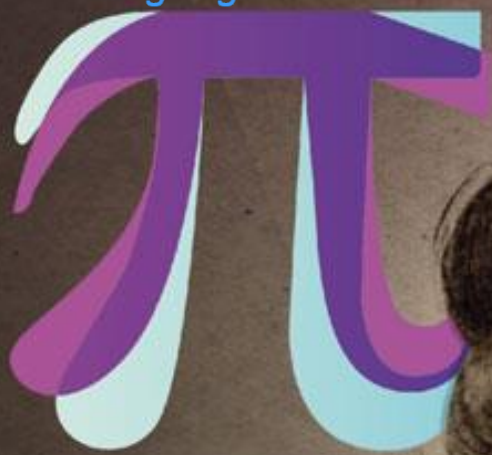




TẠP CHÍ CỦA
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

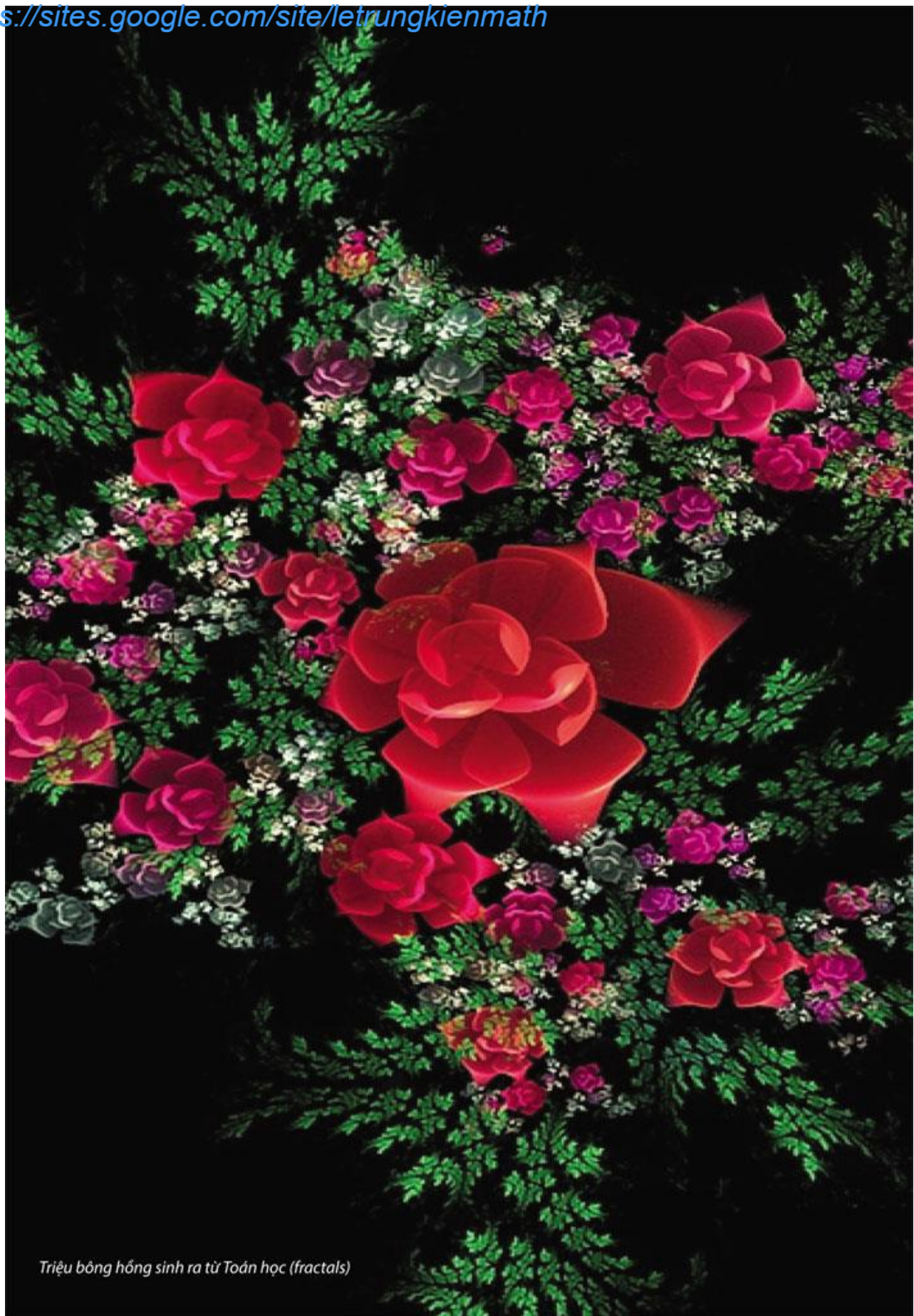
TẬP 1 - SỐ 2

THÁNG 2, 2017

Ánh sáng
trong
THIÊN VĂN HỌC

Bàn về một phương pháp
TÀNG HÌNH

Phụ
nữ & **TOÁN
HỌC**



Triệu bông hồng sinh ra từ Toán học (fractals)

PHỤ NỮ VÀ TOÁN HỌC

Pi số 2 đến tay bạn khi ngày Phụ nữ Quốc tế 8/3 đã cận kề. Cũng như bạn, Pi đang loay hoay tìm món quà gì đó để tặng bạn gái. Mà so với bạn thì Pi gặp khó khăn hơn, vì số bạn gái của Pi lớn hơn của bạn rất nhiều!

Là nhà Toán học, Pi không có quà gì khác ngoài Toán học! Bởi thế, món quà của Pi dành cho các bạn gái hôm nay sẽ là những câu chuyện về các nhà toán học nữ, trên thế giới và ở Việt Nam, từ ngày xưa và cả bây giờ.

Vẫn còn không ít người cho rằng Toán học không phải là môn khoa học thích hợp với phụ nữ. Nếu như Giải thưởng Fields năm 2014 của nhà toán học nữ Maryam Mirzakhani chưa đủ sức thuyết phục các bạn, thì Pi sẽ cùng các bạn ngược dòng lịch sử, để thấy không phải chỉ ngày nay, mà từ ngàn xưa, phụ nữ đã có những đóng góp lớn lao cho Toán học. Không thể viết quá nhiều, Pi chỉ nhắc đến ba nhà toán học nữ tiêu biểu:

- Hypatia thành Alexandria.
- Emmy Noether.
- Kovalevskaja.

Cũng trong số này, các bạn sẽ có dịp trò chuyện cùng Giáo sư Hoàng Xuân Sính, nhà toán học nữ đầu tiên của Việt Nam.

Để thành công trong Toán học, ngoài niềm say mê, năng lực suy luận logic, còn cần đến tâm hồn lãng mạn, luôn hướng đến những vẻ đẹp có thể là khó nhận ra trong đời thường. Những phẩm chất ấy đều là thế mạnh của Phụ nữ.

Nhân ngày Phụ nữ Quốc tế, Pi xin chúc các bạn nữ luôn tràn đầy niềm vui, tràn đầy tình yêu cuộc sống và tình yêu Toán học.

Trong số này:

Phụ nữ và Toán học

Toán học từ cổ điển đến hiện đại

Toán học - sáng tạo (invention) hay phát hiện (discovery)

Cao Chi

Toán học và Đời sống

Chữ ký số - Một ứng dụng độc đáo của mã hóa phi đối xứng

Phạm Huy Điển

Bàn về một phương pháp tàng hình

Hoài Minh Nguyễn

Giải toán cùng bạn

Dĩ bất biến, ứng vạn biến

Hà Huy Khoái

Thách thức Toán học

Lịch sử Toán học

Những phụ nữ kiệt xuất của Toán học

Nguyễn Thị Nhung và Phan Thanh Hồng (sưu tầm và biên soạn)

Đường vào Toán học

Giải toán và nghiên cứu toán

Vũ Hà Văn

Classification of coarse-grained steady Euler flows

Toan T. Nguyễn

Đối thoại Toán học

Làm toán là một trong những hành trình hạnh phúc của người phụ nữ

Thư Hiền (thực hiện)

Góc STEM

INTEL ISEF

Đỗ Hoàng Sơn (thực hiện)

Trạm thiên văn

Ánh sáng trong thiên văn học: khám phá và ghi nhận

Phạm Ngọc Diệp

Quán Toán

Toán của Bì

Điểm sách

Tình yêu và Toán học

Ngô Bảo Châu



TOÁN HỌC – SÁNG TẠO (invention) hay PHÁT HIỆN (discovery)

Cao Chi

Các khái niệm toán học vốn được phát triển vì những lý do trừu tượng, tại sao lại giải thích được các hiện tượng thực tại? Theo nhà vật lý Eugene Wigner thì tiềm năng công dụng của toán học là một món quà kỳ diệu mà chúng ta vừa không thấu hiểu, lại vừa xứng đáng được thừa hưởng. Câu hỏi thách đố là: Toán học là một sáng tạo (invention - một tạo dựng của trí óc con người) hay đó là một phát hiện (discovery - một điều tồn tại độc lập với chúng ta)? [1]

Toán học được *sáng tạo (invented)* hay được *phát hiện (discovered)*? Nhà vật lý thiên văn Mario Livio gợi ý rằng, câu trả lời cho câu hỏi đặt ra từ nghìn năm nay là cả hai.

Đa số chúng ta có niềm tin rằng Toán học hoạt động có hiệu quả, các nhà khoa học có thể thiết lập những công thức mô tả các hiện tượng của thế giới vi mô hoặc các kỹ sư có thể tính được quỹ đạo các phi thuyền không gian. Chúng ta chấp nhận quan điểm, ban đầu đưa ra bởi Galileo, rằng Toán học là ngôn ngữ của khoa học và hy vọng rằng ngữ pháp của nó giải thích được các kết quả thực nghiệm, thậm chí tiên đoán các hiện tượng mới. Sức mạnh của Toán học quả là một điều gây ngạc nhiên. Hãy lấy ví dụ: nhà vật lý Scotland James Clerk Maxwell đã thiết lập những phương trình nổi tiếng, không những thu tóm được mọi hiện tượng điện từ đã được biết cho đến năm 1860, mà còn tiên đoán được sự tồn tại các sóng radio, hai thập kỷ trước khi nhà vật lý người Đức Heinrich

Hertz tìm ra. Ít có lý thuyết nào khúc chiết và chính xác đến như vậy.

Albert Einstein nói: *Tại sao Toán học, một sản phẩm của tư duy con người, vốn độc lập với thực nghiệm lại có thể phù hợp tuyệt vời với các đối tượng của thực tại vật lý?*

Mario Livio đã đối diện trên từng bước đường nghiên cứu với một điều rất khó hiểu, đó là “*hiệu quả khó lý giải của Toán học (unreasonable effectiveness of mathematics)*”, như nhà vật lý giải Nobel Eugene Wigner nói đến vào năm 1960. Livio nghiên cứu các hệ sao tiền bối sinh ra các siêu tân tinh loại Ia (supernovae type Ia) và tính toán số phận Trái đất khi Mặt trời cuối cùng biến thành một sao khổng lồ đỏ, các công cụ và các mô hình sử dụng đều là toán học. Con đường lạ lùng, khó hiểu để Toán học nắm bắt được thế giới khách quan đã làm Livio kinh ngạc suốt cuộc đời nghiên cứu, và trong khoảng

10 năm, Livio quyết định đi sâu vào vấn đề này một cách sâu sắc hơn.

Cốt lõi của sự bí ẩn này là vấn đề mà nhiều thế kỷ nay các nhà toán học, vật lý học, triết học và các nhà khoa học nhận thức luận trần trở: *Phải chăng Toán học là một tập các công cụ sáng tạo như Einstein nghĩ? Hay Toán học là một thực tại trừu tượng thật sự tồn tại mà con người chỉ phát hiện ra các chân lý của nó?*

Nhiều nhà toán học lớn như David Hilbert, Georg Cantor và nhóm Nicolas Bourbaki chia sẻ quan điểm của Einstein, họ gắn liền với trường phái tư duy gọi là trường phái Hình thức (Formalism). Song nhiều nhà tư tưởng nổi tiếng khác, trong đó có Godfrey Harold Hardy, Roger Penrose và Kurt Godel, lại theo quan điểm ngược lại, là luận điểm Platonism [2].

Cuộc tranh luận về bản chất của Toán học đang tiếp diễn sôi nổi hiện nay. Livio nghĩ rằng khi đặt câu hỏi là Toán học được sáng tạo hay phát hiện, chúng ta đã quên mất khả năng của câu trả lời phức tạp và toàn diện hơn: *cả sáng tạo lẫn phát hiện đều đóng vai trò cốt yếu*. Livio tích hợp hai mệnh đề đó để tìm hiểu vì sao Toán học hoạt động có hiệu quả. Mặc dầu loại bỏ sự lưỡng phân đó giữa sáng tạo và phát hiện, chúng ta cũng chưa giải thích được hiệu quả của Toán học, bài toán này rất sâu sắc và việc giải quyết một phần cũng đã là tiến bộ lớn.

Sáng tạo và Phát hiện

Toán học đạt đến một hiệu quả khó lý giải (unreasonable) theo hai con đường khác nhau: tích cực và thụ động đối với thực tại.

a/ Ví dụ, khi Isaac Newton thiết lập các phép tính vi phân với mục đích nắm bắt các chuyển động thì đó là những sáng tạo tích cực; nói cách khác, các công cụ được thiết lập theo đơn đặt hàng. Điều đáng ngạc nhiên là chúng ta thu được một độ chính xác quá lớn trong một số trường

hợp. Lấy ví dụ trong QED (Quantum Electrodynamics - Điện động lực học lượng tử), một lý thuyết toán học được phát triển để mô tả tương tác giữa ánh sáng và vật chất. Lúc các nhà vật lý sử dụng QED để tính momen từ của electron, trị số lý thuyết phù hợp với dữ liệu thực nghiệm với độ chính xác đến phần tỷ.

b/ Một điều kỳ diệu khác là các nhà toán học đôi lúc phát triển những lĩnh vực chưa có ứng dụng nào, rồi sau đó nhiều thập kỷ, thậm chí nhiều thế kỷ, các nhà vật lý phát hiện rằng những lĩnh vực đó có ứng dụng trong những quan sát của họ. Những ví dụ về tính hiệu quả thụ động này rất nhiều. Nhà toán học Pháp Evariste Galois đã phát triển lý thuyết nhóm trong những năm 1800 với mục đích xác định tính giải được của các phương trình đa thức. Trong Vật lý thế kỷ 20, lý thuyết nhóm lại trở thành công cụ hữu hiệu không thể thiếu trong việc sắp xếp phân loại các hạt cơ bản - những viên gạch của vật chất. Trong những năm 1960, các nhà vật lý Murray Gell-Mann và Yuval Ne'eman, độc lập với nhau, đã tìm thấy nhóm SU(3) mô tả được các hạt hadron, dẫn đến cơ sở lý thuyết hiện đại về hạt nhân nguyên tử.

c/ Lý thuyết nút (knot theory) [3] là một ví dụ khác về tính hiệu quả thụ động. Những nút toán học giống như những nút thông thường, ngoại trừ chúng không có những đầu nút tự do (xem Hình 1). Năm 1960, Lord Kelvin hy vọng mô tả nguyên tử như những ống nút (knotted tube) ether, song mô hình không thành công. Tuy nhiên các nhà toán học vẫn tiếp tục nghiên cứu lý thuyết nút trong nhiều thập kỷ như một ngành hoàn toàn chuyên sâu của Toán học trừu tượng.

Điều đáng kinh ngạc là hiện tại, lý thuyết nút lại tìm được ứng dụng quan trọng trong LTD (Lý thuyết dây - String theory) [3] & LQG (Hấp dẫn lượng tử vòng - Loop quantum gravity) [4].



Hình 1. Hình ảnh 3 chiều của một nút ba lá (trefoil)

d/ Tương tự như vậy, nhà toán học người Anh Hardy phát hiện trong lý thuyết số một lĩnh vực quan trọng, đó là lý thuyết mật mã, mặc dầu trước đây Hardy đã tuyên bố rằng “chưa ai phát hiện được những mục đích chiến tranh tiềm ẩn trong lý thuyết số”.

e/ Năm 1854, Bernhard Riemann mô tả hình học phi Euclid - một loại hình học kỳ lạ, trong đó các đường song song hoặc cắt nhau hoặc không bao giờ gặp nhau. Hơn nửa thế kỷ sau, Einstein sử dụng các hình học đó để xây dựng lý thuyết tương đối tổng quát.

f/ Hình tượng chồng chất các hình cầu (xem Hình 2) mô tả hình học Fractal (hình ảnh 3D tạo nên bởi một phần mềm mô phỏng). Fractal là một trong những cấu trúc toán học được sáng tạo ra vì những lý do trừu tượng, nhưng lại mô tả được nhiều thực tại (tự đồng dạng ở mọi kích thước).



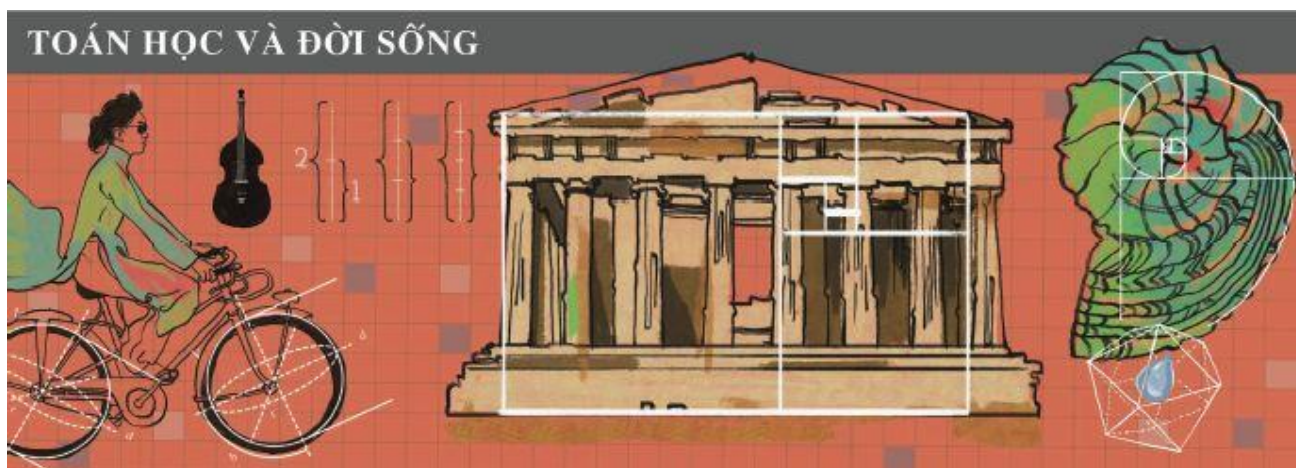
Hình 2. Fractal

Con người sáng tạo ra những khái niệm toán học bằng cách trừu tượng hóa các yếu tố lấy từ thế giới khách quan chung quanh (dạng, đường, tập, nhóm,...) vào những mục đích đặc biệt, thậm chí để vui đùa toán học. Tiếp theo, họ phát hiện ra những mối liên quan giữa những khái niệm đó. Bởi vì quá trình sáng tạo và phát hiện là do con người làm ra (khác với loại phát hiện theo Platonism); Toán học, xét cho cùng, dựa trên những nhận thức của chúng ta và các bức tranh trong trí tưởng (mental) mà chúng ta có thể làm nhiều trò ảo thuật (conjure) với chúng.

