của chòm (ví dụ, Tiên Nữ -Andromeda- được viết tắt là *And*). Những chòm sao trên Bắc Bán cầu thường có tên mang hình ảnh hay tên từ thần thoại như Tiên Nữ hay Nhân Mã còn những chòm sao trên Nam Bán cầu, xuất hiện sau này, thường có tên cụ thể hơn như những thiết bị nghiên cứu khoa học hay những động vật mà các nhà thám hiểm gặp trên hành trình thám hiểm của mình như chòm Viễn Vọng Kính (kính viễn vọng), Lục Phân Nghi (kính lục phân), Yển Diên (tắc kè), Khổng Tước (con chim lớn).



PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTINE

BIỂU DIỄN MỐI LIÊN HỆ GIỮA TUỔI GS HOÀNG TỤY VÀ GS NGÔ BẢO CHÂU

- Trần Văn Nhung -

1. GS Hoàng Tụy và GS Ngô Bảo Châu

Ngày 14/12/2017, tình cờ tôi đọc trên FB của GS Hà Huy Khoái được biết rằng Viện Toán học, Viện Hàn lâm KH và CN Việt Nam, đang tổ chức Hội thảo quốc tế "Các thuật toán tối ưu và các vấn đề liên quan" để mừng thọ 90 của GS Hoàng Tụy, nhà toán học Việt Nam nổi tiếng, cha đẻ của Lý thuyết Tối ưu toàn cục. GS Hoàng Tụy sinh ngày 17/12/1927 tại Quảng Nam. Cũng trong dịp này GS Ngô Bảo Châu (Giải thưởng Fields năm 2010) đang công tác tại Hà Nội. Tôi đã tìm được một tấm ảnh đẹp chụp hai nhà toán học Việt nam tiêu biểu Hoàng Tụy và Ngô Bảo Châu (chụp tại Hà Nội, khoảng 5 năm trước) và đăng tấm ảnh đó lên FB của mình cùng với bình luận như sau:

GS Ngô Bảo Châu sinh ra tại Hà Nội ngày 28/6/1972. Cuối năm đó máy bay B52 của Mỹ rải thảm bom ở Hà Nội. Trong những ngày cuối tháng 12 năm 2017 này, chúng ta đang kỷ niệm 45 năm chiến thắng Điện Biên Phủ trên không. GS Hoàng Tụy là một trong những người kiến tạo Hệ Chuyên Toán A0 Trường đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Đại học Quốc gia Hà Nội), từ năm 1965, khi cuộc chiến chống Mỹ trên toàn quốc đang rất khốc liệt. GS Ngô Bảo Châu nguyên là học sinh A0 khóa 22.

Để ý tôi thấy một điều thú vị và đã viết lên FB của mình: "Năm nay (2017), tuổi của GS Tụy (90) vừa tròn gấp đôi tuổi của GS Châu (45). Năm 2017 là một năm thú vị (2017 là số nguyên tố), **duy nhất**, vì chỉ trong năm này, tuổi GS Tụy vừa tròn gấp đôi tuổi GS Châu? Kính chúc cả hai GS khỏe mạnh, thành công, hạnh phúc và tiếp tục đóng góp cho dân tộc Việt Nam và nhân loại!" Tôi vừa viết xong điều này lên FB thì một người bạn đồng niên của mình, thầy giáo toán ở Thanh Hóa, Bùi Quang Bình, đã trả lời ngay: "2017 là nghiệm duy nhất!"

Facebooker Huyen Dang đặt câu hỏi: "Sau bao nhiêu năm nữa thì tuổi GS Hoàng Tụy gấp ba tuổi GS Ngô Bảo Châu?" Một câu hỏi hay! Facebooker Đào Kiến Quốc (một đồng nghiệp, một người bạn của tôi dạy Toán - Tin tại ĐHQG HN) trả lời: "Vô nghiệm! Trước đây thì có, khi GS Ngô Bảo Châu 22,5 tuổi và GS Hoàng Tụy 67,5 tuổi." Anh Quốc đã cho đáp số rất hay và nhanh, nhưng đáng tiếc đó là những số thập phân, mà theo định nghĩa, nghiệm của các Phương trình Diophantine phải là các số tự nhiên.

2. Một phương trình Diophantine đơn giản

Ở trên chúng ta đã có thể đoán rằng 2017 là năm duy nhất mà trong năm đó tuổi của GS Tụy gấp đôi tuổi của GS Châu: $90 = 2 \times 45$. Ta thử tìm mối liên hệ tuổi của hai GS nhờ phương trình Diophantine vui, đơn giản như sau:

Giả sử tuổi của GS Tụy ở năm n được ký hiệu là $T(n)$, như vậy $T(1927) = 0$, $T(2017) = 90$; tuổi của GS Châu ở năm n được ký hiệu là $C(n)$, như vậy $C(1972) = 0$, $C(2017) = 45$. Hiển nhiên, với $n \geq 1972$,

$$T(n) = C(n) + 45 \qquad (*)$$

Xét phương trình Diophantine đơn giản $T(n) = 2C(n)$, trong đó ẩn số n là số tự nhiên ≥ 1972. Vì $T(n)$ và $C(n)$ là hai hàm số tuyến tính, dễ dàng chứng minh phương trình này có một nghiệm duy nhất là $n = 2017$. Như vậy, tuổi của GS Tụy đúng gấp đôi tuổi của GS Châu vào, và chỉ vào, năm 2017! Thế mới thấy số nguyên tố 2017, con số chỉ năm nay, đặc biệt đến thế nào!

Từ gợi ý của hai bạn Huyen Dang và Đào Kiến Quốc, ta có thể đặt câu hỏi tổng quát như sau: Phương trình Diophantine

$$T(n) = kC(n), \qquad (**)$$

với k là một số tự nhiên cố định nào đó, có nghiệm (duy nhất) $n = n(k)$ hay không? Với $k = 1$ thì phương trình $(**)$ vô nghiệm. Với $k = 2$ thì nghiệm duy nhất là $n = n(2) = 2017$. Với $k = 3$ thì nghiệm (không phải số tự nhiên) mà anh Đào Kiến Quốc tìm được không phải nghiệm Diophantine. Dễ thấy với $k \geq 3$, Phương trình Diophantine $(**)$ vô nghiệm.

Tiếp tục tổng quát hóa $(**)$ ta được phương trình Diophantine

$$T(n) = kC^m(n) \qquad (***)$$

trong đó k và m là hai số tự nhiên cố định nào đó, n là ẩn số. Với $m = 1$, $(***)$ trở về $(**)$. Với $m \geq 2$, từ $(*)$ và $(***)$ suy ra $kC^m(n) - C(n) - 45 = 0$. Phương trình Diophantine này và $(***)$ đều vô nghiệm n, với $k \geq 3$ và $m \geq 2$?

Chú ý cuối cùng: GS Tụy sinh năm 1927, GS Châu sinh năm 1972. Hai con số 27 và 72 là "đối xứng" và có hiệu số là 45, đúng bằng tuổi của GS Châu năm nay, 2017.

PHÉP NHÂN

dưới góc nhìn phân chia theo lũy thừa của 10 và mở rộng

- Lê Quang Quân[1] -

Trước hết ta nhắc lại một kiến thức quen thuộc: Trong hệ thập phân, các số tự nhiên có thể biểu diễn về dạng tổng các lũy thừa của 10 với hệ số không quá 9. Ví dụ:

$$1032 = 2 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^3.$$

Tức là mỗi số tự nhiên N tương ứng với đúng một bộ $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots)$ là bộ các số tự nhiên từ 0 đến 9 và $N = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_m \times 10^m + \cdots$

Trong bài viết này, xin được tạm gọi cách phân tích là cách phân tích thập phân của một số tự nhiên.

Trở lại vấn đề, từ trước đến nay, chúng ta được biết đến quy tắc thực hiện phép nhân hai số như sau: *Muốn nhân hai số tự nhiên, ta lần lượt lấy các chữ số của thừa số này (theo thứ tự từ phải qua trái) đem nhân với thừa số kia và đặt theo hàng dọc sao cho mỗi lần nhân sẽ dịch sang 1 cột về phía bên trái rồi cộng lại.*

Ví dụ: Ta thực hiện phép nhân 2017 với 204.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2017\\204\end{array}\\ \hline 8068\\ 0\\ 4034\\ \hline 411468 \end{array}$$

Ta được: $2017 \times 204 = 411468$.

Dưới góc nhìn của học sinh tiểu học hoặc THCS, chắc hẳn nhiều bạn sẽ không hiểu tại sao lại phải "dịch sang 1 cột" sau mỗi lần nhân. Thực chất trong cách nhân trên chúng ta đã ngầm *phân tích thập phân* thừa số thứ 2, sau đó sử dụng tính chất kết hợp của phép nhân và "giấu" đi các chữ số 0 ở cuối mỗi số hạng.

Và bản chất của phép nhân trong ví dụ trên là như sau:

– Đầu tiên ta phân tích $204 = 4 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^2$.

– Sử dụng quy tắc kết hợp của phép nhân, ta lần lượt nhân 2017 với các số hạng trong phân tích trên rồi cộng lại với nhau.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2017\\204\end{array}\\ \hline 8068\\ +\quad 00\\ 403400\\ \hline 411468 \end{array}$$

Một suy nghĩ thú vị đặt ra rằng theo cách làm này, 2 thừa số trong phép nhân vẫn chưa thực sự "bình đẳng" (dù chúng ta có sử dụng quy tắc giao hoán thì theo cách làm này vẫn phải lấy các chữ số của 1 trong 2 thừa số nhân với số thừa số còn lại). Vậy có thể thực hiện phép nhân hai số theo một cách "bình đẳng" hơn hay không? Trong phần tiếp theo này, chúng ta sẽ phân tích cả hai thừa số theo cách ở đầu bài và đưa ra một cách nhìn mới mẻ hơn cho phép nhân hai số tự nhiên.

[1] *A1K44 THPT chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An*

Trước hết, ta xét ví dụ phép nhân 369 với 247.

– Đầu tiên, ta phân tích:

$$369 = 9 \times 10^0 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^2$$

và $$247 = 7 \times 10^0 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^2.$$

$$\Rightarrow 369 \times 247 = (9 \times 10^0 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^2) \times (7 \times 10^0 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^2)$$

– Ta tìm kết quả bằng cách đi ngược từ cách phân tích của nó:

– Hệ số của 10^0 là $9 \times 7 = 63$ tuy nhiên hệ số mỗi lũy thừa trong cách phân tích thập phân nói trên không quá 9, do đó a_0 (hệ số của 10^0 trong *phân tích thập phân*) của tích là 3 và "gửi" $60 \times 10^0 = 6 \times 10^1$ sang hạng tử chứa 10^1.

– Tương tự như thế, ta tìm được các hệ số tiếp theo:

Tìm a_1: $9 \times 4 + 6 \times 7 + 6 = 84$, ta lấy $a_1 = 4$ và "gửi" 8 sang a_2.

Tiếp tục thực hiện ta có $a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 9, a_5 = a_6 = a_7 = \cdots = 0$.

– Ta được kết quả $369 \times 247 = 91143$.

Ở cách làm này, ta thấy hai thừa số đã có "bình đẳng" hơn, từ cách hiểu và ý tưởng đó, chúng ta đưa ra cách thực hiện và trình bày gọn gàng, khoa học hơn.

Trước hết, ta xuất phát từ mô hình như sau: $\begin{pmatrix} a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 \\ b_n b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 \end{pmatrix}$ và quy ước giá trị của bộ này là: $a_n \times b_1 + a_{n-1} \times b_2 + a_{n-2} \times b_3 + \cdots + a_2 \times b_{n-1} + a_1 \times b_n$.

(Tạm gọi đây là mô hình 1 theo tiêu chuẩn "ngoài vào trong")

– Bây giờ xét phép nhân số với số $\overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_2 x_1 x_0}$ với số $\overline{y_n y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_2 y_1 y_0}$

(Nếu số chữ số của 2 thừa số khác nhau thì ta thêm các chữ số 0 vào đầu để đưa về dạng có số chữ số bằng nhau như dạng trên)

Ta sẽ lần lượt lấy ra các bộ số để xét theo quy tắc như mô hình 1.

Bộ thứ i, kí hiệu b_i sẽ được xác định như sau:

+ b_i: $\begin{pmatrix} x_i x_{i-1} x_{i-2} \ldots x_2 x_1 x_0 \\ y_i y_{i-1} y_{i-2} \ldots y_2 y_1 y_0 \end{pmatrix}$ với $i \le n$

+ b_i: $\begin{pmatrix} x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_{i-n+2} x_{i-n+1} x_{i-n} \\ y_n y_{n-1} y_{n-2} \ldots y_{i-n+2} y_{i-n+1} y_{i-n} \end{pmatrix}$

với $n \le i \le 2n$.

Giá trị của b_i được xác định theo quy ước ở mô hình 1.

– Bây giờ ta xét bộ số c_i:

$$c_0 = b_0; c_{k+1} = b_{k+1} + (c_k \text{ div } 10) \text{ với } k \le 2n.$$

– Khi đó dãy hệ số trong phân tích thập phân của tích hai số ta đang xét sẽ được xác định: $a_i = c_i \bmod 10$ với $k \le 2n+1$; $a_i = 0$ với $k > 2n+1$.

(Với div là phép toán chia lấy phần thương và mod là phép chia lấy phần dư).

– Ví dụ ta thực hiện với tích 369×247.

b_0: $\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{matrix}$ b_1: $\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{matrix}$ b_2: $\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{matrix}$ b_3: $\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{matrix}$ b_4: $\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{matrix}$

– Ta được $b_0 = 63$; $b_1 = 78$; $b_2 = 63$; $b_3 = 24$; $b_4 = 6$.

$\Rightarrow c_0 = 63$; $c_1 = 84$; $c_2 = 71$; $c_3 = 31$; $c_4 = 9$; $c_5 = 0$.

– Do đó $a_0 = 3$; $a_1 = 4$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$; $a_4 = 9$ và $a_5 = a_6 = a_7 = \cdots = 0$.

Ta được kết quả $369 \times 247 = 91143$.

Lời kết: Khi trình bày, chúng ta có thể tự nhẩm các bước tìm b_i, c_i và ghi trực tiếp kết quả ra giấy. Hơn thế, khi đã thành thạo ý tưởng này, chúng ta cũng có thể bỏ qua bước c_i và nhẩm lần lượt tìm ra $b_0, a_0, b_1, a_1, \ldots$ Tóm lại rằng, từ ý tưởng này, mỗi người sẽ có một cách sử dụng riêng cho mình, quan trọng là chúng ta sẽ thấy nó trở nên thú vị hơn, thuận tiện hơn khi thực hiện nhân 2 số có nhiều chữ số. Mặc dù trong khuôn khổ bài viết này, việc truyền tải hết ý tưởng và sự xuất phát của nó gặp nhiều hạn chế nhưng tác giả hi vọng rằng ý tưởng trên sẽ mang đến cho bạn đọc một cái nhìn mới mẻ về phép nhân và sẽ phát huy được hiệu quả của nó khi áp dụng thực tiễn. Dành tặng bạn đọc câu thơ gắn liền với ý tưởng trên, hãy thử nghĩ xem tại sao lại có câu thơ như thế nhé!

"Phải qua trái rồi lại phải qua trái,
Ngoài vào trong, nhân chéo rồi sẽ xong".

CHIA TIỀN

- Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung -

Chuyện kể rằng sau khi thoát khỏi tay thần Biển, Sinbad và một người bạn phải kiếm tiền để mua vé tàu trở về nhà. Theo cách của những người dân trên đảo, họ ném đá vào bầy khỉ đang chơi đùa trên những cây dừa cao để chúng tức giận và ném lại những trái dừa. Họ chỉ việc nhặt dừa chất lên xe và đem ra chợ bán! Hôm đó, một thương gia đã đồng ý mua dừa với số tiền trả cho mỗi trái dừa (bằng đồng sequin) bằng với số dừa trên xe. Sinbad và bạn vô cùng vui sướng nhận về những đồng xu tiền chẵn 10 sequin, và một ít đồng xu lẻ. Hai người đặt những đồng xu tiền chẵn lên bàn và cứ lần lượt mỗi người lấy một đồng cho đến hết.

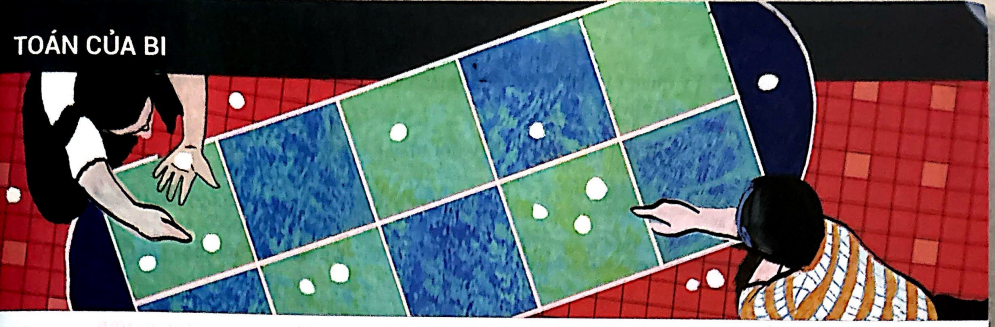
– Ôi, tôi lấy trước mà tôi cũng là người lấy cuối cùng, tôi lấy nhiều hơn anh 10 đồng rồi, người bạn kêu lên.

– Tôi lấy chỗ tiền lẻ này vậy, Sinbad trả lời.

Nhưng người bạn khăng khăng:

– Thế thì tôi vẫn lấy nhiều hơn anh, tôi ghi một tờ giấy nợ cho anh nhé.

Theo các bạn giấy nợ của người bạn có giá trị bao nhiêu để khoản tiền được chia đều?



HỌC LẬP TRÌNH SCRATCH

Bùi Việt Hà

BÀI 7. VẼ THÚ TRONG RỪNG

Mục tiêu:

Học xong bài này em sẽ biết:

- Lệnh thiết lập giá trị cho màu sắc.
- Thay đổi màu sắc và nét bút vẽ.
- Vẽ hoa với nhiều màu sắc khác nhau.
- Lệnh stamp và một số ứng dụng.
- Thiết lập chương trình tự làm họa sĩ: vẽ các con thú trong rừng.

Nội dung bài học

1. Thay đổi nét bút và màu sắc

Trong bài trước em đã biết lệnh thiết lập màu sắc cho nhân vật vẽ bằng cách chọn màu trực tiếp.

Ngoài cách trên Scratch còn cho phép thiết lập màu của bút vẽ bằng các giá trị số cụ thể. Đó là lệnh sau:

Giá trị số của màu vẽ được qui định từ 0 đến 200, dải các màu sắc như sau:

Dải màu cầu vồng của Scratch.

0 30 70 100 130 170 200

Ví dụ:

0	Đỏ	**70**	Xanh lá cây	**130**	Xanh thẫm
30	Vàng	**100**	Xanh trời	**170**	Hồng

Nếu chú ý quan sát em sẽ thấy dải màu của Scratch chính là sắc màu của cầu vồng, thật là tuyệt đúng không.

Các lệnh thay đổi nét bút và thay đổi màu sắc như sau:

change pen size by 1	Thay đổi độ rộng nét bút theo giá trị ghi trong lệnh.
change pen color by 10	Thay đổi giá trị màu sắc của bút theo giá trị ghi trong lệnh.

Ví dụ em có thể dùng đoạn chương trình sau để vẽ hình ảnh dải màu trên:

Kết quả chương trình bên.

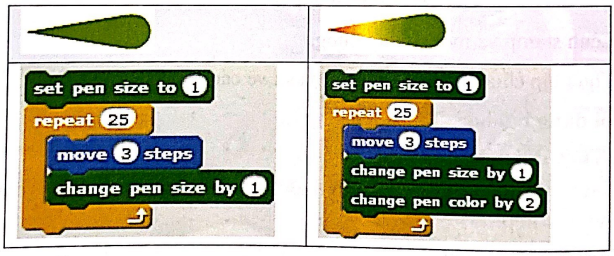
```
set pen size to 50
set pen color to 0
pen down
repeat 200
    move 2 steps
    change pen color by 1
```

Thiết lập độ rộng nét bút 50, màu 0 (đỏ), hạ bút.

*Vòng lặp **200**, mỗi lần đi 2 bước và tăng giá trị màu lên **1**. Như vậy hết vòng lặp vừa vặn thể hiện đủ **200** màu.*

2. Vẽ hoa với nhiều màu sắc

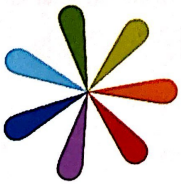
Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng các lệnh trên để vẽ cánh hoa nhé. 2 chương trình sau cùng vẽ 1 cách hoa dài 75 bước nhưng cách thể hiện màu sắc khác nhau.



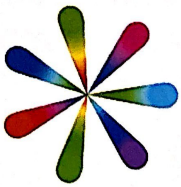
Xuất phát với nét bút = 1, đi 75 bước, sau mỗi 3 bước thì tăng kích thước bút vẽ lên 1 đơn vị.

Xuất phát với nét bút = 1, đi 75 bước, sau mỗi 3 bước thì tăng kích thước bút vẽ lên 1 và màu vẽ lên 2 đơn vị.

Dựa trên cách vẽ bông hoa nhiều cánh từ bài học trước chúng ta sẽ vẽ các bông hoa *n* cánh có dạng như các hình sau.