Chúng ta có một thiên bẩm nhận biết tức khắc các đối tượng, điều này dẫn đến khái niệm về số. Chúng ta cũng có khả năng nhận biết biên giới các đối tượng riêng lẻ và phân biệt được đường thẳng với đường cong, phân biệt được các dạng hình khác nhau như vòng tròn và ellip – những khả năng đó chắc chắn dẫn đến sự phát triển số học và hình học. Như thế các trải nghiệm lặp đi lặp lại của nguyên nhân và hệ quả, sẽ đóng góp vào việc tạo ra logic và tiếp theo là sự hình thành khái niệm về mệnh đề: một số khẳng định này sẽ dẫn đến sự đúng đắn của những khẳng định khác.

Tài liệu tham khảo và chú thích

- [1] Mario Livio, Why Math Works, Scientific American số tháng 8/2011.
- [2] Platonism: Lý thuyết hiện thực khẳng định rằng các thực thể toán học tồn tại trong thực tế và sự thật toán học độc lập với con người.
- [3] Lý thuyết nút là một lĩnh vực tô pô nghiên cứu các nút toán học.
- [4] LTD = Lý thuyết xem thực thể cơ bản nhất là sợi dây vi mô đóng hoặc hở.



ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG MẬT MÃ VÀ NHỮNG GIẢI PHÁP BẤT NGỜ

(tiếp theo kỳ trước)

Phạm Huy Điển

Phần II. Chữ ký số - Một ứng dụng độc đáo của mã hóa phi đối xứng

Văn bản trên giấy có tính “bước chân đi cấm kỳ trở lại” (những gì đã viết ra thì không thể thay đổi mà không để lại dấu vết), cho nên tự nó có được tính bảo toàn nội dung, không dễ bị “bóp méo” hay “xuyên tạc”. Với văn bản điện tử (VBĐT) thì thuộc tính này không còn nữa, người ta dễ dàng thay đổi nó mà không để lại dấu vết gì. Rõ ràng, với những văn bản cần được ký thì điều này là không thể chấp nhận được. Trước khi đi tìm một giải pháp cho việc ký VBĐT, ta cần tìm hiểu rõ hơn về các thuộc tính của chữ ký truyền thống (trên văn bản giấy).

Ý nghĩa của chữ ký viết tay (trên văn bản giấy)

Một cách lý tưởng thì chữ ký viết tay mang các ý nghĩa và thuộc tính sau đây:

1. Chữ ký là bằng chứng thể hiện người ký tán thành nội dung và có chủ định ký văn bản.
2. Chữ ký thể hiện chủ quyền người ký (cho biết ai là người ký văn bản).
3. Chữ ký không thể tái sử dụng, tức là nó chỉ có hiệu lực trên văn bản đã được ký.
4. Văn bản đã ký là không thể thay đổi được nội dung (việc tẩy xóa, sửa chữa sẽ làm cho nó mất hiệu lực).
5. Chữ ký là không thể chối bỏ và không thể giả mạo (người ký văn bản không

thể phủ nhận việc mình đã ký, còn người khác thì không thể tạo ra chữ ký đó).

Như vậy, để ký một VBĐT người ta cần phải tạo ra một đối tượng có đủ 5 thuộc tính giống như là chữ ký tay trên văn bản giấy (đã nêu ở trên), để sao cho khi VBĐT đi cùng với đối tượng này thì nó sẽ có hiệu lực giống như là văn bản giấy sau khi được ký. Rõ ràng, nếu như ta có đưa được hình ảnh của chữ ký viết tay vào trong VBĐT thì nó cũng không thể có được 5 thuộc tính như đã nêu ở trên (vì người ta dễ dàng sao chép nó từ văn bản này sang văn bản khác, và cũng dễ dàng thay đổi nội dung văn bản mà không để lại dấu vết). Do vậy, với VBĐT cần phải có một giải pháp hoàn toàn khác. Thật bất ngờ là giải pháp cho vấn đề này lại đến từ *mật mã phi đối xứng*, một

công cụ sinh ra vốn để phục vụ cho các văn bản bí mật, chứ không phải là các văn bản mang tính công khai đại chúng.

Giải pháp chữ ký số

Giả sử những người tham gia vào hệ thống (trao đổi thông tin với nhau) có sử dụng một hệ *mật mã phi đối xứng* (như đã giới thiệu trong Phần I của bài viết này, xem trong Số 1). Khi ấy, mỗi cá thể được sở hữu một cặp chìa khóa <*bí mật, công khai*> riêng biệt (không ai giống ai), và người ta có thể đưa ra mô hình ký VBĐT dựa trên ý tưởng của hai nhà khoa học Diffie và Hellman

Mô hình nguyên tắc cho việc ký văn bản điện tử (VBĐT)

- Ông A ký văn bản bằng cách dùng *chìa khóa bí mật* của mình để *mã hoá* nó.
- Ông B kiểm tra chữ ký bằng cách dùng *chìa khóa công khai* của ông A để *giải mã* văn bản. Nếu giải mã thành công thì văn bản đúng là đã được “ký” bởi ông A.

Giao thức này mang đầy đủ các thuộc tính cơ bản của thủ tục ký tay trên giấy, thật vậy:

- “Văn bản được ký” (văn bản mã) là sản phẩm của người đã *chủ động tạo ra* nó, tức là người đã dùng chìa khóa bí mật của mình để mã hoá văn bản.

- “Văn bản được ký” cho biết *người ký là ai* (chính là chủ sở hữu của chiếc *chìa khóa công khai* đã được dùng để kiểm tra chữ ký).

- Chữ ký không thể tái sử dụng cho văn bản khác, vì 2 văn bản khác nhau thì có văn bản mã khác nhau.

- Văn bản đã ký không thể thay đổi được nội dung. Vì nếu “mở ra” (giải mã) để thay đổi nội dung thì không thể “ký lại” (mã hóa) được nữa, do không thể có chiếc *chìa khóa bí mật* của người đã ký trước đó.

- Không ai làm giả được chữ ký, vì rằng không ai có được *chìa khóa bí mật* của người đã “ký” (mã hoá) văn bản đó. Người ký văn bản *không thể thoái thác việc mình đã ký*, vì không còn ai khác có cái chìa khóa đã được dùng để “mã hóa” văn bản đó (kiểm tra bằng chìa khóa công khai).

Những bất cập của mô hình nguyên tắc và công cụ khắc phục

Quy trình ký nêu trên là phù hợp về mặt logic, nhưng cũng có những điều bất cập sau:

- Văn bản sau khi ký luôn ở trong dạng mã hóa, kể cả các văn bản cần công bố công khai, rộng rãi (điều này là không tự nhiên, dễ gây phản cảm).
- Tốc độ “ký” rất chậm (do mã hóa phi đối xứng có tốc độ chậm), sẽ gây “phản cảm” khi cần ký các văn bản dài (như các văn kiện, hợp đồng,...)
- “Chữ ký” là cả “Văn bản ký”, cho nên dài như một văn bản (điều này không giống như thông lệ).

Cho nên, quy trình đã nêu chỉ mang tính nguyên tắc, mà không khả thi trong thực tiễn. Để khắc phục các bất cập và có được một quy trình khả thi, người ta cần đến sự trợ giúp của một công cụ nữa đến từ mật mã, đó là *hàm băm mật mã*.

Hàm băm mật mã nhận giá trị đầu vào là VBĐT (độ dài tùy ý) và cho đầu ra là một *xâu chữ số* có độ dài xác định (tương đối ngắn, khoảng vài trăm ký tự), với các thuộc tính quan trọng như sau:

- Rất “nhạy” đối với các thay đổi của văn bản (Hai văn bản đầu vào khác nhau dù rất nhỏ, chẳng hạn như: dấu cách, dấu chấm, dấu phẩy hay một dấu trong một chữ cái nào đó, thì cũng sẽ có các đầu ra khác biệt rõ rệt).
- Có tính “một chiều”. (Không thể tạo ra văn bản đầu vào khi có đầu ra cho trước).

- **Tốc độ băm rất nhanh:** thời gian tính cho mọi văn bản là không đáng kể.

Việc thiết lập hàm băm có các thuộc tính trên là không đơn giản và là một ngành quan trọng của mật mã học. Ở đây ta không đề cập vấn đề này để tránh cho bài viết trở nên quá dài.

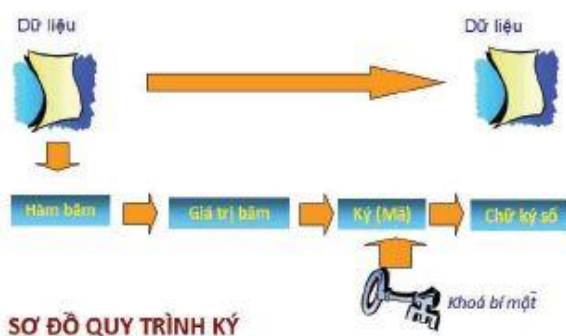
Đầu ra của hàm băm thường được gọi là *mã băm*. Từ các thuộc tính của hàm băm ta suy ra mã băm có tính *đặc trưng rất cao*: một khi văn bản bị thay đổi thì mã băm ắt phải thay đổi, và ngược lại khi thấy mã băm bị thay đổi thì ta biết chắc chắn văn bản đã bị thay đổi. Do vậy mã băm còn được gọi là *đại diện của văn bản*, tương tự như *dấu vân tay* của mỗi người có thể xem là đại diện của con người đó.

Rõ ràng, để đảm bảo rằng nội dung văn bản không bị thay đổi, ta chỉ cần đảm bảo rằng đại diện của nó không bị thay đổi. Do vậy ta có một quy trình ký mới, tương đương với *quy trình nguyên tắc* đã nêu ở trên.

Quy trình ký VBĐT và kiểm tra chữ ký trong thực tế

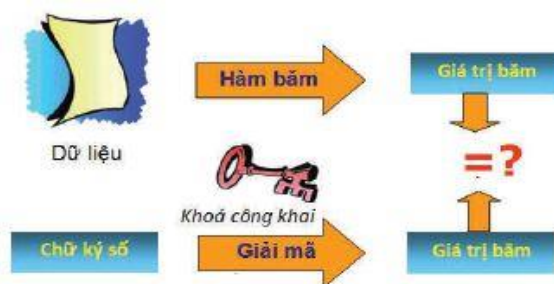
Một cá thể A muốn ký một văn bản P thì cần thực hiện các bước sau đây:

1. Tính *đại diện của văn bản P* (bằng hàm băm mật mã sẵn có trên hệ thống);
2. Dùng *chìa khóa bí mật* của mình để *mã hoá* dãy số *đại diện văn bản* thu được và cho đi kèm với văn bản.



Để kiểm tra chữ ký số của ông A trên văn bản P thì cần tiến hành các bước sau:

1. Tính *đại diện của văn bản P* (bằng hàm băm mật mã có sẵn trên hệ thống);
2. Giải mã *chữ ký số* (bằng chìa khoá công khai của ông A) để có một xâu số rồi so sánh nó với *đại diện của văn bản* tính được ở bước trên. Nếu chúng khớp nhau thì văn bản P đã được ký bởi ông A và nội dung của nó đã không bị thay đổi sau khi ký.



SƠ ĐỒ KIỂM TRA CHỮ KÝ

Để thấy rằng quy trình này khắc phục được các điều bất cập đã nêu, cụ thể là:

- Văn bản sau khi ký không bị mã hóa (mà chỉ được đính thêm một xâu số - *chữ ký số*);
- Thời gian tạo chữ ký là không đáng kể (vì việc lấy mã băm là rất nhanh, và việc mã hóa mã băm cũng nhanh, vì nó rất nhỏ so với văn bản).
- “Chữ ký” chỉ là một xâu chữ số ngắn đi kèm theo văn bản (mà không là cả văn bản);

Khả năng mạo danh bằng cách đánh tráo chìa khóa công khai

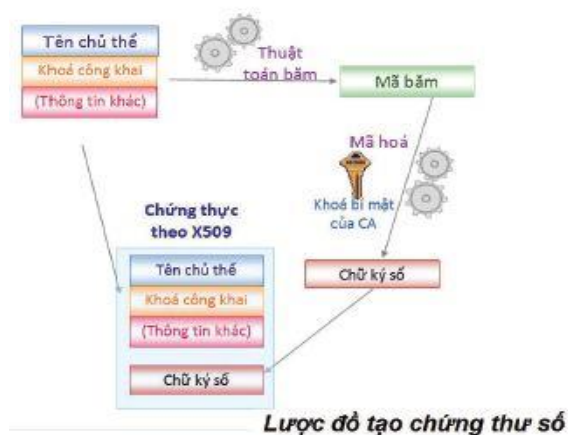
Trong mô hình chữ ký số nêu trên thì chữ ký số được tạo ra bằng *chìa khóa bí mật* của người ký, và được kiểm tra bằng *chìa khóa công khai* của người đó. Như vậy, nếu như kẻ gian có thể thay thế chìa khóa công khai của ông A nào đó bằng chìa khóa của mình thì kẻ đó có thể giả danh ông A một cách hoàn hảo, vì khi ấy mọi văn bản mà

hắn ký sẽ được hiểu là do ông A ký. Khi ấy hệ thống sẽ trở nên hỗn loạn khôn lường, vì kẻ gian có thể đóng vai một nhà lãnh đạo. Để không xảy ra tình trạng này thì phải có giải pháp ngăn chặn việc đánh tráo chìa khóa công khai, tức là xác định chính xác ai sở hữu chìa khóa công khai nào.

Như vậy, vấn đề đặt ra là cần tìm một giải pháp để “gắn kết” một *chìa khóa công khai* với một thực thể, mà kẻ gian không thể nào phá vỡ được. Giải pháp cho vấn đề này đưa ta đến với khái niệm *chứng minh thư điện tử* (chứng minh thư số hay gọi tắt là *chứng thư số*).

Khái niệm chứng thư số

Chứng thư số là cơ chế chứng thực sử dụng chữ ký số để gắn một *chìa khóa công khai* với một thực thể (một cá nhân, một cơ quan, một công ty, một máy chủ, hay một phần mềm dịch vụ,...).



Nội dung một *chứng thư số* luôn bao gồm một *chìa khóa công khai*, một số *thông tin* về thực thể sở hữu chìa khóa đó (tên, địa chỉ, đặc điểm,...), và một *chữ ký số* đảm bảo về mối liên kết của 2 phần thông tin đó. Chữ ký số này thuộc về *cơ quan thẩm quyền phát hành chứng thư số* (Certificate Authority, viết tắt là CA).

Công cụ tạo chứng thư số: Hạ tầng mã hóa khóa công khai

Để tạo ra một chứng thư số, CA phải sinh được một *cặp chìa khóa phi đối xứng* có độ

an toàn cao để gán cho chủ thể (người yêu cầu cấp chứng thư). Quy trình tạo chứng thư được mô tả như trong sơ đồ.

Kiểm tra chứng thư số

Thông tin trên chứng thư số của người dùng (trong đó có chìa khóa công khai) là chính xác nếu như *chữ ký số* ở trong chứng thư đó là chính xác. Đây là chữ ký của CA và để kiểm tra nó thì cần phải có được thông tin chính xác về *chìa khóa công khai của CA*. Thông tin này có trong *chứng thư số của CA* và chứng thư này là luôn sẵn có trên hệ thống, như yêu cầu đặt ra đối với một hệ thống xác thực chuẩn mực.

Những ưu thế vượt trội của chữ ký số và tầm quan trọng của nó

So với chữ ký thông thường (trên văn bản giấy), chữ ký số có những ưu thế vượt trội như:

- Các ý nghĩa và thuộc tính của chữ ký tay (đã nêu ở trên) chỉ mang tính “lý tưởng”, nhưng với chữ ký số thì đã trở thành hiện thực.
- Chữ ký số là *chính xác tuyệt đối* (không còn mối e ngại về việc chữ ký “không giống nhau mỗi lần ký”, như khi phải ký bằng tay);
- Chữ ký số có thể được kiểm định một cách dễ dàng. Mọi sự giả mạo, gian lận vì thế đều bị phát hiện tức khắc. (Trong khi việc kiểm định chữ ký viết tay, con dấu giả,... là không đơn giản và thường đòi hỏi phương tiện kỹ thuật đặc biệt).

Ngày nay, văn bản điện tử đang dần thay thế các văn bản giấy trên mọi bình diện, do tính ưu việt của nó như: tra cứu dễ dàng, lưu trữ thuận tiện (với chi phí thấp) và thuận tiện cho công tác bảo mật, luân chuyển nhanh và an toàn (khó thất lạc), phổ biến dễ dàng, nhanh chóng và rộng khắp,... Cho nên chữ ký số là công cụ không thể thiếu, và là điều kiện tiên quyết cho việc vận hành mọi mô hình Chính phủ

điện tử mà các quốc gia trên thế giới đang hướng tới.

Tầm quan trọng đặc biệt của chữ ký số (và cũng thể hiện tính hơn hẳn của nó so với chữ ký thông thường) là ở chỗ đảm bảo được sự tin tưởng giữa các bên đối tác, ngay cả khi họ hoàn toàn không có lòng tin vào nhau, như trường hợp của Liên Xô và Mỹ trong việc kiểm soát Hiệp ước cấm thử vũ khí hạt nhân mà hai bên đã ký kết trong những năm cuối của thế kỷ trước. Trước khi có công nghệ chữ ký số, việc kiểm soát là vô cùng khó khăn và phức tạp. Khó khăn là ở chỗ bên này không có được thông tin đầy đủ về các vụ nổ mà bên kia tiến hành (trong giới hạn được phép), còn thông tin về các vụ nổ mà bên này cung cấp cho bên kia (dưới dạng các dữ liệu thông tin đo đạc địa chấn) thì lại không được bên kia tin tưởng. Đơn giản là vì bên nào cũng chỉ tin vào thông tin do máy đo của bên mình cung cấp. Khoảng cách xa xôi giữa hai bên không cho phép máy đo đặt bên này có thể đo đạc thông tin các vụ nổ tiến hành trên đất bên kia. Nếu như cho phép bên A đặt máy đo trên đất bên B rồi truyền qua một kênh thông tin an toàn về bên A thì sẽ phát

sinh lo ngại về việc máy có thể đo và cung cấp các thông tin mà bên B không kiểm soát được. Nếu cho phép bên B kiểm soát thông tin kết quả đo thì lại phát sinh lo ngại về việc bên B có thể làm thay đổi thông tin đo trước khi cho truyền về bên A. Chính những khó khăn này đã làm cho công tác kiểm soát của hai bên là vô cùng khó khăn và phức tạp trong những năm đầu (khi chưa có công nghệ chữ ký số). Với công nghệ chữ ký số, việc này đã trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Người ta chỉ cần thêm vào máy đo một chức năng mới là ký số các kết quả đo đạc của chính nó. Khi ấy bên A có thể đặt máy đo trên đất bên B và cho phép bên B xem xét toàn bộ kết quả đo đạc của máy, mà không sợ bên B thay đổi các kết quả này, bởi vì mọi hành vi sửa đổi kết quả đo của bên B (nếu có) sẽ bị lật tẩy bởi chữ ký số (như ta đã biết).

Khả năng tạo niềm tin giữa các bên đối tác (hay đúng hơn là làm cho họ không thể lừa được nhau) của chữ ký số còn được thể hiện rõ nét và rộng rãi hơn trong ứng dụng làm nên tiền mặt mã (như sẽ thấy trong phần tiếp theo của bài báo này).



Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (VIASM) chào đón chuyến viếng thăm và làm việc của các chuyên gia hàng đầu thế giới về mật mã học, trong đó có người đã khai sinh ra hệ mã RSA nổi tiếng (A. Shamir, người đứng giữa) và người đã khai sinh ra mật mã đường cong elliptic (N. Koblitz, người thứ 2 từ bên phải).

BÀN VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP TÀNG HÌNH

Nguyễn Hoài Minh

Bài viết ngắn này bàn về bản chất toán học của phương pháp tàng hình dựa trên phép đối biến. Nguyên lý của phương pháp này khá đơn giản, nó dựa vào việc một số phương trình toán lý là bất biến đối với một phép đối biến. Tuy thế, phương pháp tàng hình này mới chỉ được khám phá gần đây, vào năm 2006, bởi Leonhardt, Pendry, Schurig, và Smith. Một trong những điểm mấu chốt là có một định nghĩa toán học rõ ràng cho khái niệm tàng hình.

Khái niệm tàng hình phụ thuộc vào tập hợp các phép đo của người quan sát. Một miền không gian có thể là tàng hình với tập hợp các phép đo này, mà không tàng hình với tập các phép đo khác.

Định nghĩa: Một miền không gian, hoặc vật thể được giấu trong miền này, được coi là tàng hình đối với một tập các phép đo, nếu người quan sát, chỉ với tập những phép đo này, không thể phát hiện ra vật được giấu cũng như những dụng cụ dùng để giấu nó.

Một chi tiết cần lưu ý trong định nghĩa này là người quan sát không thể phát hiện ra dụng cụ dùng để che giấu và do đó, không thể xác định được một miền không gian hay vật được giấu trong đó. Điểm này rất khác với phương pháp thông thường giấu đi một vật bằng cách đặt vật đó vào trong một cái hộp kín, vì khi đó, người quan sát có thể ý thức rằng có thể có cái gì đó được giấu ở trong hộp.

Bài viết này hạn chế ở tập những phép đo dựa vào sóng âm thanh ở trạng thái tĩnh trong không gian hai chiều. Để miêu tả nó, trước hết, ta cần một vài kí hiệu. Cho

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, đặt $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Ta ký hiệu

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < r\},$$

$$\partial B_r = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = r\} \text{ cho } r > 0,$$

và

$$\mathbb{M}_{2 \times 2} = \{\text{ma trận thực } 2 \times 2\}.$$

Cho $R > 0$ và

$$A = (A_{kl})_{1 \leq k, l \leq 2} : B_R \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$$

có tính chất sau đối với một vài hằng số $\Lambda \geq 1$:

$$1/\Lambda \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq \Lambda \text{ với mọi } \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ sao cho } |\xi| = 1. \quad (1)$$

Cho trước một hàm số f xác định trên B_R , ta quan tâm đến nghiệm u của hệ phương trình (sự tồn tại duy nhất của u được đảm bảo bởi tính chất (1))

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in B_R, \\ u(x) = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases} \quad (2)$$

Ở đây ta hiểu

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{l=1}^2 A_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_l} \right),$$

với $\partial / \partial x_i$ biểu thị đạo hàm riêng theo biến x_i cho $i = 1, 2$; khi $A(x) = I$ (ma trận đơn vị) trong B_R , ta sẽ ký hiệu $\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))$ bởi $\nabla u(x)$.

Hệ (2) miêu tả tính chất truyền sóng (trong trạng thái tĩnh) trong quả cầu B_R , A miêu tả tính chất của môi trường truyền sóng, f là nguồn sóng, và u là sóng tạo ra bởi nguồn sóng f . Người quan sát có thể tạo ra nguồn sóng f và sau đó đo được sóng u tạo bởi nguồn sóng f . Dưới góc nhìn toán học, kết quả của phép đo là giá trị của hàm u ở vị trí quan sát.

Cụ thể hơn, ta sẽ quy ước rằng người quan sát trong một miền không gian $D \subset B_R$ chỉ có thể đo được bằng những phép đo u trong D và những phép đo này chỉ thu được từ f với $f(x) = 0$ đối với $x \in B_R \setminus D$ (người quan sát không thể tạo được nguồn sóng khác 0 ở ngoài miền quan sát).

Bổ đề sau đây khẳng định tính bất biến của hệ phương trình (2) đối với một phép đổi biến.

Bổ đề. Cho $T : B_R \rightarrow B_R$ là một song ánh sao cho T và T^{-1} là Lipschitz trong B_R . Đặt $U = u \circ T^{-1}$. Khi đó u thỏa phương trình

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad x \in B_R \quad (3)$$

nếu và chỉ nếu

$$-\operatorname{div}(T^* A(y)\nabla U(y)) = T^* f(y), \quad y \in B_R. \quad (4)$$

Ở đây

$$T^* A(y) = \frac{\nabla T(x)A(x)\nabla T^T(x)}{|\det \nabla T(x)|}$$
 với $\nabla T^T(x)$ là ma trận chuyển vị của $\nabla T(x)$ và

$$T^* f(y) = \frac{f(x)}{|\det \nabla T(x)|}$$
 với $x = T^{-1}(y)$.

Giả sử $R > 2$ và T có thêm tính chất $T(x) = x$ trong $B_R \setminus B_2$. Khi đó, theo bổ đề,

$$U(x) = u(x) \text{ trong } B_R \setminus B_2.$$

Nói một cách khác, hai môi trường khác nhau A và $T^* A$ cho cùng một tập các phép đo đối với người quan sát bên ngoài B_2 . Đây là điểm mấu chốt đối với phương pháp tàng hình dựa trên phép đổi biến.

Ta sẽ minh họa hiện tượng tàng hình bằng ví dụ cụ thể sau. Giả sử ta muốn làm tàng hình một vật thể bên trong quả cầu đơn vị B_1 , thuộc môi trường được miêu tả bởi ma trận a , đặt trong môi trường thuần nhất được miêu tả bởi ma trận đơn vị I . Chúng ta sẽ xác định ma trận a_c trong miền $B_2 \setminus B_1$ dùng để che giấu ma trận a trong B_1 .

Môi trường lúc này được miêu tả bởi ma trận

$$A_o(x) = \begin{cases} I, & x \in B_R \setminus B_2, \\ a_o(x), & x \in B_2 \setminus B_1, \\ a(x), & x \in B_1. \end{cases}$$

Ma trận a_c được chọn sao cho có hiện tượng tàng hình đối với người quan sát bên ngoài B_2 . Như vậy với phép đo được sử dụng, ta muốn rằng $u_c = u$ trong $B_R \setminus B_2$ với mọi f sao cho $f = 0$ trong B_2 . Ở đây u_c và u là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_o(x)\nabla u_o(x)) = f(x), & x \in B_R, \\ u_o(x) = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f, & x \in B_R, \\ u(x) = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Ta sẽ xây dựng a_c như sau. Gọi $T_\varepsilon : B_R \rightarrow B_R$ ($0 < \varepsilon < 1$) là ánh xạ xác định bởi

$$T_\varepsilon(x) = \begin{cases} x, & x \in B_R \setminus B_2, \\ \left(\frac{1}{2-\varepsilon} + \frac{1-2\varepsilon}{2-\varepsilon} |x|\right) \frac{x}{|x|}, & x \in B_2 \setminus B_\varepsilon, \\ \frac{x}{\varepsilon}, & x \in B_\varepsilon. \end{cases}$$

và đặt

$$A_{o,\varepsilon}(x) = \begin{cases} I, & x \in B_R \setminus B_2, \\ T_\varepsilon^* I(x), & x \in B_2 \setminus B_1, \\ a(x), & x \in B_1, \end{cases}$$

$$A_\varepsilon(x) = \begin{cases} I, & x \in B_R \setminus B_\varepsilon, \\ a(x/\varepsilon), & x \in B_\varepsilon. \end{cases}$$

Từ $T_\varepsilon(x) = x$ trong $B_R \setminus B_2$ và $T_\varepsilon(x) = x/\varepsilon$ trong B_ε , ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng

$$T_\varepsilon^* A_\varepsilon(x) = A_{o,\varepsilon}(x), \quad x \in B_R. \quad (5)$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có một cách hình thức $T_0 A_0 = A_{o,0}$ trong B_R^* với

$$T_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon, \quad A_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon$$

và

$$A_{o,0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{o,\varepsilon},$$

và như vậy theo bổ đề, hai môi trường $A_{c,0}$, và A_0 cho cùng kết quả đo ở vị trí quan sát bên ngoài B_2 . Mặt khác, ta có $A_0 = I$ trong B_R . Thực ra, $A_0 = I$ trong $B_R \setminus \{0\}$, nhưng một điểm (gốc tọa độ) không có hiệu ứng đối với phương trình, nên ta có thể xem như $A_0 = I$ trong B_R . Đây cũng là lý do cho việc sử dụng ánh xạ $T_0: T_0$ biến một điểm (gốc tọa độ) thành miền không gian cần che giấu. Do đó

$A_{c,0}$, và I cho cùng kết quả đo ở vị trí quan sát bên ngoài B_2 . (6)

Miền không gian B_1 (với dụng cụ tàng hình trong B_2 B_1 miêu tả bởi hệ số $a_c = T_0 \cdot I^*$) tàng hình đối với tập các phép đo của chúng ta.

Lý luận ở trên không chặt chẽ bởi vì ta không thể áp dụng bổ đề cho ánh xạ T_0 . Để tìm hiểu hiện tượng này một cách chặt chẽ, ta sẽ xem xét giới hạn của các phép đo bên ngoài B_2 , khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Gọi $u_{c,\varepsilon}$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{o,\varepsilon}(x)\nabla u_{o,\varepsilon}(x)) = f(x), & x \in B_R, \\ u_{o,\varepsilon}(x) = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Tính chất tàng hình (6) được hiểu theo nghĩa sau.

Định lý. Giả sử $f(x) = 0$ trong B_2 . Ta có $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{c,\varepsilon}(x) = u(x)$ trong $B_R \setminus B_2$.

Ý tưởng chứng minh định lý như sau. Đặt $u_\varepsilon(x) = u_{c,\varepsilon}(T_\varepsilon(x))$ trong B_R . Theo bổ đề, u_ε là nghiệm của phương trình

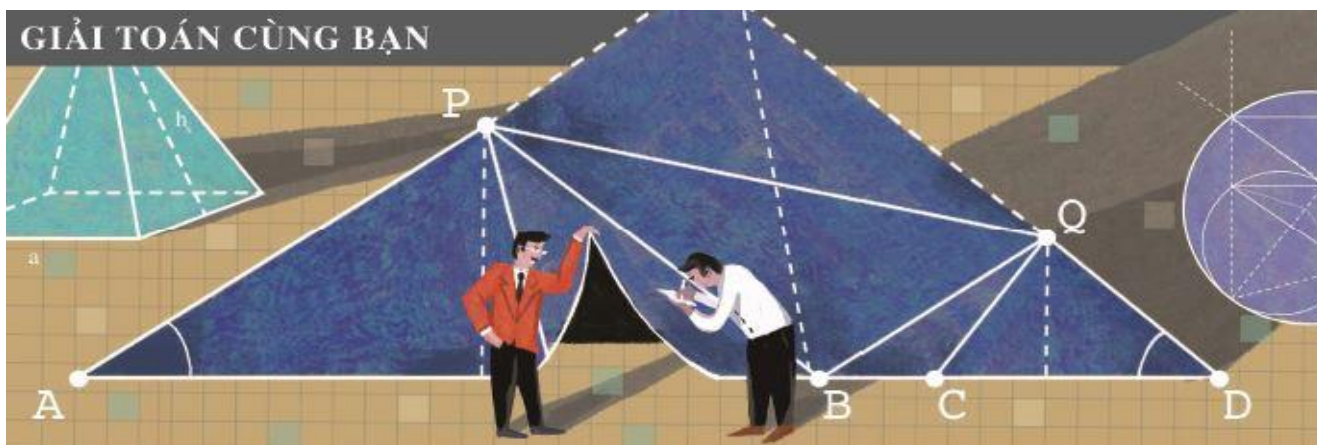
$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x)) = f(x) \text{ trong } B_R.$$

Từ $T_\varepsilon(x) = x$ trong $B_R \setminus B_2$, ta có $u_\varepsilon(x) = u_{c,\varepsilon}(x)$ trong $B_R \setminus B_2$ và do đó $u_\varepsilon(x) = u_{c,\varepsilon}(x) = 0$ trên ∂B_R . Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ trong $B_R \setminus B_2$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Điều này có thể được suy ra từ việc hệ số A_ε của phương trình u_ε chỉ khác hệ số I của phương trình u trong B_ε (một miền nhỏ của không gian) và A_ε bị chặn trong B_ε .

Lời cảm ơn: Tác giả cảm ơn Giáo sư Ngô Bảo Châu đã cho những góp ý về phần trình bày, làm cho bài viết trở nên thân thiện hơn với bạn đọc.



Minh họa: Linh Rab



DỄ BẤT BIẾN, ỨNG VẠN BIẾN

Hà Huy Khoái

Đó là câu nói mà Chủ tịch Hồ Chí Minh dặn cụ Huỳnh Thúc Kháng trước khi lên đường sang Pháp năm 1946, giao trọng trách Quyền Chủ tịch nước cho Cụ Huỳnh. Bất biến ở đây là độc lập dân tộc, trên cơ sở đó mà tìm ra những chính sách mềm dẻo thích hợp với tình hình trong hoàn cảnh đất nước đang ngàn cân treo sợi tóc.

Câu nói trên cũng sẽ là cẩm nang cho chúng ta khi giải một lớp bài toán rời rạc, từ hình học đến số học, mà điều quan trọng nhất là tìm cho ra một “bất biến”. Trong rất nhiều bài toán, ta gặp tình huống sau đây: cho một quy luật biến đổi (một phép toán, một cách sắp xếp, một phép biến hình,...), hỏi khi lặp lại nhiều lần biến đổi đó, ta sẽ đi đến những tình huống nào? Bài toán tổng quát là: từ trạng thái ban đầu, sau hữu hạn lần thực hiện phép toán đã cho, ta có thể đi đến những trạng thái nào?

Ta xét vấn đề nêu trên thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 1. Trên bảng đen, viết 2016 dấu cộng (+) và 2017 dấu trừ (-). Cho phép xoá hai dấu tùy ý và viết thay vào đó dấu cộng nếu hai dấu đã xoá là như nhau, và dấu trừ trong trường hợp ngược lại. Lặp lại phép toán đó 4032 lần, ta còn lại một dấu. Hỏi đó là dấu gì?

Ta hãy xem trong cả quá trình nói trên, có cái gì là bất biến hay không? Tất nhiên để làm toán thì con số vẫn dễ chịu hơn dấu rất nhiều. Ta viết số 1 thay cho mỗi dấu cộng, số -1 thay cho dấu trừ. Khi đó phép toán đã cho tương đương với việc thay hai số tùy ý bằng tích của chúng. Vấn đề bây giờ thật đơn giản. Phép toán của chúng ta không làm thay đổi tích các số đã cho trên bảng. Như vậy, tích các số còn lại trên bảng tại mỗi thời điểm là một bất biến. Ở trạng

thái xuất phát, tích đó bằng -1, vậy dù ta thực hiện phép toán cho phép theo thứ tự thế nào, dấu cuối cùng còn lại trên bảng cũng là dấu trừ.

Trong bài toán trên đây, ta cũng có thể thay mỗi dấu cộng bằng số 0, mỗi dấu trừ bằng số 1. Khi thực hiện phép toán đã cho, tổng của hai số bị xoá cùng tính chẵn lẻ với số thay thế cho hai số đó. Như vậy, tính chẵn lẻ của tổng các số trên bảng trong mỗi thời điểm là một bất biến. Ở trạng thái xuất phát, tổng các số trên bảng là số lẻ. Như vậy, khi trên bảng còn lại một số thì số đó phải là số 1, tức là dấu còn lại chính là dấu trừ.

Cũng có thể giải bài toán trên đây theo cách sau: sau mỗi lần thực hiện phép toán, ta thấy số các dấu trừ hoặc không đổi (nếu xoá hai dấu cộng hoặc xoá hai dấu khác nhau), hoặc giảm đi 2 đơn vị (nếu xoá hai

dấu trừ). Như vậy, tính chẵn lẻ của số các dấu trừ được viết tại mỗi thời điểm là một bất biến. Ở trạng thái ban đầu, số dấu trừ là số lẻ, vì thế khi chỉ còn lại một dấu thì đó là dấu trừ.

Trong ba cách giải trên đây, ta đều dựa vào một bất biến nào đó. Trong cách giải thứ nhất, đó là tính không đổi của tích các số đã viết, cách thứ hai dựa trên sự bất biến của tính chẵn lẻ của tổng các số, cách thứ ba dựa trên sự bất biến của tính chẵn lẻ của số các dấu trừ.

Trong ví dụ trên đây, việc tìm ra bất biến để giải bài toán là khá dễ dàng. Tuy nhiên, không phải bao giờ cũng có thể làm được như vậy.

Ví dụ 2. *Viết vào mỗi ô của một bảng 4×4 một dấu cộng hoặc dấu trừ như trong hình vẽ. Mỗi lần, cho phép đảo ngược tất cả các dấu trong cùng một hàng, trong cùng một cột, hoặc nằm trên một đường bất kỳ song song với một trong hai đường chéo của bảng (đặc biệt, có thể đổi dấu trong các ô ở góc). Có thể hay không, bằng cách thực hiện phép toán trên đây, đưa bảng ban đầu về bảng chỉ gồm các dấu cộng?*

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Cũng như trước, ta thay các dấu cộng bởi số 1, dấu trừ bởi số -1. Rõ ràng tích tất cả các số đã viết, tính chẵn lẻ của số các dấu trừ, tính chẵn lẻ của tổng các số (khi thay dấu cộng bởi số 0, dấu trừ bởi số 1) đều không phải là một bất biến của quá trình thực hiện phép toán. Nhận xét rằng, mặc dù tích của tất cả các số trong bảng không phải là một bất biến, nhưng rất có thể *tích các số nằm trong một nhóm ô cố định nào đó là một bất biến*. Để tìm các ô như vậy, ta cần tìm một tập hợp các ô mà khi thực hiện phép toán cho phép, số ô có thể đổi dấu trong tập hợp này phải là số chẵn. Nói

cách khác, mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường song song với một trong hai đường chéo đều chứa một số chẵn các ô của tập hợp đó. Ý tưởng đó dễ dàng đưa đến việc chọn các ô sau đây:

	x	x	
x			x
x			x
	x	x	

Trong trạng thái xuất phát, tích các số viết trong các ô đã chọn là -1. Vì tích này là một bất biến nên rõ ràng bảng đã cho không thể đưa về trạng thái mà trong ô nào cũng là dấu cộng.