***a.** Mỗi cánh hoa là 1 màu khác nhau.*



***b.** Mỗi cánh hoa là 1 tập hợp nhiều màu khác nhau.*

Thuật toán tạo các hoa này như sau.

*Cách vẽ hoa **n** cánh, mỗi cánh dài **d** bước.*

```
Lặp lại n lần
    Vẽ cánh hoa (theo 1 trong 2 cách trên).
    Đi lùi lại d bước.
    Xoay trái 1 góc = 360/n độ.
```

Chương trình sau minh họa cho vẽ hoa kiểu a. trong hình trên.

Chương trình vẽ hoa 7 cánh, mỗi cánh là 1 màu khác nhau.

```
clear
set pen color to pick random 1 to 100
set pen size to 1
pen down
repeat 7
    repeat 25
        move 3 steps
        change pen size by 1
    set pen size to 1
    move -75 steps
    turn ↺ 360 / 7 degrees
    change pen color by 30
```

Thiết lập các thông số ban đầu: giá trị màu ngẫu nhiên, nét bút = 1, hạ bút.

Vòng lặp ngoài = số cánh hoa.

Đoạn chương trình vẽ 1 cánh hoa (chiều dài = 75) có 1 màu duy nhất.

Thiết lập nét bút =1 và lùi 75 bước.

Xoay trái để vẽ cánh hoa khác.

Thay đổi màu cho cánh hoa tiếp theo.

Em hãy tự thiết kế chương trình vẽ bông hoa dạng **b.** nhé, chú ý rằng hoa dạng **b.** khó hơn dạng **a.**

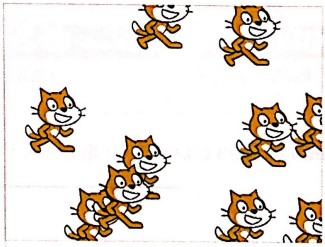
3. Lệnh stamp

Trong các chức năng vẽ đồ họa của Scratch không thể không nhắc đến 1 lệnh đặc biệt: lệnh **stamp**.

Lệnh **stamp** sẽ vẽ hình ảnh nhân vật hiện thời lên màn hình. Ví dụ:

Lệnh stamp vẽ hình nhân vật trên sân khấu.

```
repeat 10
    go to random position
    stamp
```

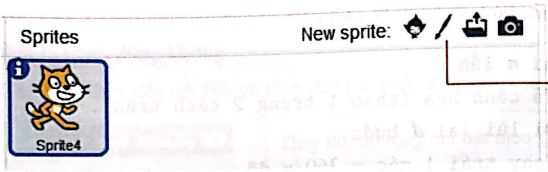


Chương trình ngắn trên sẽ vẽ 10 con mèo ngẫu nhiên trên màn hình như hình bên.

Bây giờ chúng ta cùng nhau khám phá sức mạnh của lệnh **stamp** này nhé.

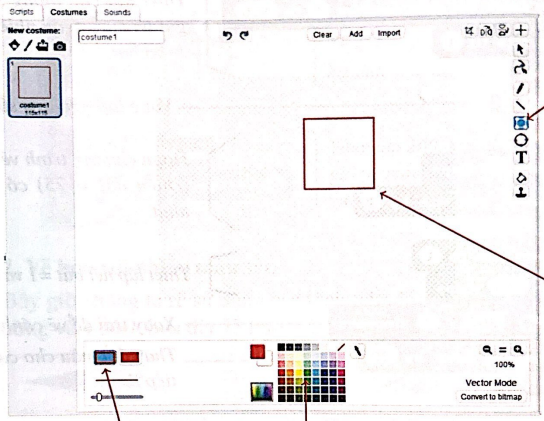
Em hãy tạo 1 nhân vật mới bằng cách vẽ 1 hình vuông trên màn hình, các bước như sau:

- Nháy chuột lên biểu tượng tại khu vực điều khiển nhân vật để tạo 1 nhân vật mới bằng cách vẽ đồ họa trực tiếp.



Biểu tượng tạo 1 nhân vật mới bằng cách vẽ trực tiếp.

- Trong cửa sổ vẽ đồ họa nháy nút Convert to vector để chuyển sang chế độ vẽ đồ họa bằng các đối tượng. Màn hình sẽ thay đổi như hình sau với thanh công cụ vẽ nằm ở bên phải màn hình. Thực hiện tiếp theo chỉ dẫn.



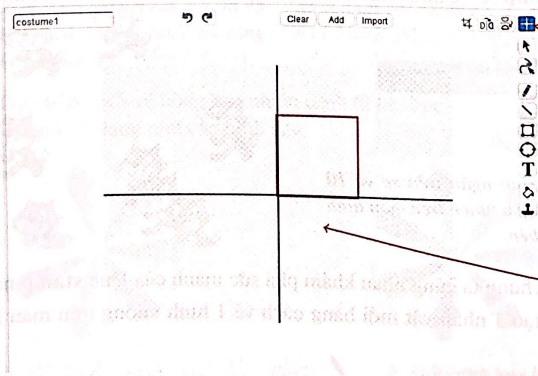
1. Chọn công cụ này để vẽ hình vuông/ chữ nhật.

4. Vẽ 1 hình vuông trên màn hình, chú ý giữ phím Shift trong khi vẽ.

3. Chọn kiểu hình rỗng.

2. Chọn màu vẽ tại khung này.

- Tiếp theo, chúng ta thiết lập tâm của nhân vật tại góc trái dưới hình vuông. Các bước làm như sau:



1. Nháy vào nút này để vào chức năng xác định tâm nhân vật (xuất hiện 2 đường vuông góc).

2. Kéo thả chuột vào vị trí góc trái dưới của hình vuông và nhả chuột.

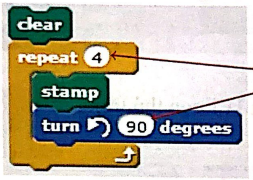
Chú ý quan trọng.

Vì sao cần xác định tâm của nhân vật? Vì các nhân vật sẽ xoay xung quanh tâm của mình nên cần làm việc này. Trong các bước sau em sẽ hiểu vì sao cần xác định lại tâm của hình vuông này.

Bây giờ chúng ta có thể khám phá lệnh **stamp** với hình vuông vừa tạo.

Em hãy viết và thực hiện đoạn chương trình ngắn sau đây và chạy thử, kết quả sẽ như hình bên phải.

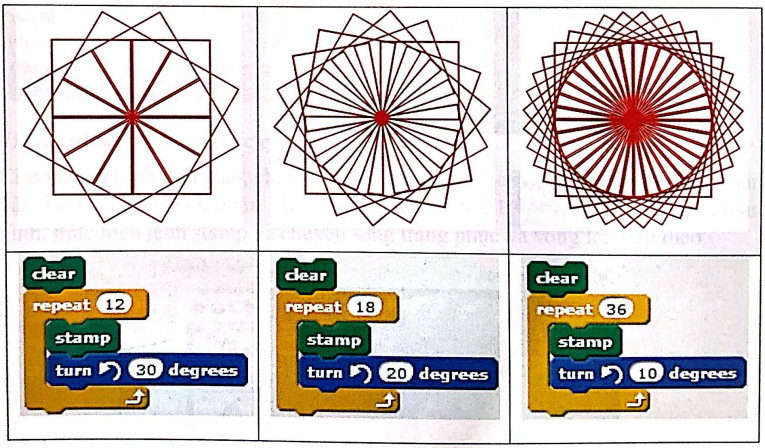
Chú ý là cần cho hình vuông xoay 1 góc đầy 360 độ.



2 giá trị này phải thỏa mãn

4 × 90 = 360

Bây giờ chúng ta thay đổi 2 giá trị số (vòng lặp, xoay), cho vòng lặp tăng lên em sẽ thấy hình ảnh thu được trên màn hình sẽ rất đẹp.



Từ ví dụ này em có thể sáng tạo ra nhiều hình vẽ đẹp hơn nữa, sử dụng các hình ảnh khác nhau của nhân vật.

4. Vẽ các con thú trong rừng

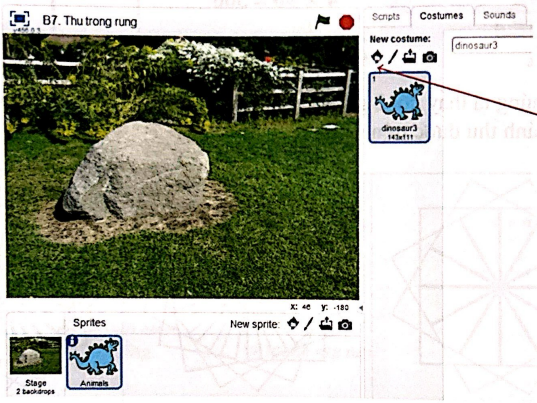
Bây giờ chúng ta sẽ cùng thiết kế chương trình chính của bài học hôm nay: vẽ thú trong rừng.

Ve thu trong rung.sb2

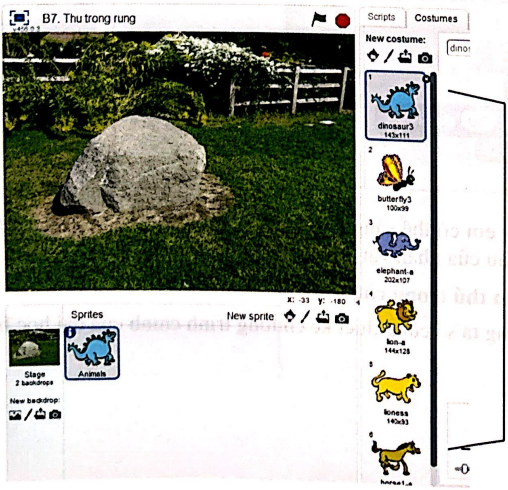
Chương trình sẽ tự động vẽ hình ảnh các con thú trong rừng. Con thú và nền sân khấu được thể hiện ngẫu nhiên.

a) Thiết lập các nhân vật

Em chỉ cần thiết lập 1 nhân vật duy nhất là 1 con thú trong rừng.



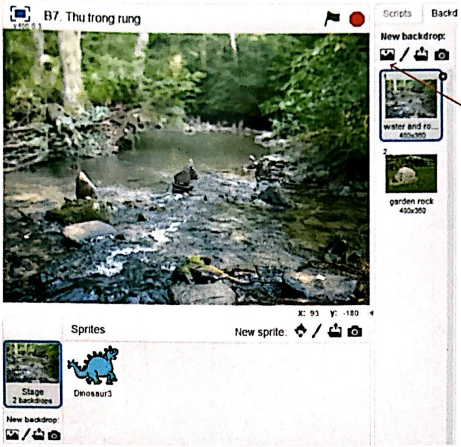
Sau khi thiết lập 1 nhân vật đầu tiên, nháy vào đây để bổ sung thêm trang phục là các con thú khác muốn đưa vào bức tranh của em.



Thiết lập 1 nhân vật với nhiều trang phục khác nhau, mỗi hình ảnh là 1 con thú mà em định vẽ trong tranh.