Ví dụ 3. *Bài toán như trong ví dụ 2, nhưng bảng đã cho được thay bằng các bảng sau đây:*

+	+	-	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	-	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	-	+	+

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	-	-	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	-	+	+

Cũng với ý tưởng như trong Ví dụ 2, ta tìm một tập hợp chứa một số chẵn các ô trên mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường song song với đường chéo của bảng; đồng thời, tập

hợp đó, ở trạng thái ban đầu, chứa một số lẻ các ô có dấu trừ.

	*	*	*	*	
*					*
*					*
*					*
*					*
	*	*	*	*	

			*	*	
		*			*
		*			*
			*	*	

Nhận xét: Với cách làm như trên, bạn có thể đặt ra những bài toán tương tự cho các bảng khác nhau. Trong các bài toán trên, chỉ có một số vị trí nào đó của dấu trừ là quan trọng.

Ví dụ 4. *Viết lên bảng một số các số 0, 1 và 2. Lấy hai số khác nhau tùy ý, xoá hai số đó và viết số còn lại (ví dụ, xoá số 0, 1 và viết số 2). Có một người thực hiện liên tiếp phép toán này và cuối cùng chỉ còn một số trên bảng. Chứng minh rằng số còn lại trên bảng không phụ thuộc quá trình thực hiện phép toán đã cho.*

Dĩ nhiên, không phải cách thực hiện phép toán đã cho như thế nào cũng đưa đến kết quả chỉ còn một số trên bảng (có thể xảy ra trạng thái mọi số trên bảng bằng nhau). Trong bài này, ta giả thiết là có một cách thực hiện việc đó. Vấn đề là cần chứng minh rằng, đối với những cách thực hiện phép toán mà trạng thái cuối cùng là còn lại một số thì số đó không phụ thuộc cách thực hiện.

Giả sử x_0, x_1, x_2 lần lượt là số các số 0, 1, 2 đã được viết. Mỗi lần thực hiện phép toán, mỗi số x_i , $i = 0, 1, 2$, hoặc tăng, hoặc giảm một đơn vị, tức là thay đổi tính chẵn lẻ. Khi chỉ còn một số cuối cùng trên bảng, hai

trong các số x_0, x_1, x_2 trở thành 0, số kia trở thành 1. Vậy, ở trạng thái xuất phát, hai trong các số đó cùng tính chẵn lẻ, số kia khác tính chẵn lẻ với chúng. Do đó, không phụ thuộc quá trình thực hiện phép toán, chỉ có một trong ba số x_0, x_1, x_2 trở thành 1; đó là số mà ở trạng thái ban đầu, tính chẵn lẻ của nó khác với tính chẵn lẻ của hai số còn lại.

Lời giải trên đây cũng cho thấy rằng, khi ba số x_0, x_1, x_2 có cùng tính chẵn lẻ thì bằng cách thực hiện phép toán trên đây, không thể đi đến trạng thái chỉ còn một số trên bảng. Tuy nhiên, lời giải trên đây không chỉ ra rằng, điều đó luôn luôn có thể làm được nếu trong ba số x_0, x_1, x_2 có đúng hai số cùng tính chẵn lẻ.

Bây giờ, giả sử ta thay đổi phép toán trong Ví dụ 4: mỗi lần đòi hỏi xoá 4 số, gồm 2 cặp số khác nhau, mỗi cặp gồm 2 số cùng loại, và thay vào đó một số thuộc loại còn lại (ví dụ xoá hai số 0, hai số 1, thay vào đó một số 2). Giả sử sau một số lần thực hiện phép toán như vậy, chỉ còn một số trên bảng. Nếu biết số các số 0, 1, 2 tại thời điểm xuất phát, có thể nói gì về số còn lại trên bảng?

Trong trường hợp này, việc xét tính chẵn lẻ như trước kia không đưa đến kết quả, bởi vì một trong các số x_0, x_1, x_2 thay đổi tính chẵn lẻ sau khi thực hiện phép toán, trong khi hai số kia giữ nguyên tính chẵn lẻ. Do đó, các số ban đầu có tính chẵn lẻ khác nhau có thể sẽ có tính chẵn lẻ như nhau sau một số lần thực hiện phép toán. Để giải bài toán, ta cần tìm một bất biến khác.

Để ý rằng, khi xét tính chẵn lẻ, ta đã xét đồng dư theo modulo 2, tức là dùng đồng dư trong trường hợp đơn giản nhất. Khi việc đó không còn có ích nữa, lẽ tự nhiên là ta tính đến đồng dư tiếp theo: đồng dư theo modulo 3. Rõ ràng, các lớp đồng dư theo modulo 3 của các số $x_1 - x_2, x_1 - x_0, x_2 - x_0$ bất biến trong quá trình thực hiện phép

toán. Như vậy, nếu sau khi thực hiện một số lần phép toán đã cho mà trên bảng còn lại đúng một số thì khi xuất phát, phải có đúng hai số trong các số x_0, x_1, x_2 đồng dư với nhau theo modulo 3. Dễ suy ra số cuối cùng còn lại trên bảng, đó chính là số i mà x_i không đồng dư với hai số còn lại theo modulo 3.

Ví dụ 5. Cho bảng ô vuông 8×8 , trong mỗi ô ta viết một số nguyên. Chọn tùy ý một bảng con kích thước 3×3 hoặc 4×4 rồi cộng thêm 1 vào mỗi số trong các ô của bảng con đã chọn. Xuất phát từ một bảng tùy ý, với việc thực hiện liên tiếp phép toán đó, ta có thể nhận được hay không một bảng mà tất cả các số viết trong các ô đều chia hết cho 3?

Ta dự đoán rằng, phải tồn tại những bảng mà không có cách nào để đưa về bảng thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vì điều kiện duy nhất ở đây là *chia hết cho 3* nên ta cần tìm một tập hợp nào đó các ô mà tổng các số viết tại các ô của tập hợp này có thặng dư modulo 3 bất biến trong quá trình thực hiện phép toán. Nếu tồn tại tập hợp như vậy, ta chỉ cần ghi vào bảng xuất phát các số sao cho tổng các số trong tập đã chọn không chia hết cho 3.

Tập con A các ô sẽ thỏa mãn yêu cầu đặt ra trên đây nếu mỗi bảng con 3×3 hoặc 4×4 chứa 0, 3, 6, 9, 12 hoặc 15 ô của tập hợp A. Từ ý tưởng đó, dễ thấy cách chọn sau thỏa mãn (A là tập các ô được đánh dấu).

X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X

Nhận xét: Số 8 trong bài toán có thể thay bởi $4n, n > 1$.

Ví dụ 6. Với điều kiện như trong Ví dụ 5, xuất phát từ một bảng tùy ý, có thể thu được một bảng gồm toàn số lẻ hay không?

Trong bài toán này, ta chỉ quan tâm đến tính chẵn lẻ; vì thế, ta cần tìm một tập hợp nào đó các ô mà tính chẵn lẻ của tổng các số viết tại các ô của nó là một bất biến trong quá trình thực hiện phép toán. Nếu tồn tại tập hợp như vậy, ta chỉ cần ghi vào bảng xuất phát các số sao cho tổng các số trong các ô đã chọn là một số chẵn.

Như vậy, chỉ cần chọn tập A mà mỗi bảng con 3×3 hoặc 4×4 chứa một số chẵn các ô của

A. Ý tưởng đó giúp ta dễ dàng tìm được tập A (gồm các ô đánh dấu) như sau:

X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X

Nhận xét: Lời giải trên đây đúng cho bảng $n \times m$ tùy ý.

Ví dụ 7. Có 2017 xe ô tô đua xuất phát cùng một lúc từ các vị trí khác nhau dọc theo một đường đua khép kín, và chạy theo cùng một hướng. Theo quy tắc của cuộc đua, các xe có thể vượt nhau, và trong mỗi lần vượt, chỉ có một xe vượt và xe này vượt đúng một xe đang chạy ngay trước nó. Sau một thời gian, các xe trở về vị trí xuất phát của chúng cùng một lúc. Chứng minh rằng trong quá trình chạy, số lần các xe vượt nhau là một số chẵn.

Ở bài toán này, ta phải dùng một phương pháp rất quen thuộc khi giải bài toán rời rạc mà ban đầu các đối tượng là “bình đẳng” (không phân biệt): cần “đánh dấu” một đối tượng nào đó, để căn cứ vào đó

mà lý luận! Trong bài toán trên, do đường đua khép kín nên vị trí của các xe là hoàn toàn bình đẳng. Trước khi các xe xuất phát, ta chọn một xe và “sơn màu vàng” cho nó (để tránh bị chủ xe phản đối, chỉ sơn trong tưởng tượng thôi). Các xe còn lại, lần lượt theo thứ tự đứng sau xe màu vàng, được gán các số $1, 2, \dots, 2016$. Giả sử có một quan sát viên luôn xem xe màu vàng là xe chạy đầu tiên và ghi lại thứ tự các xe chạy sau nó. Mỗi lần có một xe nào đó vượt xe khác, hai số nào đó sẽ đổi chỗ cho nhau. Giả sử tại thời điểm nào đó, có một xe vượt xe màu vàng. Nếu thứ tự các xe (không vàng) trước khi vượt là $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ thì sau khi vượt, thứ tự sẽ là $a_2, a_3, \dots, a_{2016}, a_1$. Phép thế này có thể nhận được nhờ 2015 phép dịch chuyển sau:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2016} &\rightarrow a_2, a_1, a_3, \dots, a_{2016} \rightarrow \\ a_2, a_3, a_1, \dots, a_{2016} &\rightarrow \\ \dots &\rightarrow a_2, a_3, \dots, a_1, a_{2016} \rightarrow a_2, a_3, \dots, a_{2016}, a_1 \end{aligned}$$

Nếu xe màu vàng vượt xe khác thì $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ trở thành $a_{2016}, a_1, \dots, a_{2015}$.

Dễ thấy rằng, phép thế này cũng có thể nhận được nhờ việc thực hiện 2015 phép dịch chuyển.

Tóm lại, bất kỳ một lần vượt nhau nào của hai xe tùy ý cũng tương ứng với một số lẻ các phép dịch chuyển. Tại thời điểm cuối cùng, thứ tự các xe trùng với thứ tự xuất phát, nên tổng số phép dịch chuyển phải là số chẵn (điều này không hiển nhiên, và dành để độc giả tự kiểm tra). Từ đó suy ra số lần các xe vượt nhau phải là số chẵn.

Trong cách giải trên đây, ta đã dựa vào bất biến sau: *tính chẵn lẻ của số phép dịch chuyển ứng với mỗi lần hai xe vượt nhau.*

Một số ví dụ trên đây cho chúng ta làm quen với phương châm “Đĩ bất biến, ứng vạn biến” khi giải một số bài toán rời rạc.



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm (nếu là bài sưu tầm, cần ghi rõ nguồn) và phải được trình bày trong một file riêng đính kèm email (hoặc một tờ giấy riêng).
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng đính kèm email (hoặc một tờ giấy riêng).
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong Chuyên mục “Thách thức kì này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc (hoặc học tập), số điện thoại liên hệ trên trang bài toán, bài giải. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán đề xuất đã gửi cho Chuyên mục không được công bố hoặc gửi đăng ở bất cứ nơi nào khác, khi chưa có sự đồng ý của Tạp chí Pi.

Thách thức kì này

Dành cho cấp THCS

P 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Trên đường thẳng OA , lấy điểm P tùy ý. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB . Xét điểm Q di động trên đoạn thẳng EF . Đường thẳng vuông góc với AQ tại Q cắt PE , PF tương ứng tại M , N . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và gọi D là hình chiếu vuông góc của K trên đường thẳng BC . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Trần Quang Hùng (Hà Nội)

P 22. Xét các số thực x, y, z khác 0. Tìm tất cả các giá trị có thể của biểu thức

$$P = \frac{|x+y|}{|x|+|y|} + \frac{|y+z|}{|y|+|z|} + \frac{|z+x|}{|z|+|x|}.$$

Nguyễn Duy Thái Sơn (Đà Nẵng)

P 23. Bạn Pi ghi lên giấy các số nguyên dương theo quy tắc sau: Lần 1, ghi một số nguyên dương tùy ý; từ lần thứ hai, nếu trên giấy có số a thì được phép ghi thêm các số b mà $a + b + 1$ là ước của $a^2 + b^2 + 1$.

Bạn Pi khẳng định, nếu ở lần đầu tiên bạn ấy ghi số 1 thì bạn ấy có thể ghi lên giấy bất cứ số nguyên dương nào. Hỏi khẳng định của Pi đúng hay sai? Vì sao?

Đỗ Minh Khoa (Hà Nội)

P 24. Tại mỗi đỉnh của một hình lục giác đều cho trước, có một con bướm đậu. Vào cùng một thời điểm, tất cả 6 con bướm cùng bay lên khỏi các đỉnh của lục giác và lại vào cùng một thời điểm, cả 6 con bướm cùng đậu xuống các đỉnh của lục giác đó

một cách tùy ý, sao cho tại mỗi đỉnh chỉ có một con bướm đậu (các con bướm không nhất thiết phải đậu xuống vị trí trước khi bay lên của mình). Chứng minh rằng tồn tại 3 con bướm mà trước khi bay lên, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A, B, C , còn sau khi đậu xuống, chúng đậu tại 3 đỉnh, gọi là A', B', C' , có tính chất: tam giác tạo bởi 3 đỉnh A', B', C' bằng tam giác tạo bởi 3 đỉnh A, B, C .

Nguyễn Khắc Minh (Hà Nội)

Dành cho cấp THPT

P 25. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 5}{x + 1}.$$

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị không thẳng hàng.

b) Gọi A, B, C là ba điểm cực trị nói trên. Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Trần Nam Dũng (TP. Hồ Chí Minh)

P 26. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} + \frac{3}{5abc} \geq \frac{18}{5}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Hoàng Lê Nhật Tùng (Hà Nội)

P 27. Cho số nguyên $n \geq 12$. Cho $P(x)$ là đa thức bậc n , với hệ số nguyên và thỏa mãn

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

điều kiện: tồn tại ít nhất giá trị x nguyên sao cho $P(x) = 1$. Chứng minh rằng không thể phân tích đa thức $P(x)$ thành tích của hai đa thức khác hằng, với hệ số nguyên.

Hà Huy Khoái (Hà Nội)

P 28. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k , tồn tại đa thức $P(x, y)$ bậc k sao cho dãy số $(a_n)_{n \geq 1}$, xác định bởi

$$a_1 = 1, a_2 = 2017 \text{ và}$$

$$a_{n+2} = P(a_n, a_{n+1}) \text{ với mọi } n \geq 1,$$

thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương m , tồn tại số hạng $a_s = 0$ chia hết cho m .

Lê Anh Vinh (Hà Nội)

P 29. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) và không có hai cạnh nào song song. Các tia BA và CD cắt nhau tại P ; các tia AD và BC cắt nhau tại Q . Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên PQ . Gọi (O_1) và (O_2) tương ứng là đường tròn nội tiếp của các tam giác PDA và QDC . Δ là một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) ; Δ tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tương ứng tại M và N . Các tiếp tuyến kẻ từ H tới (O_1) cắt Δ tại X và Y ; các tiếp tuyến kẻ từ H tới (O_2) cắt Δ tại Z và T . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{XM} + \frac{1}{YM} = \frac{1}{ZN} + \frac{1}{TN}.$$

Hạ Vũ Anh (Hà Nội)

P 30. Cho bảng ô vuông kích thước 2016 $\times$ 2017 (bảng gồm 2016 hàng và 2017 cột). Bạn Tí đánh dấu một số ô vuông con của bảng, một cách tùy ý. Chứng minh rằng bạn Tèo có thể đánh dấu thêm không quá 4032 ô vuông con sao cho tổng số ô vuông con được cả hai bạn đánh dấu ở mỗi hàng là một số lẻ và ở mỗi cột là một số chẵn (số ô vuông con mà Tèo đánh dấu có thể bằng 0).

Hà Thanh (Cần Thơ)

Giải bài kì trước

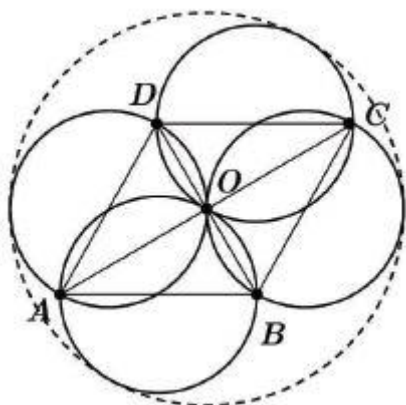
P 2. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn. Gọi $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ lần lượt là các đường tròn đường kính AB, BC, CD, DA .

Chúng minh rằng luôn tồn tại một đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường tròn (C_1) , (C_2) , (C_3) , (C_4)

Lời giải (dựa theo lời giải của tác giả bài toán).

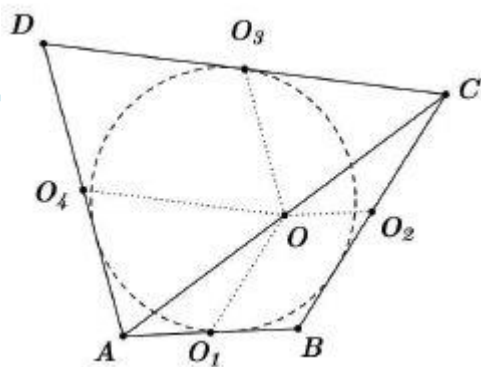
Xét hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1: Tứ giác ABCD là hình thoi.* Gọi O là giao điểm của AC và BD . Dễ dàng chứng minh được đường tròn tâm O , bán kính AB thỏa mãn yêu cầu đề bài (Xem Hình 1).



Hình 1

- *Trường hợp 2: Tứ giác ABCD không là hình thoi.* Khi đó, trong các cạnh AB , BC , CD và DA , tồn tại hai cạnh kề nhau không bằng nhau. Không mất tổng quát, giả sử $AB < BC$. Gọi O_1 , O_2 , O_3 , O_4 và O lần lượt là trung điểm của AB , BC , CD , DA và AC (xem Hình 2).



Hình 2

Đặt $r = \frac{1}{2}(BC - AB)$. Ta có:

$$OO_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB + r;$$

$$OO_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC - r.$$

Suy ra đường tròn (O, r) tiếp xúc ngoài với đường tròn (C_1) và tiếp xúc trong với đường tròn (C_2) . (1)

Do $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp nên $AB + CD = BC + DA$. Suy ra $BC - AB = CD - DA$. Do đó

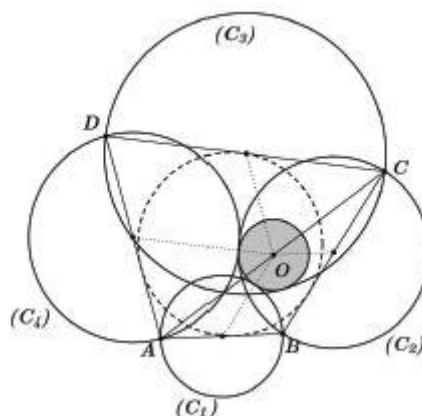
$$r = \frac{1}{2}(CD - DA) \quad \text{Vì vậy, ta có:}$$

$$OO_3 = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}CD - r;$$

$$OO_4 = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}DA + r.$$

Suy ra đường tròn (O, r) tiếp xúc trong với đường tròn (C_3) và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C_4) . (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường tròn (O, r) thỏa mãn yêu cầu đề bài (xem Hình 3).



Hình 3

Nhận xét. Tính đến thời điểm hoàn thiện bản thảo, Tòa soạn nhận được đúng một lời giải đúng cho bài đã ra; đó là lời giải của tác giả bài toán.

Hạ Vũ Anh

P 5. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực dương m sao cho biểu thức

$$P_m(x, y, z) = \frac{1}{m+x+y} + \frac{1}{m+y+z} + \frac{1}{m+z+x}$$

có giá trị lớn nhất.

Lời giải (dựa theo lời giải của tác giả bài toán).

- Xét $0 < m < 1/3$. Đặt $a = x + y$, $b = y + z$ và $c = z + x$. Khi đó, ta có

$$P_m(x, y, z) = \frac{ab + bc + ca + m(a + b + c) + 3m^2}{abc + m(ab + bc + ca) + m^2(a + b + c) + m^3}.$$

Lại có

$$abc = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \geq \frac{8}{27},$$

do

$$xyz \leq \frac{(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})^3}{27} = \frac{1}{27};$$

$$xy + yz + zx \geq \frac{(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})^2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1.$$

Suy ra $mP_m(x, y, z) < 1$ (vì với $0 < m < 1/3$ thì $2m^3 < 8/27$), hay

$$P_m(x, y, z) < \frac{1}{m}. \quad (1)$$

$$z = \frac{(1-a)^2}{4a}$$

Nhận thấy, các số $x = y = a$ và (a là một số thực dương tùy ý) thỏa mãn điều kiện đề bài và

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P_m \left(a, a, \frac{(1-a)^2}{4a} \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{m+2a} + \frac{4a}{5a^2 + 2a(m-1) + 1} \right) = \frac{1}{m}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $P_m(x, y, z)$ không có giá trị lớn nhất.

- Xét $m \geq 1/3$. Đặt

$$T = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2.$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki cho hai bộ 4 số không âm, ta có

$$\left[x + y + \frac{1}{3} + \left(m - \frac{1}{3} \right) \right] \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + z + \frac{1}{3} \left(m - \frac{1}{3} \right) T \right] \geq \frac{(3m+2)^2}{27} T,$$

hay

$$(x + y + m) \left(\frac{3z+2}{3} + \frac{3m-1}{9} T \right) \geq \frac{(3m+2)^2}{27} T.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x + y + m} \leq \frac{9(3z+2)}{(3m+2)^2 T} + \frac{3(3m-1)}{(3m+2)^2}.$$

Bằng cách tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{y + z + m} \leq \frac{9(3x+2)}{(3m+2)^2 T} + \frac{3(3m-1)}{(3m+2)^2},$$

$$\frac{1}{z + x + m} \leq \frac{9(3y+2)}{(3m+2)^2 T} + \frac{3(3m-1)}{(3m+2)^2}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức vừa nêu trên, vế với vế, với lưu ý $T = x + y + z + 2$ (do điều kiện nêu trong đề bài), ta được

$$P_m(x, y, z) \leq \frac{27}{(3m+2)^2} + \frac{9(3m-1)}{(3m+2)^2} = \frac{9}{3m+2}.$$

với mọi x, y, z thỏa mãn điều kiện đề bài.

Hơn nữa, các số $x = y = z = 1/3$ thỏa mãn điều kiện đề bài và

$$P_m\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3m+2}.$$

Như vậy, với $m \geq 1/3$, ta có

$$\max P_m(x, y, z) = \frac{9}{3m+2}.$$

- Vậy, tóm lại, biểu thức $P_m(x, y, z)$ có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $m \geq 1/3$.

Nhận xét.

1. Bài toán trên là một bài toán khó đối với học sinh phổ thông, vì “chìa khóa” để giải được bài toán là điểm mốc $1/3$ và để phát hiện được điểm mốc này, cần có một số kiến thức nhất định về hàm nhiều biến.

2. Tính đến thời điểm hoàn thiện bản thảo, Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài toán, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

P 9. Giả sử m là một số nguyên dương. Tập con A của tập hợp các số nguyên dương được gọi là tập m -đầy nếu tổng các phần tử của A không vượt quá m và với mỗi $k = 1, 2, \dots, m$, tồn tại các phần tử phân biệt của A có tổng bằng k . Ví dụ, tập $A = \{1; 2; 3\}$ là một tập 6-đầy. Chứng minh rằng tồn tại các tập m -đầy khi và chỉ khi $m \neq 2, 4, 5, 8, 9$.

Lời giải (dựa theo lời giải của tác giả bài toán).

Trước hết, ta chứng minh Nhận xét sau.

Nhận xét. Xét tập con của tập số nguyên dương

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n : a_1 < a_2 < \dots < a_n\}.$$

$$m = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Đặt Khi đó, A là tập m -đầy nếu

$$a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$$

và chỉ nếu $a_1 = 1$ và với mỗi $i = 2, n$.

Chứng minh.

a/ Giả sử A là tập m -đầy. Khi đó, hiển nhiên phải có $a_1 = 1$. Tiếp theo, nếu $\exists i \in$

$$a_i > \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$$

$\{2, \dots, n\}$ mà thì

$$s = \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1 < m$$

không thể là tổng các phần tử phân biệt của A , trái với tính m -đầy của A . Vì vậy, phải có

$$a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$$

với mỗi $i = 2, n$.

$$a_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1$$

b/ Giả sử $a_1 = 1$ và với

mỗi $i = 2, n$. $\square$ Ta sẽ chứng minh A là tập m -đầy, bằng quy nạp theo n .*

Thật vậy, hiển nhiên ta có điều cần chứng minh khi $n = 1$. Giả sử ta đã có điều cần chứng minh khi $n = k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 2$).

Xét tập

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k : a_1 < a_2 < \dots < a_k\}.$$

Hiển nhiên, tập $B = A \setminus \{a_k\}$ thỏa mãn điều kiện $\square$. Vì vậy, theo giả thiết quy nạp, B là

$$m' = \sum_{i=1}^{k-1} a_i.$$

tập m' -đầy, với Do đó, với mỗi số s , mà $1 \leq s \leq m'$, đều tồn tại các phần tử phân biệt của A có tổng bằng s *. (1)

Xét s , mà $m' + 1 \leq s \leq m$. Do $a_k \leq m' + 1$ (theo (1)) nên $s \geq a_k$. Do đó, s có dạng $s = a_k + a$, với $a \in \mathbb{N}$ và $a \leq m'$ (vì $s \leq m = m' + a_k$). Nếu $a = 0$ thì $s = a_k$. Trường hợp $a \geq 1$, do $a \leq m'$ và do B là tập m' -đầy nên phải tồn tại các phần tử phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_r \in B$ (cũng tức là thuộc A) sao cho $a = a_1 + a_2 + \dots + a_r$. Do đó $s = a_1 + a_2 + \dots + a_r + a_k$, với $a_1, a_2, \dots, a_r$ và a_k là các phần tử phân biệt thuộc A^* . (2)

Từ (1) và (2), suy ra A là tập m -đầy. Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét được chứng minh.

Ta trở lại bài toán. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy không tồn tại các tập m -đầy khi $m = 2, 4, 5, 8, 9$.

Với $m = 1, 3, 6, 7, 10$, các tập $\{1\}, \{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}$, tương ứng, là tập m -đầy.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nếu có tập m -đầy, với $m \geq 10$, thì sẽ chỉ ra được tập $(m + 1)$ -đầy.

Giả sử $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n : a_1 < a_2 < \dots < a_n\} \subset \mathbb{Z}$ là tập m -đầy, với $m \geq 10$.

Từ định nghĩa tập m -đầy, hiển nhiên suy

ra phải có
$$m = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Tồn tại i sao cho $a_i < a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1$. (3)
- Gọi j là số lớn nhất trong các số i thỏa mãn (3). Ta có $j \geq 3$, vì $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_3 \in \{3; 4\}$.

$$a_n < \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 1$$

Nếu $j = n$, nghĩa là $T = (A \setminus \{a_n\}) \cup \{a_n + 1\}$ là tập có tính chất:

$$\sum_{a \in T} a = m + 1;$$

$$+ a_1 = 1, a_k \leq \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 1 \text{ với mỗi } k = 2, n - 1 \text{ (do } A \text{ là tập } m\text{-đầy) và}$$

$$(a_n + 1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i + 1.$$

Vì vậy, theo Nhận xét, T là tập $(m + 1)$ -đầy.

Xét $3 \leq j < n$. Khi đó, từ định nghĩa của j và theo Nhận xét, ta có

$$a_j < \sum_{i=1}^{j-1} a_i + 1 \text{ và } a_{j+1} = \sum_{i=1}^j a_i + 1.$$

Suy ra $a_{j+1} \neq a_j + 1$. Do đó, với lý do tương tự như ở trường hợp $j = n$, tập

$$T = (A \setminus \{a_j\}) \cup \{a_j + 1\}$$

là tập $(m + 1)$ -đầy.

- Trường hợp 2: Với mọi $i = 2, n$, đều có $a_i \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1$.

Khi đó, do A là tập m -đầy nên theo Nhận xét, ta có

$$a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 1 \text{ với mọi } i = 2, n.$$

$$\text{Suy ra } A = \{1; 2; 4; \dots; 2^{n-1}\} \text{ và } m = 2^n - 1.$$

Do $m \geq 10$ nên $n \geq 4$.

Với $n = 4$, dễ dàng kiểm tra, tập $\{1; 2; 3; 4; 6\}$ là tập 2^4 -đầy.

Giả sử đã có

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_s : b_1 < b_2 < \dots < b_s\}$$

là tập 2^k -đầy ($k \geq 4$). Khi đó, dễ thấy, tập

$$B' = \{1, 2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{s-1}, 2b_s - 1\}$$

là tập 2^{k+1} -đầy.

Từ các lập luận trên suy ra, từ tập A m -đầy ($m \geq 10$) ta có thể xây dựng được tập $(m+1)$ -đầy.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Tính đến thời điểm hoàn thiện bản thảo, Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài toán từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

P 4. Có 100 chú gấu vào rừng hái quả. Chú gấu nhỏ nhất hái được 1 quả, chú gấu tiếp theo hái được 2 quả, chú gấu thứ ba hái được 3 quả, cứ thế cho đến chú gấu lớn nhất hái được 100 quả. Các chú gấu gặp con sói già. Sói đề xuất sẽ giúp chúng chia quả hái được một cách “công bằng”. Sói đưa ra quy trình như sau: Sói sẽ chọn hai chú gấu bất kì, gộp số quả hái được lại và chia đều, nhưng nếu có 1 quả lẻ thì sói sẽ ăn quả đó. Sói sẽ làm như vậy cho đến khi tất cả các chú gấu có số quả bằng nhau. Hỏi sói có thể ăn nhiều nhất bao nhiêu quả?

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Đoàn Hồng Anh (Catherine Đoàn), học sinh lớp 11, trường Bessborough, Canada).

Tổng số quả mà 100 chú gấu hái được là:

$$1 + 2 + \dots + 100 = 5050 \text{ (quả)}.$$

Do khi các chú gấu có số quả bằng nhau, mỗi chú gấu đều có ít nhất một quả nên số quả sói có thể ăn không vượt quá:

$$5050 - 100 = 4950 \text{ (quả)}.$$

Ta sẽ chứng minh sói có cách “ăn chia” để số quả được ăn bằng 4950.

Ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Giả sử có k chú gấu ($k \geq 2$), được đặt tên theo thứ tự từ bé đến lớn bởi “1”, “2”, ..., “ k ”, tương ứng có số quả là 1, 2, ..., k . Khi đó, bằng cách thực hiện quy trình “ăn chia” dưới đây, sói có thể ăn $k-1$ quả và làm cho số quả của các chú gấu “1”, “2”, ..., “ $k-1$ ”, “ k ” tương ứng là 1, 1, 2, ..., $k-2$, $k-1$:

Quy trình “ăn chia” của sói: Với mỗi $t = 1, 2, \dots, k-1$, ở bước thứ t , sói gộp số quả của hai chú gấu “ $k-t+1$ ” và “ $k-t$ ” với nhau, rồi “ăn chia” theo nguyên tắc đã nêu trong đề bài.

Chứng minh. Bằng quy nạp theo t , $1 \leq t \leq k-1$, dễ dàng chứng minh được khẳng định sau:

“Ở mỗi bước của quy trình, sói được ăn 1 quả và sau bước thứ t , số quả của các chú gấu “1”, ..., “ $k-t$ ”, “ $k-t+1$ ”, ..., “ k ” tương ứng là 1, ..., $k-t$, $k-t$, ..., $k-1$ ”.

Từ khẳng định trên, hiển nhiên suy ra kết luận của Nhận xét.

Đặt tên 100 chú gấu, theo thứ tự từ bé đến lớn, bởi “1”, “2”, ..., “100”.

Từ Nhận xét dễ dàng suy ra sói có thể thực hiện việc “ăn chia” theo cách sau:

- Lần 1: Sói thực hiện quy trình “ăn chia” nêu trên đối với 100 chú gấu ($k = 100$);

- Lần 2: Sói thực hiện quy trình cho 99 chú gấu, từ chú gấu “2” đến chú gấu “100” ($k = 99$);

...

- Lần thứ m : Sói thực hiện quy trình cho $100 - m + 1$ chú gấu, từ chú gấu “ m ” đến chú gấu “100” ($k = 100 - m + 1$);

...

- Lần thứ 99: Sói thực hiện quy trình cho 2 chú gấu, chú gấu “99” và chú gấu “100” ($k = 2$).

Bằng quy nạp theo m , $1 \leq m \leq 99$, dễ dàng chứng minh được khẳng định sau:

“Với cách thực hiện quy trình như trên, sau lần thực hiện thứ m , sói sẽ ăn được số quả là $99 + 98 + \dots + (100 - m) + (100 - m + 1)$ (quả) và số quả của 100 chú gấu “1”, “2”, ..., “100” tương ứng là

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{m+1}, 2, 3, \dots, 100 - m.$$

Từ khẳng định vừa nêu suy ra, sau lần thực hiện quy trình thứ 99, số quả của 100

chú gấu cùng bằng 1 và số quả sói ăn được là:

$$99 + 98 + \dots + 2 + 1 = 4950 \text{ (quả)}.$$

Vậy, tóm lại, bằng cách thực hiện đúng quy trình “ăn chia”, sói có thể ăn được tối đa 4950 quả.

Nhận xét. Tính đến thời điểm hoàn thiện bản thảo, Lời giải của bạn Đoàn Hồng Anh là lời giải duy nhất đúng trong số các lời giải mà Tòa soạn nhận được, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh



Minh họa: Phùng Nguyên Quang



NHỮNG PHỤ NỮ KIỆT XUẤT CỦA TOÁN HỌC

Nguyễn Thị Nhung và Phan Thanh Hồng (sưu và tầm và biên soạn)

Hypatia thành Alexandria



Hypatia thành Alexandria được coi là người phụ nữ đầu tiên có đóng góp đáng kể cho sự phát triển của Toán học. Bà là người phụ nữ tài năng và xinh đẹp, một người thầy tôn kính trong lòng học trò. Cuộc đời của bà như một bản anh hùng ca, vượt ra ngoài lĩnh vực học thuật, trở thành nguồn cảm hứng của nhiều tác phẩm văn học và nghệ thuật.

Hypatia sống vào khoảng năm 370 đến 415 sau Công nguyên tại thành Alexandria, Ai cập. Bà là con gái của nhà Toán học và triết học Theon thành Alexandria. Bà được

người cha truyền thụ kiến thức trong mọi lĩnh vực và gửi đi học ở Athen, Hy Lạp, trung tâm Toán học của thế giới thời đó. Sau khi hoàn thành việc học tập và nghiên cứu tại đây, bà đi vòng quanh Châu Âu trong 10 năm. Bà được nuôi dạy với niềm tin rằng mình có thể làm bất cứ thứ gì mình muốn, đây là điều hiếm có đối với một phụ nữ, đặc biệt trong thời kỳ này.

Hypatia không chỉ là nhà nghiên cứu xuất sắc mà còn là một giáo viên tài năng. Khoảng năm 400, Hypatia đứng đầu Trường Neoplatonic ở Alexandria. Tại đó, bà giảng dạy Triết học, Toán học và Thiên văn học, đặc biệt là triết học theo trường phái của Platon. Triết học của Platon dạy rằng "Có một chân lý cuối cùng vượt ra ngoài tầm với của suy nghĩ hay ngôn ngữ. Mục đích của cuộc sống là hướng tới chân lý mà không bao giờ có thể mô tả rõ ràng này". Nhiều người trong số các học trò của bà là những học giả nổi tiếng hoặc sau này trở thành nổi tiếng, như Orestes, Synesius, Socrates. Dựa vào những ghi chép và thư từ còn sót lại của họ, chúng ta có thể thấy được sự ngưỡng mộ và lòng tôn kính mà họ dành cho người thầy của mình.

Không chỉ là nhà triết học và Toán học, Hypatia còn nghiên cứu về thiên văn học. Bà cũng biết cách chế tạo một số dụng cụ thiên văn. Trong những đóng góp cho

Toán học của Hypatia, nổi tiếng nhất là công trình về những đường conic. Bà đã phát triển những ý tưởng về đường conic trong khi biên tập cuốn sách “Về những đường conic của Apollonius”. Ngoài ra, bà còn hỗ trợ cha mình viết những phần bình luận trong cuốn Almagest của Ptolemy.