Số lượng trang phục không hạn chế.

b) Thiết lập nền sân khấu.



Nháy vào nút này để bổ sung nền sân khấu. Có thể bổ sung không hạn chế số lượng nền sân khấu chính là nền của bức tranh em định vẽ.

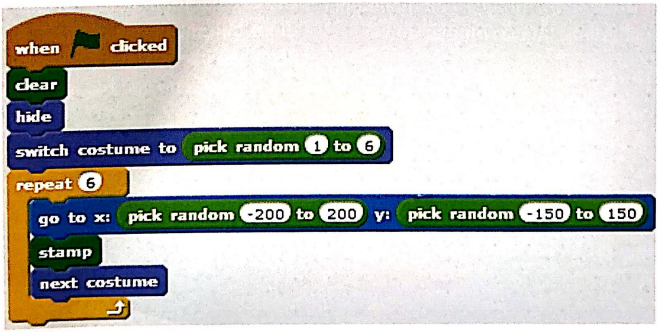
c) Lập trình cho sân khấu

Sân khấu sẽ hiện ngẫu nhiên một trong các hình ảnh nền sâu khấu.

d) Lập trình tự động vẽ các con thú trong rừng

Chương trình rất đơn giản, chỉ bao gồm 1 vòng lặp theo số lượng trang phục nhân vật. Tại mỗi bước lặp, nhân vật sẽ chuyển động đến 1 vị trí ngẫu nhiên trên màn hình, thực hiện lệnh stamp và chuyển sang trang phục và vòng lặp tiếp theo.

Đoạn chương trình chính vẽ thú trong rừng bằng lệnh stamp.



Bài học hôm nay đến đây kết thúc. Hy vọng các em cảm thấy vô cùng bổ ích và thú vị qua bài học này.

THỂ LỆ CUỘC THI "Cùng π giải toán"

1. Mục đích:

Khuyến khích phong trào học Toán qua các bài toán.

2. Thời gian tổ chức cuộc thi:

Hằng năm, bắt đầu từ tháng 1 năm 2018.

3. Đối tượng dự thi:

Học sinh phổ thông và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

4. Các bài toán thi:

Tất cả các bài toán được đăng tải trong mục Thách thức kì này và Quán Toán của Tạp chí Pi, từ số 1 đến số 12 của năm tổ chức cuộc thi (sau đây gọi chung là bài toán thi).

5. Bài dự thi hợp lệ:

Tất cả lời giải cho các bài toán thi, được gửi tới Tòa soạn trước ngày mùng 1 của tháng phát hành số Tạp chí đăng tải các lời giải đó.

6. Phương thức chấm bài:

Chỉ cho điểm các lời giải đúng. Mỗi lời giải đúng (không phụ thuộc cách giải, cách trình bày) được cho 1 điểm; lời giải đúng và cách giải ngắn gọn được thưởng thêm không quá 1 điểm (nghĩa là được cho đến 2 điểm), lời giải đúng, cách giải ngắn gọn và đồng thời lời giải được trình bày mạch lạc, sáng sủa được thưởng thêm không quá 2 điểm (nghĩa là được cho đến 3 điểm).

7. Phương thức tính điểm xét giải:

Điểm để xét giải của mỗi học sinh dự thi, kí hiệu là s, là điểm tổng hợp các điểm của mỗi lời giải cho mỗi bài toán thi và được tính theo công thức sau:

– Đối với học sinh cấp THCS:

$$s = a + b \cdot \frac{\pi}{2} + c,$$

– Đối với học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất:

$$s = a \cdot \frac{\pi}{4} + b + c,$$

trong đó, a là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán dành cho cấp THCS, b là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán dành cho cấp THPT và c là tổng điểm của tất cả các lời giải cho các bài toán trong Chuyên mục Quán Toán.

8. Phương thức xét giải:

– Chỉ xét giải đối với các học sinh có điểm xét giải không ít hơn:

+ 9π điểm, đối với học sinh cấp THCS;

+ 23π điểm, đối với học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

– Xét giải riêng cho mỗi nhóm đối tượng:

+ Nhóm 1: Học sinh cấp THCS;

+ Nhóm 2: Học sinh cấp THPT và sinh viên đại học, cao đẳng năm thứ nhất.

9. Cơ cấu giải và mức thưởng:

Mỗi nhóm đối tượng được xét trao:

– Không quá π giải Nhất, mỗi giải được thưởng 9π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 3π giải Nhì, mỗi giải được thưởng 6π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 10π giải Ba, mỗi giải được thưởng 3π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi;

– Không quá 15π giải Pi (π), mỗi giải được thưởng 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi.

Ghi chú: 1π tiền mặt = 314.159 đồng

Căn cứ kết quả cuộc thi của từng năm, Ban giám khảo cuộc thi có thể xem xét trao giải Đặc biệt cho những học sinh có lời giải hay, độc đáo. Mỗi giải Đặc biệt được thưởng 15π tiền mặt, 1 năm Tạp chí Pi và 1 áo Pi.

Ngoài các giải chính và phần thưởng nêu trên, có thể có các giải phụ, các phần quà do các đơn vị tài trợ hoặc các nhà hảo tâm ấn định cho cuộc thi từng năm.

Học sinh đạt giải Nhất và giải Đặc biệt sẽ được GS. Ngô Bảo Châu viết thư giới thiệu với các trường đại học ở nước ngoài, nếu học sinh đó có nhu cầu.

Học sinh đạt từ giải Nhì trở lên sẽ được ưu tiên xét tuyển vào Hệ đào tạo cử nhân Toán học chất lượng cao thuộc Chương trình Đào tạo Toán học Trường Đại học Thăng Long - Viện Toán học.

10. Thời gian công bố giải và trao thưởng:

– Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên Tạp chí Pi số tháng 3 của năm liền sau năm tổ chức cuộc thi.

– Phần thưởng sẽ được trao cho các học sinh đạt giải vào ngày 31 tháng 3 của năm liền sau năm tổ chức cuộc thi, tại hai địa điểm: Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh.

11. Ban giám khảo:

– Trưởng ban: GS. Hà Huy Khoái, Tổng biên tập Tạp chí Pi;

– Phó Trưởng ban thường trực: Nguyễn Khắc Minh, Phó Tổng biên tập kiêm Trưởng ban biên tập Tạp chí Pi;

– Phó Trưởng ban: Trần Nam Dũng, Phó Tổng biên tập Tạp chí Pi;

– Thư kí: Nguyễn Thị Lê Hương, Phó Tổng biên tập kiêm Thư kí Tòa soạn Tạp chí Pi;

– Các ủy viên: Thành viên của Nhóm Thách thức Toán học Tạp chí Pi.

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO TOÁN HỌC

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THĂNG LONG - VIỆN TOÁN HỌC

Nhằm khuyến khích học sinh, sinh viên chọn Toán học làm nghề nghiệp của mình, Trường Đại học Thăng Long kết hợp với Viện Toán học (Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam) mở Chương trình đào tạo Cử nhân Toán học chất lượng cao.

Đây sẽ là chương trình thực hiện lâu dài, bắt đầu tuyển sinh từ năm học 2018-2019.

Những nội dung chính của Chương trình bao gồm:

I/ Đào tạo đại học

1. Viện Toán học chịu trách nhiệm chính trong việc xây dựng chương trình, tổ chức giảng dạy các môn Toán, Trường Đại học Thăng Long chịu trách nhiệm quản lý chung, tổ chức giảng dạy các môn chung.

2. Chương trình đào tạo sẽ được xây dựng trên cơ sở chương trình của một số trường đại học tiên tiến trên thế giới, có định hướng mạnh về Toán ứng dụng.

3. Viện Toán học tạo điều kiện để các sinh viên trong hệ đào tạo này tham gia miễn phí các hoạt động khoa học tại Viện (seminar, trường chuyên biệt Xuân-Hè, hội thảo khoa học), sử dụng thư viện, Internet... của Viện.

4. Trường Đại học Thăng Long hỗ trợ kinh phí học tập cho 20 sinh viên theo học Chương trình này mỗi khóa. Học bổng đủ trang trải toàn bộ học phí và một phần chi phí sinh hoạt.

5. Viện Toán học phối hợp vận động các cá nhân, đơn vị khác tài trợ học bổng cho sinh viên của Chương trình.

6. Viện Toán học và Trường Đại học Thăng Long hỗ trợ các sinh viên tốt nghiệp Chương trình đào tạo này tìm việc làm tại các đơn vị đào tạo, kinh doanh, công nghệ có sử dụng nhân lực về Toán cũng như giới thiệu họ học tiếp trong nước và ngoài nước.

7. Bằng tốt nghiệp của Chương trình này có ghi nhận sự hợp tác, bảng điểm có chữ ký của Hiệu trưởng Trường Đại học Thăng Long và Viện trưởng Viện Toán học.

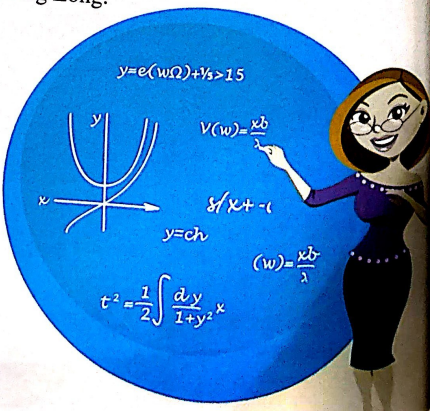
8. Những sinh viên không đảm bảo yêu cầu tiếp tục theo đuổi chương trình có thể chuyển sang học các lớp thuộc Khoa Toán-Tin của Trường Đại học Thăng Long.

II/ Đào tạo NCS ngành toán

1. Trường Đại học Thăng Long tài trợ nghiên cứu sinh tại Viện toán học thông qua hình thức ký hợp đồng làm việc như cán bộ bán cơ hữu của Viện Toán học và Khoa học ứng dụng Thăng Long (Thang Long Institte of Mathematics and Applied Sciences - TIMAS), hợp đồng có thời hạn 1 năm, và có thể gia hạn đến 3 năm.

2. Hội đồng do Viện Toán học và Trường Đại học Thăng Long thành lập sẽ xét duyệt, quyết định danh sách các NCS được tài trợ trên cơ sở đề xuất của Viện Toán học.

Chi tiết về đăng ký, dự tuyển để theo học Chương trình sẽ sớm được công bố trên website của Viện Toán học và Trường Đại học Thăng Long.



BIỂU DIỄN Zeckendorf & TRÒ CHƠI Fibonacci Nim

- Nguyễn Châu Anh[1] -

ĐÔI NÉT VỀ BIỂU DIỄN ZECKENDORF

Biểu diễn Zeckendorf tuy còn chưa thực sự phổ biến nhưng lại là một đề tài toán học vô cùng hấp dẫn và đầy tiềm năng, chúng ta cùng tìm hiểu xem nó là gì và có điều gì thú vị ở biểu diễn này nhé!