Bà cũng được cho là đã giúp cha xuất bản phiên bản mới cuốn Cơ sở của Euclid. Theo các ghi chép còn lưu lại, bà là người viết bình luận cho cuốn Số học của Diophantus, những công trình về thiên văn học của Ptolemy. Những bình luận của bà trong các cuốn sách này làm những chủ đề khó hiểu và trừu tượng trở nên dễ hiểu hơn rất nhiều so với bản gốc. Nhờ những đóng góp đó của Hypatia, những cuốn sách nổi tiếng và những tư tưởng quan trọng của Toán học được lưu truyền cho đến nhiều thế kỷ sau.

Năm 412, trong bối cảnh xung đột tôn giáo, chính trị giữa các phe phái ở Alexandria, những người nắm quyền lãnh đạo thành phố vốn có sẵn định kiến với quan điểm triết học của bà và lo sợ sức ảnh hưởng của bà đối với dân chúng đã gán cho bà tội tà giáo và giết hại bà một cách tàn bạo. Sự kiện này được xem là điểm mốc đánh dấu sự suy tàn của trung tâm học thuật cổ đại Alexandria.

Các công trình nghiên cứu của Hypatia đã thất truyền, ngoại trừ một số tiêu đề và trích dẫn về chúng. Tuy nhiên, dựa vào những bằng chứng ít ỏi còn sót lại, có thể khẳng định Hypatia là nhà biên dịch, biên tập và là người bảo tồn xuất sắc những công trình Toán học thuở ban đầu. Ngày nay, bà trở thành một huyền thoại, là nguồn cảm hứng của nhiều tác phẩm hội họa, văn học và điện ảnh.

Emmy Noether

Emmy Noether, tên đầy đủ là Amalie Emmy Noether, là nhà toán học người Đức nổi tiếng vì những đóng góp nền tảng và đột phá trong lĩnh vực đại số trừu tượng

và vật lý lý thuyết. Nhiều nhà khoa học tên tuổi, trong đó có Pavel Alexandrov, Albert Einstein, Jean Dieudonné, Hermann Weyl, Norbert Wiener đánh giá Emmy Noether là một trong những nhà nữ toán học quan trọng nhất trong lịch sử toán học, người



làm nên cuộc cách mạng trong lý thuyết vành, trường và đại số trên một trường. Trong vật lý học, định lý Noether giải thích mối liên hệ sâu sắc giữa tính đối xứng và các định luật bảo toàn, là công cụ cơ bản nhất của vật lý lý thuyết hiện đại.

Emmy Noether sinh ngày 23 tháng 3 năm 1882 trong một gia đình người Do Thái ở thành phố Erlangen vùng Bavaria. Bố của Emmy là Max Noether (1844-1921), có dòng dõi từ gia đình thương gia ở Đức, nhưng theo nghiệp toán học và là giáo sư ở Erlangen. Mẹ của Emmy là Ida Amalia Kaufmann (1852- 1915) xuất thân từ một gia đình thương nhân giàu có ở Cologne. Emmy là chị cả trong gia đình, dưới bà là ba người em trai. Hai người em đầu của bà đều là những nhà khoa học thành danh, riêng người em út vì có sức khỏe không tốt nên phải sống nhiều trong bệnh viện và qua đời khi còn trẻ.

Emmy ngày nhỏ là một cô bé giản dị, thân thiện và dễ thương. Emmy bị cận thị và đôi lúc còn nói ngọng. Mặc dù là người thông minh nhưng Emmy không nổi bật hẳn trong học tập. Tuy nhiên Emmy cũng thể hiện mình là một cô bé rất nhạy bén trong tư duy logic khi có thể nhanh chóng giải được câu đố của giáo viên ở một bữa tiệc cho thiếu nhi. Như đa số các bé gái thời đó, Emmy cũng học nấu ăn, dọn dẹp và học chơi đàn piano. Emmy yêu thích các điệu nhảy và luôn mong ngóng đến những bữa tiệc với bọn trẻ là con của các đồng nghiệp của bố ở trường đại học.

Khi còn học trung học ở Erlangen, Emmy Noether có ý định trở thành giáo viên dạy Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Tuy vậy, Noether đã không trở thành giáo viên dạy ngoại ngữ mà thay vào đó bà chọn một con đường khó khăn hơn là theo học toán tại trường đại học.

Ở Đức thời đó, phụ nữ không được theo học chính thức tại các trường đại học. Muốn được tham dự các khóa học, Noether phải được sự cho phép của các giáo sư giảng dạy. Bà là một trong hai nữ sinh viên trong tổng số 986 sinh viên học ở Đại học Erlangen. Sau khi học ở Erlangen hai năm, bà đến Đại học Göttingen. Ở đây, bà tham dự các bài giảng của nhiều nhà khoa học nổi tiếng như Karl Schwarzschild, các nhà toán học Hermann Minkowski, Felix Klein và David Hilbert.

Năm 1904 khi giới hạn phụ nữ tham gia ở trường đại học bị hủy bỏ hoàn toàn, Noether trở lại Erlangen và quyết định tập trung vào nghiên cứu toán học. Dưới sự hướng dẫn của Paul Gordan bà viết luận án “Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form (Về các hệ bất biến đầy đủ của những dạng bậc bốn ba biến, 1907)”. Mặc dù luận án này được đánh giá cao nhưng Noether sau này nhớ lại và miêu tả luận án là một “mớ hỗn độn”.

Trong bảy năm tiếp theo (1908–1915) bà giảng dạy tại Viện Toán học Đại học Erlangen mà không có lương, và thường đảm nhiệm thay thế cho bố bà khi ông bị ốm. Năm 1910 và 1911 bà công bố nghiên cứu mở rộng luận án từ ba biến thành n biến số.

Vào năm 1911 khi thầy Gordan nghỉ hưu hoàn toàn, Noether gặp người kế nhiệm của ông là Ernst Fischer. Fischer có ảnh hưởng quan trọng tới Noether, đặc biệt khi ông giới thiệu bà đến với những công trình của David Hilbert. Trong những năm 1913-1916, Noether công bố một số bài báo mở rộng và áp dụng phương pháp của

Hilbert cho các đối tượng toán học như trường các hàm hữu tỉ và lý thuyết bất biến của nhóm hữu hạn. Giai đoạn này đánh dấu sự khởi đầu của bà trong lĩnh vực đại số trừu tượng, lĩnh vực mà bà đã có những đóng góp đột phá.

Noether và Fischer thường chia sẻ niềm vui toán học và thảo luận rất lâu về bài giảng sau khi lớp học đã kết thúc. Noether gửi các bưu thiếp đến Fischer nhằm tiếp tục diễn giải các ý tưởng toán học của bà.



Noether đôi khi viết lên bì thư nội dung trao đổi về đại số trừu tượng với đồng nghiệp Ernst Fischer. Bưu thư này đề ngày 10 tháng 4 năm 1915.

Mùa xuân năm 1915, Noether chuyển đến Göttingen theo lời mời của David Hilbert và Felix Klein. Hilbert và Klein muốn những hiểu biết liên quan đến lý thuyết bất biến của bà giúp họ hiểu thuyết tương đối tổng quát, lý thuyết hình học về lực hấp dẫn của Albert Einstein. Hilbert nhận thấy định luật bảo toàn năng lượng dường như bị vi phạm trong thuyết tương đối rộng, do thực tế là năng lượng hấp dẫn tự nó cũng đóng góp vào nguồn của trường hấp dẫn. Ngay khi vừa đến, Noether đã đưa ra cách giải quyết cho nghịch lý này bằng cách chứng minh định lý Noether. Qua định lý này, bà không những đưa ra câu trả lời trong thuyết tương đối tổng quát, mà còn xác định ra những đại lượng bảo toàn cho mọi hệ tuân theo các định luật vật lý có đối xứng liên tục.

Các nhà vật lý Hoa Kỳ Leon M. Lederman và Christopher T. Hill viết trong cuốn sách *Symmetry and the Beautiful Universe* khẳng định rằng: “Định lý Noether là một

trong những định lý toán học quan trọng nhất trong việc định hướng sự phát triển của vật lý hiện đại và có thể sánh ngang hàng với định lý Pythagore”. Einstein khi tiếp nhận công trình của Noether đã viết cho Hilbert: “Hôm qua tôi nhận một bài báo rất tuyệt vời về bất biến từ cô Noether. Tôi rất ấn tượng khi thấy những thứ thế này có thể được hiểu theo cách tổng quát như vậy. Người bảo vệ già ở Göttingen nên được học một số bài học từ cô Noether! Cô ấy dường như có trong tay những bí quyết của mình”.

Trong những năm đầu dạy tại Göttingen, Noether không có một vị trí chính thức nào cũng như không được trả lương, gia đình bà đã trả tiền phòng trọ và ủng hộ sự nghiệp hàn lâm của bà. Các tiết giảng của bà thường để tên Hilbert, và Noether được coi như “người trợ giảng” của ông. Noether luôn sống tiết kiệm và đơn giản, ngay cả sau này bà được trả lương. Bà hầu như không quan tâm tới diện mạo và thời trang. Cháu trai của Mertens, một nhà toán học bà đã quen ở Vienna khi đến giảng bài ở đây, đã tả về bà trong một lần gặp mặt:

... Mặc dù là một người phụ nữ, đối với tôi bà trông như một giáo sĩ công giáo đến từ một miền quê. Bà vận một bộ quần áo màu đen, dài đến mắt cá chân và rất khó tả áo, mũ của đàn ông đội trên mái tóc ngắn của bà... với một chiếc túi đeo chéo ngang vai, bà giống như một người điều khiển xe lửa thời đế quốc.

Khi chiến tranh thế giới lần thứ nhất kết thúc, cuộc cách mạng Đức 1918–19 mang lại sự thay đổi lớn trong quan điểm của xã hội, bao gồm thêm nhiều quyền cho phụ nữ. Noether đã được chính thức giảng dạy tại đại học Göttingen và bà đã bảo vệ thành công luận án habilitation (luận tiến sĩ khoa học) vào cuối tháng 5 năm 1919.

Noether trong đại số bắt đầu vào năm 1920.

Cùng với W. Schmeidler, bà viết một bài báo về lý thuyết các ideal, trong đó định

nghĩa các ideal trái và phải trong một vành. Năm sau đó bà công bố bài báo nổi bật Idealtheorie in Ringbereichen, phân tích các điều kiện dây chuyền tăng dần đối với ideal, trong đó bà đưa ra khái niệm “vành Noether”. Trong lời giới thiệu của quyển sách *Các bài báo của Noether*, Nathan Jacobson đã viết:

Sự phát triển của đại số trừu tượng, một trong những ngành sáng tạo khác biệt nhất của toán học thế kỷ 20, chủ yếu là nhờ bà – trong những bài báo, bài giảng, và ảnh hưởng cá nhân tới những nhà toán học đương thời.

Những năm sau đó, Noether tham gia nghiên cứu với nhiều nhà toán học nổi tiếng, bà đi giảng bài ở nhiều nơi và giúp đỡ nhiều sinh viên cũng như đồng nghiệp phát triển sự nghiệp của mình.

Năm 1932, Emmy Noether và Emil Artin được nhận Giải tưởng niệm Ackermann–Teubner cho những đóng góp cho toán học. Giải thưởng gồm một khoản tiền 500 Reichsmarks, đây là giải thưởng chính thức duy nhất công nhận sự nghiệp toán học của bà. Tháng 11 cùng năm, Noether đọc báo cáo toàn thể tại Đại hội toán học Quốc tế ở Zürich. Hội nghị năm 1932 được coi là thời điểm vinh quang cao nhất trong sự nghiệp của Noether.

Khi chủ nghĩa Phát xít lên nắm quyền ở Đức vào năm 1933, Noether cũng như nhiều giáo sư Do Thái khác bị sa thải khỏi các trường đại học. Mặc dù cuộc sống đã vô cùng khó khăn nhưng bà vẫn rất lạc quan. Trong một bức thư gửi cho Helmut Hasse, bà đã viết:

... mặc dù vậy, tôi phải nói rằng những điều này không tồi tệ với tôi như những người khác. Ít nhất tôi vẫn còn một chút tài sản nhỏ cho phép tôi có thể ngồi lại để nghĩ suy...

Nhiều giáo sư Do Thái thời bấy giờ đã tìm các công việc ở ngoài nước Đức và họ được hỗ trợ nhiều bởi các đồng nghiệp ở Mỹ. Albert Einstein và Hermann Weyl nhận vị trí giáo sư ở Viện Nghiên cứu cao

cấp ở Princeton. Cuối năm 1933, được quỹ Rockefeller tài trợ, Noether sang Mỹ và làm việc ở Bryn Mawr College.

Năm 1934, Noether bắt đầu giảng tại Viện Nghiên cứu cao cấp Princeton thông qua lời mời của Abraham Flexner và Oswald Veblen. Thời gian ở Mỹ là giai đoạn thanh bình đối với Noether, bà được các đồng nghiệp ủng hộ và nghiên cứu các công trình của mình.

Tháng 4 năm 1935, Noether được các bác sĩ phát hiện có một khối u trong xương chậu. Bà đã phải trải qua một cuộc phẫu thuật nhưng không qua khỏi và bà đã mất vào ngày 14 tháng 4 năm 1935. Noether ra đi để lại bao sự tiếc thương của bạn bè và đồng nghiệp trên khắp thế giới. Thi thể bà được hỏa thiêu và tro được rải dưới hành lang của thư viện M. Carey Thomas ở Bryn Mawr.

Trong suốt cuộc đời, Noether luôn sống thật giản dị và khiêm tốn. Mặc dù không được xã hội đương thời thừa nhận những cống hiến to lớn của mình, nhưng ngọn lửa đam mê khoa học không bao giờ tắt trong bà. Ngay cả trong giai đoạn kinh khủng nhất của thời kỳ phát xít, bà vẫn giữ vững tinh thần, vẫn tìm hướng giải quyết những thách thức của toán học. Weyl, trong bài điệu đầy xúc động của mình tại lễ tang của Noether đã viết:

... Bạn đã không tin vào tội ác [...] Trong một biển căm hờn và bạo lực, sợ hãi và tuyệt vọng - bạn đã đi theo cách riêng của mình, suy nghĩ về những thách thức của toán học [...] Khi bạn không được phép sử dụng giảng đường của Viện, bạn đã mở lớp cho sinh viên ở nhà [...] Nhiều người trong chúng tôi đã tin rằng trong bạn sự thù hận sẽ bùng nổ, và sẽ không có sự tha thứ. Nhưng không, tất cả đã không ảnh hưởng gì đến bạn...

Để ghi nhận công lao của Noether, Nhà toán học thiên tài – một trong những nhà nữ toán học lớn nhất trong lịch sử, bà được đặt tên cho nhiều trường học và nhiều giải thưởng. Một con đường ở thị trấn quê hương Erlangen mang tên bà. Ngoài ra, tên bà còn được đặt cho một

miệng núi lửa trên mặt trăng và một tiểu hành tinh.

Sofia Kovalevskaya



Sofia

Kovalevskaya là nhà toán học lớn của Nga, nổi tiếng với nhiều đóng góp quan trọng cho các ngành giải tích, phương trình đạo hàm riêng và cơ học. Kovalevskaya là nữ tiến sĩ Toán

học đầu tiên trên thế giới, cũng là một trong những người phụ nữ đầu tiên tham gia vào ban biên tập của một tạp chí khoa học và nhận chức danh giáo sư tại một trường đại học ở Châu Âu.

Sofia Kovalevskaya sinh ngày 15 tháng 1 năm 1850 tại Moscow, là con thứ hai trong gia đình. Cha và mẹ của bà là những người có học thức trong giới quý tộc Nga, rất chú ý tới việc giáo dục cho con gái của mình, mặc dù việc này không phổ biến trong xã hội thời bấy giờ. Ngoài tiếng mẹ đẻ, Sofia biết tiếng Anh, tiếng Pháp và chơi đàn piano rất giỏi từ thời niên thiếu.

Sofia yêu thích Toán học từ khi còn nhỏ, sau này trong cuốn tự truyện của mình, bà viết “Mặc dù tôi chưa hiểu hết ý nghĩa của những khái niệm (Toán học) này nhưng chúng tác động mạnh mẽ lên trí tưởng tượng của tôi, truyền cho tôi sự tôn kính đối với toán học như một ngành khoa học huyền bí và sôi nổi, môn học đã mở ra một thế giới những điều kỳ diệu, những con người kì diệu”.

Năm 11 tuổi, cô bé Sofia đã lần đầu nghiên cứu về giải tích thông qua những trang giấy chép những bài giảng của Ostrogradski về phép tính vi tích phân dán trên tường nhà, và ngày càng say mê học toán đến nỗi xao nhãng những môn học

khác. Dù bị cha cấm đoán, Sofia vẫn lén mượn sách về đọc vào ban đêm khi cả nhà đã đi ngủ. Một năm sau, trong khi đọc một cuốn sách về Vật lý của giáo sư Tyrtov, người hàng xóm của gia đình, Sofia đã cố gắng để hiểu về các công thức lượng giác trong đó và giải thích theo cách của riêng mình. Giáo sư Tyrtov nhận thấy tài năng của cô bé và đã đề nghị cha của Sofia cho cô đi học sâu hơn về Toán.

Với niềm tin mạnh mẽ vào sức mạnh của giáo dục đối với sự tiến bộ xã hội cũng như sự tiến bộ của phụ nữ, Sofia khao khát được tiếp tục nghiên cứu Toán học ở trường đại học. Do không được sự ủng hộ của cha, Sofia phải chấp nhận một cuộc hôn nhân danh nghĩa với nhà nghiên cứu trẻ về cổ sinh vật học Vladimir Kovalevski để có thể ra nước ngoài học đại học. Thật bất hạnh là cuộc hôn nhân kéo dài 15 năm này mang đến cho Sofia không ít buồn phiền, đau khổ và đã ảnh hưởng không nhỏ đến việc nghiên cứu Toán học của bà.

Năm 1869, Sofia tới Heidelberg để nghiên cứu Toán và Khoa học Tự nhiên. Ở đây cũng như nhiều nơi khác của Châu Âu nữ giới không được phép học đại học. Sofia đã thuyết phục để được tham gia các bài giảng một cách không chính thức với sự cho phép của các giáo sư. Sofia đã hoàn thành ba học kỳ rất thành công, và ngay lập tức thu hút sự chú ý của các giáo viên về khả năng Toán học của mình. Họ đều đã nói về cô như một hiện tượng phi thường.

Năm 1871, Kovalevskaya chuyển tới Berlin để nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của Weierstrass. Sau ba năm, bà hoàn thành ba bài báo khoa học về phương trình đạo hàm riêng, tích phân Abel và Vành Saturn.

Weierstrass đánh giá những bài báo này như luận án Tiến sĩ, trong đó bài báo đầu tiên được công bố trên tạp chí Crelle's Journal năm 1875 đặc biệt nổi bật. Bài báo đưa ra định lý nổi tiếng Cauchy-Kovalevskaya, trong đó chỉ ra được những

điều kiện cho sự tồn tại nghiệm của một lớp những phương trình đạo hàm riêng.

Năm 1874, Kovalevskaya được nhận bằng tiến sĩ của đại học Göttingen. Tuy vậy, mặc dù có sự tiến cử của Weierstrass, bà vẫn không có được vị trí xứng đáng với năng lực vì giới tính của mình. Trong thời gian này Kovalevskaya cay đắng nhận ra rằng công việc tốt nhất bà có thể có tìm được là dạy số học cho các bé gái cấp 1.

Năm 1880, hai năm sau khi sinh con gái, Kovalevskaya nhanh chóng tiếp tục nghiên cứu và hoàn thành ba bài báo về khúc xạ ánh sáng. Trong vài năm sau đó, nhiều chuyện buồn đã xảy ra trong cuộc sống của bà. Toán học trong những lúc này không những chỉ là niềm đam mê mà còn là người bạn ở bên, nâng đỡ và động viên Kovalevskaya vượt qua những khó khăn trong cuộc đời.

Trong thời gian này, nhờ sự giúp đỡ của Mittag-Leffler, bà nhận được vị trí phó giáo sư ở Stockholm, Thụy Điển. Bà bắt đầu giảng dạy tại đây vào đầu năm 1884 và được bổ nhiệm chức danh giáo sư vào tháng 6 năm đó.

Những năm tháng ở Stockholm cũng là thời gian năng động nhất của Kovalevskaya, và ở đó bà đã thực hiện những nghiên cứu quan trọng nhất của mình. Bà giảng dạy về những chủ đề mới nhất, trở thành biên tập viên của tạp chí Acta Mathematica. Bà thường xuyên trao đổi với những nhà toán học ở Paris, Berlin và tham gia tổ chức những hội thảo quốc tế. Bà được nhiều người biết tới và bắt đầu hiện thực hóa những việc mình muốn làm từ thời trẻ, đó là viết hồi ký và viết kịch.

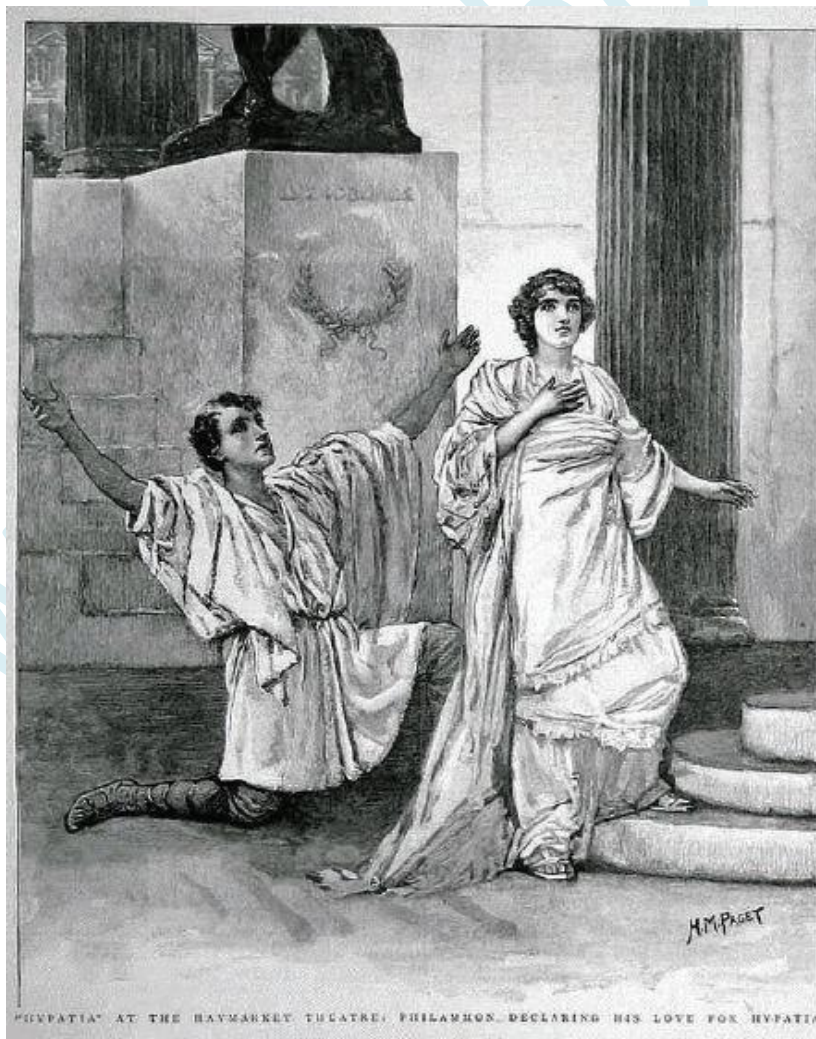
Từ năm 1886 đến 1889, Kovalevskaya liên tiếp gặt hái những giải thưởng, trong đó có giải thưởng Bordin của Viện Hàn lâm khoa học Pháp cho công trình "On the Rotation of a Solid Body about a Fixed Point". Với công trình này bà giải quyết trọn vẹn một bài toán đã được nhiều nhà toán học đặt

ra từ lâu. Quy định của giải thưởng này là tên tác giả của các công trình được niêm phong lại và chỉ mở ra khi xác định được công trình nghiên cứu giành giải thưởng. Hãy tưởng tượng sự ngạc nhiên của ban giám khảo khi biết người giành giải thưởng là một phụ nữ! Đóng góp của công trình đối với Vật lý Toán quan trọng đến nỗi giải thưởng vật chất đã tăng từ 3000 franc lên 5000 franc. Trong bài phát biểu của mình Kovalevskaya nói “Nói những gì bạn biết, làm những gì bạn phải làm và đón nhận những điều có thể”.

Những nghiên cứu sâu hơn về vấn đề này sau đó đã nhận được giải thưởng của Viện Hàn lâm và khoa học Thụy Điển năm 1889. Kovalevskaya trở thành hội viên của Viện Hàn lâm khoa học Hoàng gia Thụy Điển.

Kovalevskaya không những nổi tiếng trong Toán học, bà còn được nhớ đến trong vai trò của một nhà hoạt động vì quyền bình đẳng của phụ nữ. Bà đã đấu tranh để phụ nữ được học tập trong điều kiện tốt nhất là vào học chính thức tại các trường đại học. Ngoài làm Toán, Kovalevskaya còn viết văn, kịch, tự truyện và nhiều bài báo về chính trị và xã hội. Bà từng nói *“Không thể trở thành một nhà Toán học nếu trong tâm hồn không phải là một nhà thơ.”*

Đầu năm 1891, Kovalevskaya bị bệnh cúm, viêm phổi và đã không qua khỏi. Bà ra đi ở tuổi 41, khi đang ở thời kỳ đỉnh cao của năng lực nghiên cứu và danh tiếng trong cộng đồng Toán học.



Một cảnh trong vở kịch “Hypatia” tại Nhà hát Haymarket, London, tháng Giêng 1893. (Nguồn: Internet)



LTS. Đường vào toán học sẽ gợi ý cho các bạn học sinh những đề tài nghiên cứu nho nhỏ, tựa như bước vào con đường nhỏ để đến với Toán học. Để nghiên cứu, cần học thêm kiến thức, và cần đọc được tiếng Anh. Vì thế các bạn có thể gặp ở đây những điều chưa được học ở trường phổ thông, cũng như vấn đề nghiên cứu được trình bày bằng tiếng Anh. Các bạn sẽ có một Người dẫn đường lý tưởng trên con đường vào toán học: Giáo sư Vũ Hà Văn, người phụ trách chuyên mục này của Pi.

GIẢI TOÁN VÀ NGHIÊN CỨU TOÁN

Vũ Hà Văn

Các độc giả của Pi, từ bé, đã quá quen với việc giải toán. Giải toán là làm bài tập, từ bài tập về nhà, đến bài thi học sinh giỏi các thể loại. Bạn ngồi xuống, đọc đầu bài, a ha bài này là hình tổ hợp, bài này lượng giác, bài này là bất đẳng thức, làm đúng làm hay vừa cảm thấy thú vị sung sướng, vừa có huy chương vàng, bạc, đồng về treo đầy nhà.

Nghiên cứu toán thì khác. Nó là một quá trình, một chặng đường. Câu hỏi đầu tiên đặt ra không phải là giải bài toán này thế nào, mà tại sao lại phải giải nó. Nhiều trường hợp, xác định được bài toán để giải cũng đã là một phần lớn của vấn đề. Bài toán cần được đặt vào trong một bức tranh lớn hơn, có ý nghĩa cụ thể, cũng như một bộ phận quan trọng của động cơ trong một cỗ xe lớn. Có được bước đó, việc làm toán mới có ý nghĩa.

Mục đích của “Đường vào Toán học” là giúp bạn bước những bước khởi đầu trên con đường này. Ở cuối đường sẽ không có huy chương, mà phần thưởng lớn nhất cho bạn là cảm nhận về thông điệp đích thực của Toán học.

Đề tài nghiên cứu đầu tiên của Chuyên mục này được đề xuất bởi Toan T. Nguyen, Department of Mathematics, Pennsylvania State University, State College, PA 16802, USA, Email: nguyen@math.psu.edu.

Classification of coarse-grained steady Euler flows

Given an object, Newton's second law asserts that

$$F = ma,$$

where F is the force acting on the object, m - its mass, and a denotes the acceleration.

Next, consider a container $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ of uids (water, air, or gas), which consist of

billions and billions of tiny molecules. Pretend that the uid is so dense that each position in Ω corresponds to a uid molecule, and the only force between uid molecules is the pressure. [For real fluid flows, there is also a contribution from friction or so called viscous force and other forces such as gravity].

Leonhard Euler, back in 1757, then wrote down the first ever-written partial differential equations, describing the dynamics of fluids: precisely, the Euler equations

$$\ddot{X}(t) = -\nabla_x p,$$

simply a continuum version of Newton's second law [Justification of this "simply continuum version" from Newton to Euler is the famous Hilbert's 6-th problem, which is open], enforcing the conservation of mass: the volume of any uid bucket remains unchanged in time. Fluids can be deformed, but the total mass or volume remains constant [This assumption is called incompressibility. Air or gas is in fact compressible, but water is well modeled by the incompressible flows]. Here, p the pressure and $X(t)$ denotes the trajectory of uid molecules with respect to time. The time derivative is along the fluid trajectory with corresponding velocity field $u(x,t)$. Hence, the dot derivative is in fact.

$$\dot{\cdot} = \partial_t + u \nabla_x$$

Even after more than two centuries, there is very little known about the long-time dynamics of such a Euler flow: is there turbulent? does it converge to equilibrium? In fact, the only asymptotic result for this very Euler flow is done within last two years, known as inviscid damping around a very special linear shear flow (Couette flow). Take a ballon full of smelly gas, and release it in a room. The dynamics of the gas will soon reach to its equilibrium (or else, you'll die?). Observe also that the flows tend to converge to a uniformly distributed flow, possibly except a lot of very highly oscillations between particles (what is the graph of $\sin(nx)$ or $\cos(nx)$, when $n \rightarrow \infty$?).

This motivates the statistical approach: what is the long time dynamics of Euler flows [As it's not even know if there are

global-in-time solutions to the 3D problem, this question only makes sense for 2D flows where global-intime smooth solutions are known], retaining on the first few Fourier modes? The first step is the following problem.

Problem 1. Classification of periodic steady Euler flows with finite Fourier modes (known as coarse-grained flows). Precisely, prove that only such flow is a shear flow or a Beltrami flow. [By definition, these are such flows whose Fourier frequency is supported on a circle or a line passing through zero].

Focus on 2D flows. Steady = timeindependent Euler flows, writing in term of vorticity $\omega = \nabla^\perp u$ simply read

$$u \cdot \nabla \omega = 0$$

Even more convenience, it suffices to construct a scalar stream ϕ [Then, velocity is defined by $u = \nabla^\perp \phi$ and vorticity is $\omega = \Delta \phi$] function ϕ^* so that

$$\nabla^\perp \phi \cdot \nabla \Delta \phi = 0$$

in which ∇ denotes the usual gradient vector (∂_x, ∂_y) and $\nabla^\perp$ is the orthogonal vector $(\partial_y, -\partial_x)$, and $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, the usual Laplacian. The question is then to solve (1) in Fourier, assuming that ϕ is written as a finite combination of finite Fourier modes. That is, Problem 1 for 2D flows reduces to the following problem.

Problem 2. Let A be any bounded subset of $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. Assume that

- (i) A is symmetric; that is, $k \in A$ then so is $-k$.
- (ii) For each pair $k, l \in A$, then either $k^\perp \cdot l = 0$ or $k = l$.

Prove that A lies on a circle or a line passing through zero in $\mathbb{Z}^2$.



LÀM TOÁN LÀ MỘT TRONG NHỮNG HÀNH TRÌNH HẠNH PHÚC CỦA NGƯỜI PHỤ NỮ

Thư Hiền (thực hiện)

Chia sẻ với Pi, GS Hoàng Xuân Sính cho rằng bản thân toán học không quan tâm vấn đề “bình đẳng giới”, nên không chia khái niệm nhà toán học thành nam - nữ. Vì thế, chỉ có khi phụ nữ nhận thức làm toán là một trong những hành trình hạnh phúc thì cộng đồng toán học mới xuất hiện thêm nhiều những “bóng hồng”.

GS Hoàng Xuân Sính bắt đầu câu chuyện với Pi bằng một ký ức vui vui của mình liên quan tới cộng đồng toán học Pháp:

Hồi những năm 1970 – 1980, tôi hay qua lại làm việc ở nước Pháp, có khi ở lại đến hàng năm, nên thường xuyên tham gia sinh hoạt tại một CLB dành cho nữ toán học ở Paris. CLB này do một nhà toán học nổi tiếng là nam giới thành lập. Trong CLB đó, một trong những chủ đề được chúng tôi mất nhiều thời gian tranh luận để tìm câu trả lời nhất là tại sao có ít phụ nữ làm toán. Tuần nào chúng tôi cũng họp, tuần nào cũng tranh luận để tìm ra câu trả lời nhưng rốt cục là chúng tôi vẫn không tìm ra được nguyên nhân tại sao ít phụ nữ làm toán!

Ít có phụ nữ làm toán chuyên nghiệp, điều đó không chỉ diễn ra ở ta mà còn là một thực tế của cộng đồng toán học thế giới. Theo tôi, căn nguyên của vấn đề là do ảnh hưởng từ ngàn đời xưa để lại, phụ nữ vốn không được đi học và thêm nữa làm khoa học trong đó có làm toán được coi như một nghề và được trả lương để sống chỉ mới bắt đầu vào cuối thế kỷ 18. Điều này tạo nên định kiến cho xã hội, cho mỗi gia

đình và cho chính bản thân mỗi phụ nữ. Ở Việt Nam cũng vậy, có một thời gian dài ở khoa toán trường Đại học Sư phạm Hà Nội chỉ có mình tôi là phụ nữ (sau này thì ở đó có nhiều phụ nữ hơn rồi). Có thể nói thời phong kiến của chúng ta dài quá, nó chi phối mạnh mẽ quan điểm về con đường lập nghiệp của phụ nữ. Tuy nhiên, cũng phải nhắc đến một nguyên nhân rất đáng kể, đó là toán rất khó.



Giáo sư Hoàng Xuân Sính. Ảnh: Lê Hiệp

Nhưng với thế giới thì tình hình đã được cải thiện. Chúng ta đã có một phụ nữ hiện giờ là duy nhất được giải thưởng Fields, đó là nhà toán học người Iran Maryam Mirzakhani. Ở Việt Nam, trong cộng đồng

toán ngày càng xuất hiện nhiều hơn phụ nữ làm toán chuyên nghiệp.

Có những khoảnh khắc “sương băng chết” nhờ toán

Còn với giáo sư thì vì sao bà chọn toán?

Tôi không chọn. Khi còn là học sinh trung học (tôi học ở Toulouse, Pháp), môn mà tôi thích học nhất là sinh ngữ chứ không phải toán. Đến năm cuối cùng của bậc trung học thì nhà trường chia thành 3 ban: toán, sinh học, triết học và ai thích học ban nào thì đăng ký. Nhưng gia đình tôi lại thích tôi học toán, vì nghĩ chỉ có học toán mới có thể trở về Việt Nam tham gia đóng góp xây dựng được đất nước. Vì thế tôi học toán là do ý muốn của gia đình.

Bạn gái cùng học toán với giáo sư hồi đó có nhiều không?

Tôi học trường trung học dành cho nữ, thời đó nam, nữ học riêng trong các trường trung học (cả tỉnh Toulouse có chỉ 2 trường dành cho nữ trong khi có tới 4 trường dành cho nam). Trường tôi có bốn lớp triết và hai lớp sinh. Số lớp toán lẽ ra là hai, nhưng vì chỉ có 45 người đăng ký nên không đủ chia làm hai lớp, thành thử gộp vào thành một lớp.

Trong số các bạn học trung học của bà, có nhiều người tiếp tục trở thành nhà toán học không?

Chỉ có ba bạn học từ trung học và tôi tiếp tục học toán cho đến agrégation, chúng tôi đỗ được kỳ thi viết của agrégation, nhưng cuối cùng có hai bạn thi rớt vấn đáp, nên chỉ còn một bạn gái Pháp và tôi đỗ (thời bác Hoàng Xuân Hãn dịch agrégation là thạc sĩ, và sau này khi giáo dục của chúng ta có một bậc sau đại học là master ta cũng dịch là thạc sĩ, nhưng agrégation và master hoàn toàn khác nhau), bạn tôi về sau tiếp tục làm gì thì tôi không rõ vì chúng tôi mất liên lạc, còn tôi tiếp tục làm tiến sĩ quốc gia (doctorat d'état) vì mong muốn bảo vệ

xong thì được dạy ngay ở một đại học ở Paris do có tiến sĩ quốc gia kèm theo agrégation (đó là thời của tôi năm 1959, mọi chuyện vận hành như vậy). Nhưng việc tôi về nước ngay sau khi đỗ agrégation đã làm đảo lộn mọi kế hoạch định sẵn.

Có phải ban đầu việc học toán là thuận theo sự lựa chọn của gia đình bà, còn về sau thì bà thích học toán?

(Cười) Tôi chưa bao giờ tự hỏi mình có thích hay không thích làm toán. Gia đình muốn thì tôi học, về sau tôi thấy mình học được, làm được thì cứ thế mà làm thôi.

Vậy toán học có thật sự mang lại hạnh phúc cho bà không ạ?

Nó mang lại cho tôi những khoảnh khắc hạnh phúc tuyệt vời. Bạn không thể tưởng tượng khi chứng minh được một bài toán khó thì nó tuyệt vời đến thế nào! Cảm giác của mình lúc đó là rất sướng, nó làm mình ngây ngất. Có thể nói sương băng chết được!

Ít phụ nữ làm toán là bình thường, nhưng đừng ít quá

Nhưng vấn đề là toán học có thực sự cần phụ nữ không ạ? Hay là nó chỉ cần những người giỏi thôi, còn nam hay nữ gì cũng được?