Nguồn gốc sâu xa của biểu diễn Zeckendorf chính là dãy Fibonacci vốn đã chẳng còn gì xa lạ với chúng ta nữa. Như các bạn đã biết, dãy Fibonacci là dãy vô hạn các số tự nhiên bắt đầu bằng hai phần tử 0 và 1 hoặc 1 và 1, với quy luật số liền sau bằng tổng của hai số hạng liền trước: 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Tuy nhiên, đối với biểu diễn Zeckendorf, để đảm bảo tính duy nhất, dãy Fibonacci được sử dụng lại là dãy bắt đầu bằng hai phần tử 1, 2 với công thức truy hồi là:

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n = 1 \\ 2, & \text{nếu } n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1}, & \text{nếu } n > 2 \end{cases}$$

Tiếp đến sẽ là khá niệm về *Biểu diễn nhị phân Fibonacci*, một biểu diễn chỉ gồm hai phần tử 0 và 1, nhưng lại không hề đơn điệu mà ngược lại còn vô cùng thú vị ấy chứ! Một số tự nhiên sẽ được chuyển về dạng biểu diễn nhị phân Fibonacci theo các bước tuần tự:

- Phân tích số đó thành tổng của các số hạng thuộc dãy Fibonacci.
- Theo thứ tự giảm dần, từ trái qua phải, số hạng nào nằm trong tổng vừa phân tích thì đánh số 1, số hạng nào không nằm trong tổng đó thì đánh số 0.

Ví dụ : $23 = 21 + 2 = F_7 + F_2 = 1000010$

Đối với *Biểu diễn nhị phân Fibonacci*, ta có 2 tính chất thú vị:

Tính chất 1: Mọi số tự nhiên đều viết được dưới dạng biểu diễn nhị phân Fibonacci.

Tính chất 2: Một số tự nhiên có thể viết được dưới dạng nhiều biểu diễn nhị phân Fibonacci khác nhau.

Hai tính chất này chứng minh rất đơn giản và không hề mất quá nhiều thời gian. Ở tính chất 1, ta xét một số tự nhiên A bất kì. Gọi F_n là số Fibonacci lớn nhất bé hơn A. Khi đó $A = F_n + A'$. Phân tích A' tương tự như phân tích A, lần lượt như vậy đến hết, ta sẽ luôn biểu diễn được A thành tổng của các số hạng nằm trong dãy Fibonacci, từ đó biểu diễn được thành biểu diễn nhị phân Fibonacci.

Đối với tính chất 2, ta chỉ cần lấy một ví dụ cụ thể là đã có thể chứng minh được:

$$19 = 13 + 5 + 1 = F_6 + F_4 + F_1 = 101001$$

[1] *Học sinh lớp 11A, trường THPT TH School, số 4-6 Chùa Bộc, Quang Trung, Đống Đa, Hà Nội.*

$$19 = 13 + 3 + 2 + 1 = F_6 + F_3 + F_2 + F_1$$
$$= 100111$$

Lý do tôi viết về biểu diễn nhị phân Fibonacci ở trên đây là do: *Biểu diễn Zeckendorf* chính là một biểu diễn nhị phân Fibonacci đặc biệt, ấy là không có hai chữ số 1 nào đứng cạnh nhau, hay hiểu một cách đơn giản là cách biểu diễn một số tự nhiên dưới dạng tổng của các số Fibonacci không liên tiếp. Biểu diễn Zeckendorf cũng có một tính chất khá quan trọng và cũng không kém phần thú vị, ấy chính là *Sự tồn tại duy nhất* đã được phát biểu trong định lý Zeckendorf như sau:

Định lý 1. *Một số nguyên dương cho trước luôn biểu diễn được dưới dạng một biểu diễn Zeckendorf duy nhất.*

Để chứng minh tồn tại, ta có thể sử dụng nguyên lý quy nạp, còn để chứng minh tính duy nhất của biểu diễn Zeckendorf, bạn đọc có thể sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Mọi biểu diễn Zeckendorf có n chữ số thì luôn bé hơn F_{n+2}.*

Bổ đề này được chứng minh đơn giản cũng bằng nguyên lý quy nạp. Bạn đọc hãy thử chứng minh bổ đề này và tính duy nhất của biểu diễn Zeckendorf xem nhé! Một gợi ý nhỏ để chứng minh tính duy nhất là sử dụng phương pháp phản chứng, giả sử tồn tại hai biểu diễn Zeckendorf của một số nguyên cho trước và lập luận chứng minh điều đó là vô lý.

Tiếp theo sẽ là lời giải đáp cho những thắc mắc về phương thức biểu diễn Zeckendorf được hình thành, từ một số tự nhiên A bất kì, và từ một biểu diễn nhị phân Fibonacci vẫn tồn tại hai số 1 liên tiếp.

- **Từ một số tự nhiên**

  Để chuyển một số tự nhiên A bất kì về biểu diễn Zeckendorf, ta tiến hành tuần tự ba bước:

  Bước 1: Xét n sao cho $F_n \leq A < F_{n+1}$.

  Bước 2: Ở hệ số của F_n ta cho bằng 1.

  Bước 3: Lấy hiệu của $A - F_n$, ta xét các trường hợp sau:

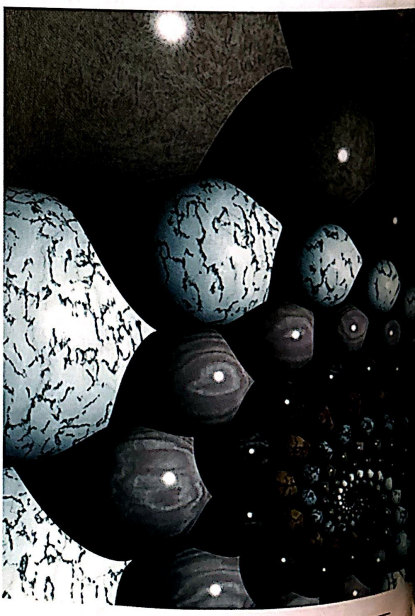
  - ◇ $A - F_n \neq 0$: quay về bước 1
  - ◇ $A - F_n = 0$: kết thúc thuật toán

  Khi đó ta có biểu diễn Zeckendorf của A.

- **Từ biểu diễn nhị phân Fibonacci**

  Như các bạn đã biết về công thức của dãy Fibonacci là $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ thì mỗi nhóm 0 1 1 sẽ được chuyển thành 1 0 0. Thực hiện phép chuyển từ trái qua phải, ta sẽ giải quyết được bất kì hai số một liên tiếp nào. Tuy nhiên, nếu chuyển như vậy thì mình phải chạy lại vòng chuyển rất nhiều lần. Ví dụ khi chuyển nhóm 0 1 1 thành 1 0 0 thì nhóm 1 0 1 1 sẽ được viết thành 1 1 0 0, vẫn tồn tại hai số 1 liên tiếp nên phải chạy lại từ trái sang phải một lần nữa. Nếu dãy có nhiều nhóm như vậy, thời gian chạy của thuật toán rất lớn, độ phức tạp cao.

  Qua thực nghiệm, chúng tôi xét thấy, khi chạy vòng chuyển nhiều lần, mỗi nhóm có dạng 1 0 1 0 1 ... 0 1 1 (có vòng lặp nhóm (01) n lần ở giữa hai số 1) thì đều viết được về dưới dạng 1 0 0 0 ... 0 ($2n+2$ chữ số 0). Ví dụ ta có phép chuyển: 1 0 1 0 1 0 1 1 ⇒ 1 0 1 0 1 1 0 0 ⇒ 1 0 1 1 0 0 0 0 ⇒ 1 1 0 0 0 0 0 0 ⇒ 1 0 0 0 0 0 0 0 (n = 3). Vì vậy, thay vì tìm những nhóm 0 1 1 rồi chuyển thành 1 0 0 và phải chạy vòng lặp nhiều lần, ta sẽ tìm những



nhóm 1 0 1 0 1 ... 0 1 1 (có vòng lặp nhóm (01) n lần (n có thể bằng 0) ở giữa hai số 1) rồi chuyển thành 1 0 0 0 ... 0 ($2n+2$ chữ số 0) thì sẽ không phải chạy lại, thời gian chạy của thuật toán là tuyến tính, độ phức tạp là n.

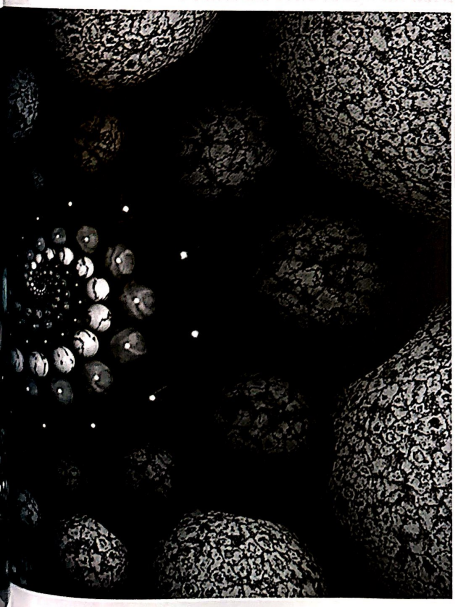
Ví dụ: Chuyển biểu diễn $A = 1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1$ thành biểu diễn Zeckendorf.

- ◇ Xét nhóm thứ nhất: 1 0 1 0 1 1 ⇒ 1 0 0 0 0 0. Khi đó: $A = 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1$
- ◇ Chuyển nhóm thứ hai, ta có: 1 0 1 1 ⇒ 1 0 0 0 0. Khi đó: $A = 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0$

Thử lại: $1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1 = F_{10}+F_8+F_6+F_5+F_4+F_2+F_1 = 152 = F_{11}+F_5 = 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0$ *(Đúng)*

Sau khi chuyển được về biểu diễn Zeckendorf, tôi xin phép được giới thiệu tới bạn đọc thuật toán thực hiện phép cộng hai biểu diễn Zeckendorf với thời gian chạy tuyến tính (tức thời gian thực hiện phép tính tương đương với cộng ở hệ thập phân) như sau:

- **Bước 1:** Cộng dóng cột bình thường như phép cộng hai số thập phân.
- **Bước 2:** Từ trái sang phải, thực hiện các phép đổi sau (trừ hai chữ số cuối)



- ◇ 0 1 1 ⇒ 1 0 0 (Do $F_{n-2}+F_{n-1}=F_n$)
- ◇ 0 2 0 0 ⇒ 1 0 0 1 (Do $2*F_{n-1} = F_{n-1}+F_{n-1} = F_{n-1}+F_{n-2}+F_{n-3} = F_n+F_{n-3}$)
- ◇ 0 0 3 0 0 ⇒ 1 0 0 0 1 (Do $3*F_{n-2} = 2*F_{n-2}+F_{n-2} = F_{n-1}+F_{n-4}+F_{n-2} = F_n+F_{n-4}$)

- **Bước 3:** Xử lí hai chữ số cuối:
  - ◇ 0 3 ⇒ 1 1 (Do $3*F_1 = 2*F_1+F_1 = F_2+F_1$)
  - ◇ 0 2 ⇒ 1 0 (Do $2*F_1 = F_2$)
  - ◇ 1 3 ⇒ 1 1 0 (Do $F_2+3*F_1 = (F_2+F_1)+2*F_1 = F_3+F_2$)
  - ◇ 2 0 ⇒ 1 0 1 (Do $2*F_2 = F_2+F_2 = F_2+(F_1+F_1) = F_3+F_1$)
  - ◇ 2 1 ⇒ 1 1 0 (Do $2*F_2+F_1 = (F_2+F_1)+F_2 = F_3+F_2$)
  - ◇ 3 0 ⇒ 1 1 1 (Do $3*F_2 = F_2+F_2+F_1+F_1 = (F_2+F_1)+F_2+F_1 = F_3+F_2+F_1$)
  - ◇ 1 2
    - * 0 1 2 ⇒ 1 0 1 (Do $F_2+2*F_1 = (F_2+F_1)+F_1 = F_3+F_1$)
    - * 1 1 2 ⇒ 1 0 1 0 (Do $(F_3+F_2)+2*F_1 = F_4+F_2$)

- **Bước 4:** Chuyển kết quả về biểu diễn Zeckendorf.

Ví dụ:

```
                 1 0 1 0 0 1 0 1
               +
                     1 0 1 0 1
                 ---------------
Cộng dóng hàng:  1 0 1 1 0 2 0 2
Chuyển:          1 1 0 0 1 0 0 3
                 1 1 0 0 1 0 1 1
Chuyển về Zeckendorf: 1 0 0 0 1 0 0 0 0
```

Thử lại: $1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 + 1\,0\,1\,0\,1 = 51 + 12 = 63 = 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0$ *(Đúng)*

Ngoài phép chuyển và phép cộng như tôi đã trình bày ở trên, bạn đọc có thể tìm đọc báo cáo ***"Biểu diễn nhị phân Fibonacci"*** (tác giả: Nguyễn Châu Anh, Lê Ngọc Trường Giang) trên website chính thức của trại hè Toán và khoa học MaSSP: www.masspvn.com để hiểu thêm về các phép tính trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa giữa hai biểu diễn Zeckendorf hay tham khảo bài chứng minh định lý Zeckendorf hoàn chỉnh nhé!

ỨNG DỤNG CỦA BIỂU DIỄN ZECKENDORF VÀO TRÒ CHƠI FIBONACCI NIM

Biểu diễn Zeckendorf có khá nhiều ứng dụng hay, đặc biệt là trong lĩnh vực vật lý lượng tử, tuy nhiên tôi xin phép chỉ giới thiệu đến độc giả một ứng dụng cơ bản và đơn giản nhất của nó, ấy là ứng dụng vào trò chơi Fibonacci Nim. Fibonacci Nim là một trò chơi toán học biến thể từ trò chơi Nim truyền thống, được Michael J. Whinihan mô tả lần đầu tiên vào năm 1963 và đã ghi nhận sáng chế cho Robert E. Gaskell, tuy chưa thực sự phổ biến nhưng lại là một trò chơi vô cùng hấp dẫn và thú vị, gây được nhiều hứng thú.

Luật chơi

Fibonacci Nim[1] là một trò chơi dành cho hai người. Luật chơi vô cùng đơn giản, người chơi luân phiên nhau nhặt sỏi từ một đống sỏi cho trước. Trong lượt bốc đầu tiên, người chơi không được bốc toàn bộ đống sỏi. Trong các lượt bốc tiếp theo, người chơi không được bốc quá hai lần lượng sỏi được bốc trong lượt bốc ngay liền trước đó. Tương tự như trò chơi Nim truyền thống, ai bốc được viên sỏi cuối cùng sẽ là người thắng cuộc.

Chiến thuật tối ưu

Gọi q là số lượng sỏi lớn nhất hiện tại có thể được bốc (q thay đổi theo mỗi lượt bốc sỏi), lượt đầu tiên bốc một viên, các lượt sau bốc không quá hai lần lượng sỏi được bốc trong lượt bốc liền trước đó. Biểu diễn lượng sỏi chưa được bốc còn lại dưới dạng ***"Biểu diễn Zeckendorf"***. Một vị trí bốc bị xem là *điểm thua* cho người chuẩn bị bốc khi q bé hơn số Fibonacci nhỏ nhất trong biểu diễn và *điểm thắng* là ngược lại. Tại *điểm thắng*, người chơi có thể bốc toàn bộ số sỏi còn lại (nếu được phép) hoặc bốc một lượng sỏi bằng số Fibonacci nhỏ nhất trong biểu diễn. Khi đó, đối thủ sẽ phải đối mặt với *điểm thua*, vì q mới sẽ nhỏ hơn số Fibonacci nhỏ nhất trong biểu diễn Zeckendorf của đống sỏi còn lại. Từ *điểm thua*, bất kì lượng bốc nào hợp lệ cũng sẽ dẫn đến *điểm thắng*.

Đặc biệt, nếu trong đống sỏi ban đầu có lượng sỏi là một số Fibonacci, người thứ nhất sẽ thua và người thứ hai dành chiến thắng. Tuy nhiên, nếu số lượng sỏi ban đầu không phải là một số Fibonacci, người chơi thứ nhất sẽ luôn luôn thắng với chiến thuật tối ưu này.

Ví dụ

Giả sử lúc đầu ta có 10 viên sỏi. Biểu diễn Zeckendorf sẽ là $10 = 8 + 2$. Khi đó, chiến thuật thắng cho người chơi thứ nhất sẽ là bốc một lượng sỏi bằng số Fibonacci nhỏ nhất trong biểu diễn, trong trường hợp này sẽ là 2 viên, để lại 8 viên. Người chơi thứ 2 được bốc nhiều nhất là 4 viên theo luật chơi, nhưng nếu bốc nhiều hơn 2 viên thì người chơi thứ nhất có thể bốc toàn bộ đống sỏi còn lại và dành chiến thắng. Ta xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Giả sử người thứ 2 bốc 2 viên. Còn lại $6 = 5 + 1$ viên sỏi, người thứ nhất tiếp tục bốc một lượng sỏi bằng số Fibonacci nhỏ nhất trong biểu diễn, tức là 1 viên, để lại 5 viên. Người thứ 2 được bốc nhiều nhất là 2 viên, nhưng nếu làm vậy thì người chơi thứ nhất có thể bốc toàn bộ đống sỏi còn lại và dành chiến thắng. Vậy người 2 chỉ có thể bốc 1 viên. Lượng sỏi còn lại là $4 = 3 + 1$ viên. Một lần nữa, theo chiến thuật tối ưu, người thứ nhất bốc 1 viên, để lại 3 viên. Bây giờ người thứ 2 có thể bốc nhiều nhất 2 viên, nhưng dù bốc 1 hay 2 viên thì người thứ nhất cũng sẽ dành chiến thắng khi có quyền bốc toàn bộ số sỏi còn lại.
- **Trường hợp 2:** Giả sử người thứ 2 bốc 1 viên. Còn lại $7 = 5 + 2$ viên sỏi, người thứ

[1] *Trò chơi này cần được phân biệt rõ ràng với một trò chơi khác cũng có tên gọi là Fibonacci Nim, khi mà người chơi chỉ được bốc một lượng sỏi là số thuộc dãy Fibonacci trong mỗi lần bốc.*

nhất tiếp tục bốc một lượng sỏi bằng số Fibonacci nhỏ nhất trong biểu diễn, tức là 2 viên, để lại 5 viên. Người thứ 2 được bốc nhiều nhất là 4 viên. Ta xét các khả năng xảy ra sau:

- Người thứ 2 bốc 4 viên, còn lại 1 viên. Người thứ nhất có quyền bốc nhiều nhất 7 viên, nhưng chỉ cần bốc 1 viên sỏi cuối cùng và dành chiến thắng.
- Người thứ 2 bốc 3 viên, còn lại 2 viên. Người thứ nhất có quyền bốc nhiều nhất 6 viên nhưng chỉ cần bốc 2 viên cuối cùng là cũng dành chiến thắng.
- Người thứ 2 bốc 2 viên, còn lại 3, người thứ nhất có quyền bốc nhiều nhất là 4 viên, nhưng chỉ cần bốc 3 viên cuối cùng là cũng dành chiến thắng.
- Người thứ 2 bốc 1 viên. Lúc này còn lại $4 = 3 + 1$ viên sỏi. Người thứ nhất theo chiến thuật tối ưu bốc 1 viên. Còn lại 3 viên. Người thứ 2 được bốc nhiều nhất là 2 viên :
  - Người thứ 2 bốc 1 viên, còn lại 2 viên. Người thứ nhất được bốc nhiều nhất là 2 viên nên có thể bốc luôn 2 viên cuối cùng và dành chiến thắng.
  - Người thứ 2 bốc 2 viên, còn lại 1 viên. Người thứ nhất được bốc nhiều nhất 4 viên nên có thể bốc luôn viên cuối cùng và dành chiến thắng.

Bạn đọc hãy thử thiết kế trò chơi của riêng mình và kiểm nghiệm xem chiến thuật này đã tối ưu chưa nhé! Qua thực nghiệm, biết đâu chúng ta có thể phát hiện ra những tính chất toán học mới lạ và vô cùng thú vị đấy!

Lời cuối cùng, cho phép tôi, tác giả của bài viết này, được gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến Viện nghiên cứu cao cấp về Toán VIASM với vai trò đồng tổ chức trại hè Toán và khoa học MaSSP 2017; chị Đỗ Thị Thu Thảo (nghiên cứu sinh trường đại học MIT, Mỹ), anh Hồ Đức (nghiên cứu sinh trường đại học Chicago, Mỹ) với tư cách là head mentors môn Toán của MaSSP 2017; anh Trần Hồng Quân, chị Triệu Thu Hà cùng các anh chị mentors khác, cũng như các bạn trại viên của trại hè MaSSP 2017 đã hướng dẫn, giúp đỡ và tạo điều kiện hết mình để chúng tôi có thể hoàn thành đề tài nghiên cứu của mình và giới thiệu với độc giả trong bài báo này.

Tài liệu tham khảo:

[1] Ahlbach, Connor and Usatine, Jeremy and Pippenger, Nicholas. 2012. *Efficient algorithms for Zeckendorf arithmetic.* arXiv preprint arXiv:1207.4497

[2] Zeckendorf, Edouard. 1972. *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. **41**, 179-182.

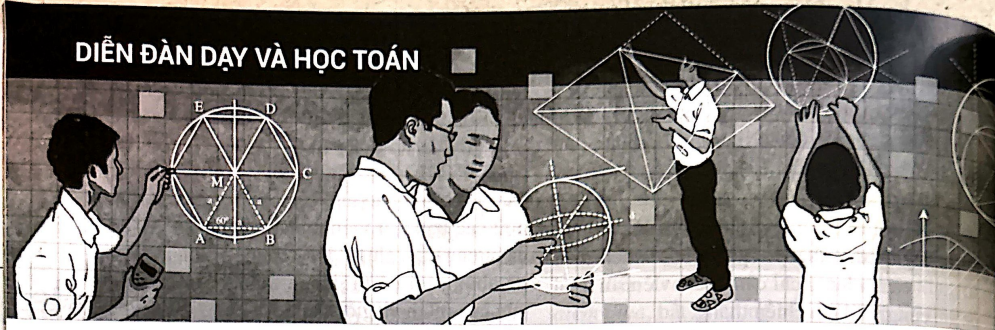
[3] Alpert, Hannah. 2009. *Differences of multiple Fibonacci numbers*. Integers, **9**(6), 745-749.

[4] Peter W.Shor, Stephen P.Jordan. 2008. *Estimating Jones polynomials is a complete problem for one clean qubit*. Quantum Information Computation. **8**, 681-714.

[5] Vajda, Steven. 1992. *Mathematical Games and how to Play Them*. Ellis Horwood series in mathematics and its applications. Ellis Horwood. URL: https://books.google.com/books?id=RinvAAAAMAAJ.

[6] Whinihan, Michael J. 1963. *Fibonacci Nim*. Fibonacci Quarterly. **1**(4): 9–13.

[7] Alfred, Brother U. 1963. *Exploring Fibonacci numbers*. Fibonacci Quarterly. 1 (1): 57–63. See "Research project: Fibonacci nim". p. 63.



NHỮNG THAY ĐỔI CỦA CÔ GIÁO TÂM

(Chia sẻ kinh nghiệm dạy học dựa trên giờ học có thật của cô giáo Tâm, huyện Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

- Chu Cẩm Thơ -

"KHÔNG PHẢI BÀI KHÓ MỚI HAY KHÔNG PHẢI HỌC THUỘC THÌ SẼ NHỚ"

Cô giáo Tâm cũng như nhiều giáo viên dạy toán ở THCS khác đều thấy rất áp lực khi dạy học sinh không giỏi Toán. Cô nói: "Cả tiết học cố để giảng cho các bạn học sinh hiểu và làm được những bài toán cơ bản nhất cũng đã khó, huống hồ phải làm sao để các học sinh có thể thi được điểm khá trở lên trong kỳ kiểm tra".

Sau đây là những yêu cầu mà cô Tâm muốn học sinh của mình làm:

1. Học thuộc các định nghĩa, tính chất, quy tắc giải những bài toán cơ bản mà cô đã chữa mẫu.

2. Nhận dạng được, áp dụng đúng quy tắc giải những bài toán đó trong tình huống tương tự.

Vì thế, trong mỗi tiết học Ôn tập chương 2 (về hàm số bậc nhất – lớp 9), việc đầu tiên là cô gọi học sinh để kiểm tra:

(1) xem chúng đã học thuộc định nghĩa về: hàm số bậc nhất, hệ số góc, vị trí tương đối của hai đường thẳng.

(2) liệt kê các dạng toán cơ bản trong suốt cả chương.

Cô Tâm rất mệt mỏi, bực mình vì học sinh không trả lời được hai yêu cầu này của cô. Sau tiết học, cô tâm sự rằng cô bất lực và sốc với những học sinh đó, cô đã yêu cầu các em học thuộc lần này là lần thứ hai mà các em vẫn không trả lời được (vì tiết này đã là tiết ôn tập chương). Cô còn buồn hơn khi học sinh không làm được những bài tập cô cho là rất dễ ở trong sách giáo khoa. Cô bảo: "đến mức độ nhớ chúng cũng không làm được, thế mà nhà trường cứ yêu cầu phải dạy ở mức độ thông hiểu, vận dụng."

Khi được hỏi: "vì sao những học sinh thuộc lòng (nhớ) định nghĩa hàm số bậc nhất từ tiết trước nhưng bây giờ lại không nhớ và không làm được bài toán cơ bản?", cô Tâm không thể lý giải nổi. Cô chỉ bảo, các em ấy và nhiều học sinh bây giờ như thế đấy, nước đổ lá khoai.

Nhưng thực ra "không phải thuộc là nhớ". Nếu việc học thuộc chỉ là hình thức, kiểu học vẹt mà không hiểu bản chất thì làm sao mà nhớ được. Nhất là đối với môn Toán. Vậy thì phải thay đổi thế nào.

Sau đây là một số thay đổi của cô Tâm:

1. Cho học sinh tự ra đề toán

Cô Tâm đã thử thay đổi việc học thuộc bằng cách yêu cầu học sinh "tự ra đề toán" cho một chủ đề, và chấm bài của bạn xem bạn đã làm như mình mong muốn chưa. Thật kì lạ, lần này cô thấy gần như cả lớp đã ra được đề bài và làm được đề bài của bạn ra.

Cách học này người ta gọi là "học bằng cách dạy lại cho người khác". Mặc dù không giỏi, nhưng hầu hết mỗi người đều có thể "đố", "giảng" lại được cho người khác những thứ mà mình tự học được thông thạo, đồng thời nếu đóng vai người đi "đố", "đi giảng" cho người khác thì họ ít bị động, sự chủ động làm họ tích cực hơn.

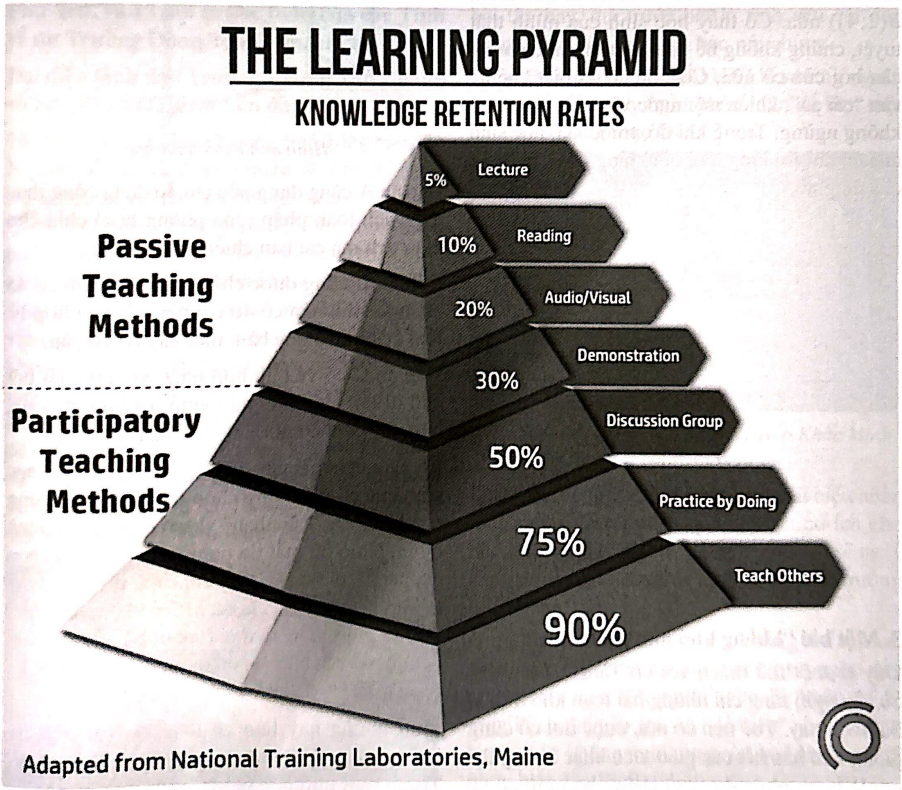
2. Đừng vui khi học sinh răm rắp làm theo

Ở lớp thứ nhất, trong tình huống học sinh tự ra đề ở trên, cô có thấy một bài toán khá thú vị, đó là: "vẽ đồ thị hàm số $y = mx - 2$, biết rằng đồ thị này đi qua điểm $A(1;2)$". Cô thấy đa số học sinh làm như cô đã hướng dẫn:

Bước 1: tìm m. Thay tọa độ điểm $A(1;2)$ vào và tìm được $m = 4$.

Bước 2: vẽ đồ thị tương ứng với giá trị $m = 4$, đó là hàm số $y = 4x - 2$. Trong bước này, học sinh tìm giao điểm của đồ thị với trục Ox (tương ứng cho $y = 0$ thì $x = 1/2$), giao điểm của đồ thị với trục Oy (tương ứng $x = 0$ thì $y = -2$).

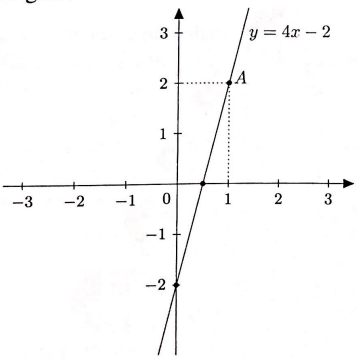
Ban đầu cô Tâm thấy rất vui vì học sinh đã tuân thủ theo những gì cô giáo dạy: "muốn vẽ đồ thị



Mô hình kim tự tháp học tập (ảnh nguồn internet)

hàm số bậc nhất thì cần đi tìm giao điểm của nó với trục Ox, Oy". Nhưng khi phân tích kỹ đề bài, cô mới nhận ra, chẳng cần tìm giá trị của m, học sinh cũng vẽ được đồ thị hàm số, bởi đề bài đã cho biết điểm $A(1;2)$, thay $x = 0$ thì ta tìm được $y = -2$ (là giao điểm của đồ thị với trục Ox).

Do đó, ở lần dạy thứ 2 ở một lớp khác, cô đã dừng lại, và nói sẽ tặng điểm thưởng nếu em học sinh nào không cần tìm m vẫn vẽ được đồ thị hàm số. Với gợi ý của cô (để vẽ được đường thẳng thì ta cần xác định mấy điểm thuộc đường thẳng đó? Ta đã có mấy điểm rồi? Ta cần tìm điểm nào nữa? Điểm này không phụ thuộc vào m thì sao?). Lúc học sinh biết được cách làm, cô thấy các học sinh xôn xao, chúng còn nghĩ ra bài tương tự ($y = mx - m$ biết đi qua điểm $B(2;4)$) nữa. Cô thấy học sinh của mình thật tuyệt, chúng không hề lặng như tờ trước những câu hỏi của cô nữa. Chắc là cô đã biết "ném" vào "cái ao", khiến mặt nước xôn xao, gợn sóng không ngừng. Trong khi đó, trước kia, học sinh của cô chỉ im lặng, cúi đầu, lảng tránh câu hỏi của cô giáo.



Đồ thị hàm số $y = 4x - 2$.

3. Một bài "không khó nhưng mà hay".

Đây là một thử thách với cô Tâm. Vì lâu nay cô vẫn nghĩ rằng chỉ những bài toán khó mới là bài toán hay. Thế nên cô nói, cuộc đời cô cũng giống như hầu hết các giáo viên khác không thể gọi là hạnh phúc được vì chẳng bao giờ có cơ hội dạy học sinh giỏi toán, để cho chúng những bài toán hay.

Khi cô đọc ví dụ về một bài toán có nhiều đáp án, cô rất ngạc nhiên. Chẳng hạn là bài toán này: "Một bộ bàn liền ghế dùng cho học sinh ngồi học có chiều dài là 1,2m và chiều rộng là 0,8m. Kê những bộ bàn ghế trên vào trong một phòng học hình chữ nhật có chiều rộng 6m và chiều dài 8m. Số học sinh mỗi lớp khoảng 45 em.

Câu hỏi: Có thể kê được bao nhiêu bộ bàn ghế? Lựa chọn trong các đáp án sau:

A. 50; B. 40; C. 28; D. 20."

Hình ảnh chiếc bàn học

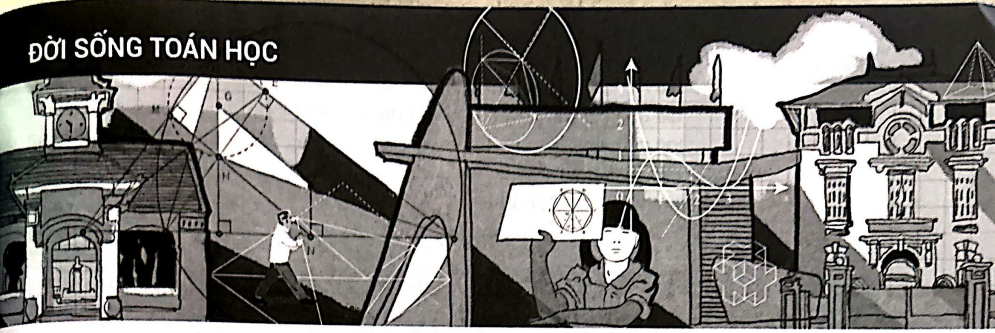
Đáp án A cũng đúng nếu chỉ áp dụng công thức diện tích toàn phần (của phòng học) chia cho diện tích mà cái bàn chiếm chỗ.

Đáp án B cũng được chấp nhận, bởi lớp có 45 em học sinh nên có 40 cái bàn cũng là hợp lý. Khi ấy sẽ kê 4 dãy bàn, mỗi dãy có 10 bàn.

Đáp án C có vẻ phù hợp nhất, vì còn phải bớt chỗ đi lại, chỗ bục giáo viên, và bình thường, bàn này có thể ngồi 2 người/ bàn.

Cô Tâm đem bài này đố học sinh. Quả thực, học sinh của cô đã không chọn một đáp án. Chúng còn hăng say "cãi nhau" vì sao đáp án của mình đúng. Nhìn bộ mặt tiu nghỉu của học sinh chọn đáp án A cô Tâm lại tủm tỉm cười. Cô bảo, đúng là không ai kê bàn choán hết cả phòng học như thế, vì giáo viên sẽ dạy ở đâu, bảng kê ở đâu. Nhưng cô vẫn cho em điểm, vì đã áp dụng đúng công thức.

Tình huống này làm cô thấy rất vui. Hóa ra không phải áp dụng đúng công thức là được. Trong tình huống này, sự am hiểu thực tế mới là đáp án phù hợp nhất. Bài toán này không hề khó, mà lại hay như vậy đấy.



GIAO LƯU CỦA BBT PI VỚI HỌC SINH VÀ GIÁO VIÊN PHÚ YÊN

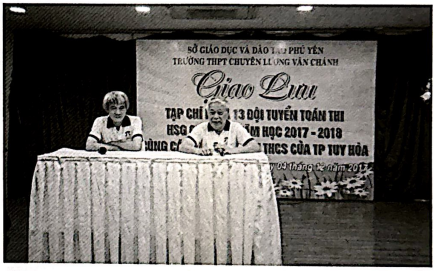
Ngày 4/12/2017, tại trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên, Tạp chí Pi đã có buổi giao lưu cùng học sinh và giáo viên Phú Yên, và 13 đội tuyển Toán của các Tỉnh về dự Trường Đông Toán học tại Phú Yên.

Đại diện lãnh đạo Trường Lương Văn Chánh và Sở GD và ĐT Phú Yên đã tới dự.

Tổng biên tập Hà Huy Khoái, Phó Tổng biên tập Nguyễn Khắc Minh giới thiệu về Tạp chí Pi và trả lời các câu hỏi của những người tham dự. Qua trình bày của đại diện BBT Pi, mọi người nhận ra rằng, Pi không chỉ dành cho THPT hoặc sinh viên, mà có ích cho nhiều đối tượng, từ học sinh Tiểu học đến giáo viên Toán. Đặc biệt, giáo viên và học sinh chia sẻ quan niệm của Pi là: không nên để hết thời gian vàng của tuổi trẻ cho một mục tiêu có phần ngắn hạn – đỗ đại học với số điểm cao. Tuổi trẻ là thời gian quý giá nhất để nuôi dưỡng cho mình lòng say mê khoa học và sáng tạo, điều cần thiết cho bất kỳ ai, dù sẽ làm việc ở lĩnh vực nào. Lãng mạn là vốn quý mà Tạo hoá ban cho tuổi trẻ, và những người thành công chính là những người giữ được vốn quý ấy đến tuổi già! Trên tinh thần đó, Pi mong muốn đưa đến cho các bạn trẻ không chỉ những bài tập hay, mà trước hết là tình yêu cái đẹp trong Toán học và Khoa học nói chung.

Quang cảnh buổi giao lưu

Buổi giao lưu sôi nổi hẳn lên khi những người tham gia cùng suy nghĩ, thảo luận để làm một bài đã có trong mục Quán Toán.



TBT Hà Huy Khoái và PTTB Nguyễn Khắc Minh tại buổi giao lưu.

Lãnh đạo Sở GD và ĐT Phú Yên phát biểu nhấn mạnh rằng, Tạp chí Pi quả thật rất có ích cho học sinh và giáo viên, và mong muốn Pi sẽ ngày càng được phổ biến nhiều hơn trong các trường phổ thông.

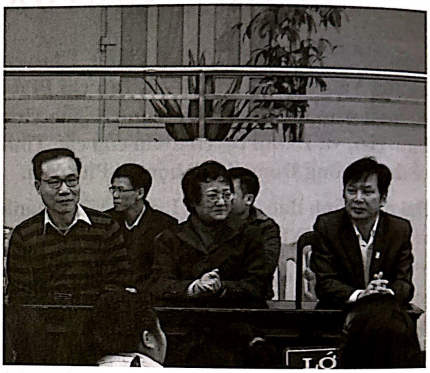
Buổi giao lưu kết thúc trong không khí vui vẻ, thân mật. Người nói cũng như người nghe đều có chút bất ngờ. Với người nghe thì: không nghĩ rằng Pi có thể gần gũi, và "dễ hiểu" như thế. Với người nói: không nghĩ rằng còn quá nhiều người chưa biết đến Pi như thế!

Bài học cho Ban biên tập Pi: phải đi nhiều hơn nữa, để có dịp làm cho mọi người hiểu hơn về Pi,

và để hiểu hơn về những nguyện vọng, yêu cầu mà độc giả đặt ra cho Pi. Đã qua cái thời "hữu xạ tự nhiên hương". Cần học cái anh chàng mà có cái áo mới cũng phải ra đứng ngoài đường, để có ai hỏi về con lợn chạy qua thì tranh thủ khoe! Nhân dịp này, Ban Tổ chức Trường Đông tặng hơn 100 áo Pi cho học sinh và giáo viên, với hy vọng những cái áo đó sẽ làm nhiều con đường đẹp thêm khi... có con lợn chạy qua!

ĐẠI DIỆN BBT PI GẶP GỠ GIÁO VIÊN, HỌC SINH TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI BÌNH VÀ THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH

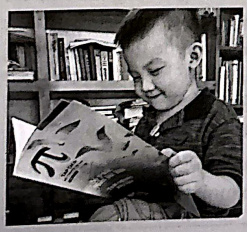
Ngày 23/12/2017, Chương trình Nuôi dưỡng nhân tài và Báo Phụ nữ Việt Nam đã có chuyến thăm và trao học bổng cho học sinh giỏi quốc gia tại hai trường nêu trên. Phó Tổng biên tập Tạp chí Pi Nguyễn Thị Lê Hương đã tham gia đoàn, chứng kiến lễ trao học bổng tiếng Anh của tổ chức SUMMIT và tặng quà của tổ chức Education First cho một số học sinh giỏi quốc gia của các trường; dự tọa đàm về định hướng nghề nghiệp và du học. Bà Hương đã thay mặt BBT Tạp chí Pi trao tặng trọn bộ Tạp chí Pi tập 1 năm 2017 cho thư viện của các trường; giới thiệu về Tạp chí Pi, về một số chuyên mục của tạp chí, khuyến khích các em tham gia gửi bài, giải toán cũng như tham gia kỳ thi Cùng Pi giải toán sẽ khởi động từ tháng 1/2018.



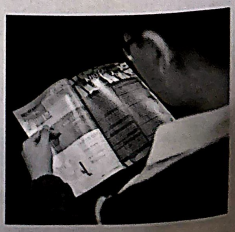
Tại trường THPT chuyên Thái Bình.

Thầy Bùi Tuấn Anh, Phó hiệu trưởng phụ trách trường THPT chuyên Thái Bình nhận quà tặng từ đại diện BBT Tạp chí Pi.

Cuộc tọa đàm đã giúp các em hiểu hơn và đến gần với Pi hơn cũng như giúp Pi hiểu hơn và đến gần với độc giả của Pi hơn. Cuộc gặp gỡ kết thúc với sự hào hứng và những dự định của thầy và trò về một số hoạt động sắp tới nhằm tìm hiểu và đưa Pi vào trong hoạt động dạy và học ở nhà trường.



Pi với bạn đọc nhỏ tuổi...



...và học sinh trung học

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
Đường Đại Cồ Việt, Phường Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội
Email gửi bài: *bbt@pi.edu.vn*. **Email giao dịch:** *info@pi.edu.vn*
Điện thoại: (024) 3215.1407 Fax: (024) 3623.1543
Website: *www.pi.edu.vn*

Chế bản: Lê Quốc Tuấn
Đồ họa: Nguyên Trần, Đoàn Xuân Trường
Ảnh bìa 1: Tập Mandelbrot (xem bài về Fractal trang 3). *Nguồn ảnh: Internet*

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 25.000 đồng

π JOURNAL

facebook.com/pijournal

8 938514 372134 00118

Giá: 25.000 đồng
www.pi.edu.vn