Đúng rồi! Toán học không phân biệt giới tính, nó chỉ cần kết quả. Có bao giờ và ở đâu phân biệt định lý do nhà toán học nam hay nhà toán học nữ chứng minh không? Rõ ràng là không, đúng không?

Thế nên đó có phải là nguyên nhân hiếm phụ nữ làm toán, vì chắc chắn toán học sẽ không “tạo điều kiện” để phụ nữ khám phá nó. Mỗi phụ nữ nếu muốn chọn toán làm hành trình tìm kiếm hạnh phúc thì phải tự vận động...

Đúng rồi. Nó “tạo điều kiện” để mà chết ư! Chẳng phải toán, mà các ngành khoa học

khác cũng thế. Nếu xuất phát từ vấn đề của nhà quản trị thì sẽ thấy phụ nữ quả là kém cạnh tranh so với nam giới để làm tốt nhất một công việc của mình. Cho nên nam giới thường được ưu tiên nhận trong tuyển dụng. Cá nhân tôi cũng thế, khi đứng trước một lá đơn xin việc của phụ nữ thì trong đầu tôi sự so sánh đến rất nhanh. Nào là tôi sẽ mất kha khá thời gian cho các cô ấy vào việc lập gia đình, mang thai, sinh nở, nuôi con... Vì thế tôi phải tự “đấu tranh”, nghĩ tới quyền lợi của phụ nữ, để nhận.

Mà như trên tôi đã nói, toán quá khó, mỗi nhà toán học khi giải quyết một bài toán cần sự tập trung cao độ trong một thời gian dài. Ngay khi đang là học sinh phổ thông các bạn gái đã biết là toán khó rồi. Đắm đầu vào một bài toán khó có khi mất cả tuần. Mà các bạn nữ trong độ tuổi ấy bắt đầu thấy cuộc sống có nhiều điều quyến rũ nên việc học hành sẽ dễ bị phân tâm. Các bạn nam thì ít bị chi phối hơn, nên có nhiều em hơn tìm thấy niềm vui trong việc vui đầu giải toán.

Khi trưởng thành, hiệu quả công việc của người phụ nữ làm toán lại bị tác động bởi những yếu tố xã hội. Bạn thân của tôi là một nữ giáo sư toán nổi tiếng, từng là chủ tịch hội toán học của Pháp. Chị ấy kể cho tôi về chuyện gia đình mình, rằng ông chồng cũ (là một giáo sư vật lý) cứ đến 6 giờ chiều là bảo với vợ là phải đi họp, đến khi chị ấy nấu ăn xong thì ông ấy mới đi họp về. nếp sống đó cứ kéo dài khiến chị ấy không thể chịu nổi nên họ đã ly dị. Pháp họ vẫn mình hơn mà còn thế huống hồ gì Việt Nam mình! Phụ nữ mặc nhiên phải làm nội trợ. Ngoài ra do thiên chức làm mẹ nên họ đương nhiên phải chịu áp lực về thời gian khi sinh con, nuôi con.

Cũng nhiều nhà toán học đã nhận thấy vấn đề này. Họ nói, thay vì tập trung cao độ trong thời gian dài để làm toán thì họ phải “ngắt” ra để làm việc nhà, chăm sóc con cái, nên không làm được những bài toán lớn.

Nếu một nữ toán học có hai đứa con thì họ sẽ mất ít nhất mười năm như thế...

Mười năm là thế nào? Cho đến khi con họ học lên THPT thì người mẹ vẫn phải dõi theo, vẫn phải bận lòng.

Cho nên mình phải chấp nhận phụ nữ làm toán ít hơn nam giới là bình thường, không có thì mới là bất thường?

Bạn nói như thế là rất đúng đấy, ít là bình thường.

Và có phải ngang bằng cũng là bất thường, vì như thế chứng tỏ đàn ông họ ít chịu làm toán, để mặc toán cho phụ nữ?

(Cười thích thú) Đúng đấy!

Vậy việc chúng ta ngày càng có nhiều nữ toán học hơn là nhờ sự phát triển tự nhiên hay nhờ “cơ cấu” từ các cuộc đấu tranh bình đẳng giới?

Làm gì có chuyện cơ cấu trong làm toán? Tôi nghĩ là nhờ cơ hội đi học nước ngoài ngày nay của các em sinh viên, cả nam và nữ, nên nên nhiều em tìm được học bổng ở các trung tâm đào tạo toán xuất sắc của thế giới. Vì thế mà số lượng người làm toán tích cực của chúng ta nhìn chung tăng lên, số lượng nữ toán học nhờ đó mà được tăng theo. Đó là nói về số lượng thôi chứ xét về tỉ lệ thì nữ làm toán vẫn quá ít ỏi.

Các bạn nữ cứ tự tin học toán

Trước câu hỏi, “ngày xưa giáo sư “bị” gia đình bắt học toán, còn ngày nay thì nhiều gia đình không muốn con học toán, giáo sư nghĩ thế nào về điều này?”, GS Hoàng Xuân Sính chia sẻ:

Nhiều giáo sư Mỹ, Pháp cũng than phiền là càng ngày sinh viên của họ càng ít thích học toán. Có thể do tác động của xã hội, học toán đã khó, học lại lâu, mà lương lại thấp, trong khi nhiều ngành khác học thì dễ, nhanh đi làm, lương lại cao. Đó là chuyện xã hội tôi không giải quyết được,

nhưng tôi muốn kể cho bạn nghe chuyện này.

Chục năm qua tôi làm việc ở Đại học Toulouse 1. Đó là một trường nổi tiếng với ngành kinh tế được xếp số 1 trong cộng đồng các trường đại học ở châu Âu, và cũng nổi tiếng với giáo sư Jean Tirole mới được giải Nobel về kinh tế. Trường có một labo kinh tế hợp tác với đại học Harvard.

Có lần ông Hiệu trưởng Đại học Toulouse 1 kể với tôi (để khen) về một cô gái Việt Nam đang học thạc sĩ tại trường. Một lần, cô ấy gõ cửa phòng ông hiệu trưởng để phàn nàn rằng cô ấy không tìm thấy cuốn giáo trình toán mà cô ấy cần bằng tiếng Anh (thư viện chỉ có phần lớn sách toán bằng tiếng Pháp, mà cô ấy mới sang nên chưa rành tiếng Pháp) và đề nghị hiệu trưởng tìm giúp. Việc này khiến ông hiệu trưởng rất ngỡ ngàng, vì trần đời chưa một sinh viên Pháp nào dám gõ cửa phòng hiệu trưởng để đề nghị tìm sách giúp. Nhưng chính vì thế mà ông ấy nể, và cho người tìm. Sau đó cô sinh viên đã tốt nghiệp thạc sĩ nghiên cứu loại xuất sắc nên được cấp học bổng làm tiến sĩ. Về sau, một bà giáo sư Harvard, làm ở labo Toulouse 1, thấy cô ấy xuất sắc quá nên đã nhận cô ấy làm trợ lý và cô ấy theo bà giáo sư về Harvard sau khi bảo vệ xong luận án tiến sĩ.

Tình cờ về sau tôi gặp cô sinh viên đó. Hóa ra cô ấy vốn là học sinh chuyên toán của Đại học Sư phạm Hà Nội, rồi vào học trường Đại học Ngoại thương. Sang Pháp làm thạc sĩ, rồi tiến sĩ về kinh tế, nhưng thực ra là phải học những chương trình toán rất nặng. Bạn phải biết là chương trình tiến sĩ kinh tế ở Đại học Toulouse 1 rất nặng về toán. Luận án của cô gái đó toàn những phương trình vi phân mà chẳng có lời.

Tôi kể câu chuyện này ra với hai thông điệp. Một là các bạn nữ hãy tự tin học toán. Hai là có rất nhiều ngã rẽ phù hợp với bạn

nếu bạn thực sự có năng lực về toán. Bạn có tư duy toán thật xuất sắc thì đi theo con đường của giáo sư Ngô Bảo Châu. Nếu vừa vừa thì có thể rẽ vào các hướng toán ứng dụng. Xã hội, các gia đình, các bạn trẻ cần phải hiểu điều đó để đừng cự tuyệt với toán. Tuy nhiên, mong muốn của tôi là phụ nữ làm toán chuyên nghiệp đừng quá ít, nhưng cái gì cũng phải dần dần. Ngày xưa không có phụ nữ làm toán, rồi có người đầu tiên, và giờ thì đã là số nhiều, đó là tiến bộ của xã hội rồi còn gì! Xã hội đòi hỏi có nhiều tiến bộ hợp lại, chứ không chỉ nhăm nhăm vào chuyện phải nhiều phụ nữ làm toán chuyên nghiệp hơn.



Bà Hoàng Xuân Sính và các học trò tiếp giáo sư Grothendieck (người được giải thưởng Fields) tại nơi sơ tán trong thời gian chiến tranh chống Mỹ.

Cộng đồng toán học Việt Nam hiện chỉ mới có hai phụ nữ được phong hàm giáo sư mà GS Hoàng Xuân Sính là phụ nữ đầu tiên (hơn 30 năm sau mới có thêm phụ nữ thứ 2). Bà là phụ nữ nước ngoài đầu tiên đến Paris bảo vệ thành công luận án tiến sĩ quốc gia về toán học, khi đó bà đang là giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Hiện GS Hoàng Xuân Sính là Chủ tịch Hội đồng quản trị Trường Đại học Thăng Long – một trường đại học tư thục nhưng có nhiều đầu tư cho ngành toán.

Nếu được giảm áp lực xã hội, Việt Nam sẽ có nhiều phụ nữ làm toán giỏi hơn

TS. Tạ Thị Nguyệt Nga (Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh): **Hạnh phúc khi vượt qua được giới hạn của bản thân**

Từ khi còn nhỏ tôi đã biết thích toán, nên học toán và cứ thế mà đi tiếp thôi. Vì tự nhiên như vậy nên tôi không thấy mình khác biệt ở các lớp học toán nữa (khi ngồi giữa xung quanh các bạn toàn nam giới). Thực ra, lúc ấy tôi không để ý đến việc mình là con trai hay con gái nữa.

Chị hỏi tôi có bao giờ cảm thấy đơn độc không khi “thân gái dặm trường” theo đuổi toán? Tôi không có ý niệm về việc mình có đơn độc hay không khi theo đuổi toán học. Còn có hạnh phúc hay không ư? Tôi nghĩ là nhiều. Hạnh phúc nhất là khi vượt qua được giới hạn của bản thân, thăng hoa, giống như vận động viên thể thao phá được kỉ lục. Một buổi sáng tỉnh dậy, có cảm giác như mọi thứ sáng tỏ, nhẹ nhõm. Cảm giác đấy rất là tuyệt!

PGS. TS. Nguyễn Thị Hồng Loan, Trường ĐH Vinh: *Càng lên cao phụ nữ làm toán càng ít đi.*

Tôi vốn là học sinh chuyên lý (Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An). Tuy nhiên, càng ngày tôi càng nhận ra một điều rằng mình thích học toán, thế là chọn khoa Toán Trường ĐH Sư phạm Vinh (nay là ĐH Vinh). Từ đó nghiệp toán gắn vào thân!

Đối với phụ nữ, ngoài việc ở cơ quan ra thì việc nhà (đi chợ, nấu ăn, giặt giũ, dọn dẹp nhà cửa, chăm sóc con cái...) chiếm quá nhiều thời gian nên việc dành thời gian cho nghiên cứu quá ít. Vì thế tôi nghĩ phụ

nữ muốn làm toán được thì phải hy sinh, phải nỗ lực, phải được sự thông cảm, hậu thuẫn rất lớn từ người thân, gia đình, bạn bè. Có lẽ để có được thành công như nhau thì phụ nữ phải cố gắng gấp đôi, gấp ba lần so với nam giới.

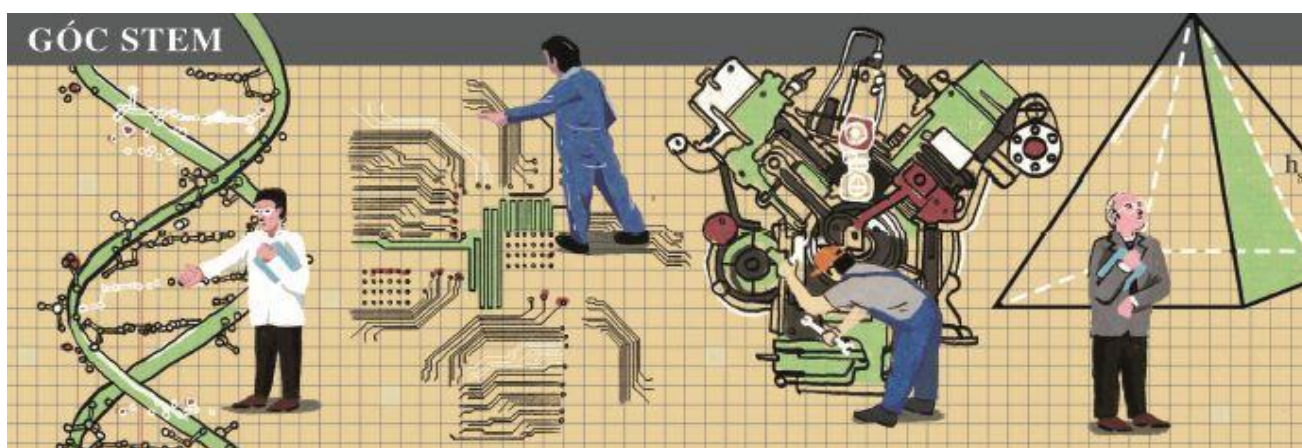
GS. Lê Thị Thanh Nhân (Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên): **Năm mới khoe... bài báo**

Tôi thích học toán từ khi học phổ thông, lại thích làm giáo viên nên thi đại học ngành sư phạm toán, Trường Đại học Sư phạm Việt Bắc.

Nhiều phụ nữ học toán giỏi, nhưng rất ít trong số họ tiếp tục lựa chọn con đường làm toán, hoặc dẫu có lựa chọn thì con đường “thành danh” cũng của các nhà toán học nữ đều rất chật vật... Đó là nhận định chung của các nhà toán học nữ cùng tham gia chuyên mục đối thoại toán học với Pi kỳ này.

Không biết phụ nữ làm toán thì có khác biệt lắm không, nhưng quả là cũng có nhiều người bảo tôi hơi lập dị. Khi bài báo đầu tiên được đăng ở Proc. AMS vào đúng dịp tết năm 2001, tôi vui quá nên gửi cho một vài đồng nghiệp ở Thái Nguyên, họ bảo “Nhân có vấn đề, năm mới mà lại khoe bài báo”.

Đúng là nữ sinh giỏi toán thì không thiếu nhưng phụ nữ làm toán thì ít, làm toán giỏi càng ít. Hiện chúng ta có một số nhà toán học nữ xuất sắc như PGS.TS. Trương Xuân Đức Hà, PGS.TSKH. Tạ Thị Hoài An, PGS.TS. Phan Thị Hà Dương... thì họ đều tập trung làm việc ở Viện Toán học Việt Nam. Còn ở các trường đại học, số giảng viên nữ khá nhiều, nhưng lại rất ít người làm toán giỏi. Thế hệ trẻ hiện nay, có nhiều người rất tài năng, nhưng trong số đó nữ toán học vẫn hiếm!



INTEL ISEF

Đỗ Hoàng Sơn (thực hiện)

INTEL ISEF là cuộc thi STEM lớn nhất và lâu đời nhất trên thế giới: bắt đầu từ năm 1950, với quy mô gần 8 triệu học sinh (15-20 tuổi) tham dự tại gần 80 nước trên thế giới hằng năm để chọn ra 1800 học sinh đến Mỹ dự vòng Chung kết, nơi có gần 1000 giám khảo và tình nguyện viên.

Vòng Chung kết INTEL ISEF hằng năm có ngân sách khoảng 20 triệu đô la Mỹ, trong đó gần 5 triệu đô la Mỹ là quỹ giải thưởng. Việt Nam tham gia INTEL ISEF gần 10 năm nay, trong đó 04 năm đầu chúng ta không có giải thưởng, chính vì vậy mà năm 2012, sự kiện Việt Nam 01 đạt giải Nhất (3000 đô la) trong lĩnh vực Điện và Cơ khí đã được bình chọn là 1 trong 10 sự kiện lớn của giáo dục Việt Nam năm 2012.

Ghi bàn thắng đầu tiên này cho Việt Nam ở INTEL ISEF 2012 là nhóm ba học sinh của THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam: Trần Bách Trung (đội trưởng), Vũ Anh Vinh và Bùi Thị Quỳnh Trang. Từ năm 2012 tới nay Việt Nam đã đạt 10 giải của INTEL ISEF trong đó có duy nhất giải của nhóm Trần Bách Trung là giải Nhất, còn lại là 04 giải Ba và 05 giải Tư.

Theo đánh giá của các chuyên gia tham gia huấn luyện đội tuyển, hàm lượng sử dụng các yếu tố toán học trong đề tài của nhóm Trần Bách Trung là nhiều hơn cả so với số các đề tài mà Việt Nam đạt giải, bởi nó bao gồm việc tạo ra mô hình toán, viết công thức, thử nghiệm sản phẩm và so sánh kết quả đo với thực nghiệm.

Hôm nay trong không khí đầu Xuân 2017, Tạp chí Pi có bài phỏng vấn bạn Trần Bách Trung hiện đang là sinh viên đại học năm thứ 3 của hai ngành Toán và Kỹ thuật ở Mỹ. Hy vọng những chia sẻ của bạn Trung sẽ phần nào giúp được các bạn học sinh và các thầy cô giáo cũng như cha mẹ học sinh có thêm kinh nghiệm để nuôi dưỡng đam mê STEM được tốt hơn.

Bài phỏng vấn do Đỗ Hoàng Sơn thực hiện.

Chào Trung, xin bạn cho biết tên đề tài dự thi đạt giải Nhất INTEL ISEF 2012 của các bạn là gì?

Xin chào Tạp chí Pi, đề tài của nhóm chúng em là "Xử lý nước mặn thành nước ngọt bằng kỹ thuật chân không và năng lượng mặt trời phục vụ cho sinh hoạt".

Vấn đề chưng cất nước biển thành nước ngọt và sử dụng năng lượng mặt trời là đề tài rất cấp thiết và đã có nhiều người nghiên cứu, vậy trước đó người ta đã làm được gì và làm như thế nào?

Hiện tại, trên thế giới đã có rất nhiều công nghệ xử lý nước mặn, như phương pháp điện phân (electrodialysis), phương pháp màng thẩm thấu ngược (reverse osmosis)

hay phương pháp chưng cất nhiều tầng (multistage flash distillation). Những phương pháp này, tuy có hiệu quả cao về mặt kinh tế, song có nhược điểm là phải được đầu tư rất nhiều về cơ sở vật chất, vậy nên khó phù hợp ở quy mô hộ gia đình. Trước đề tài của nhóm bọn em, công nghệ xử lý nước mặn thành nước ngọt ở quy mô nhỏ phần lớn chỉ có chưng cất nước mặn bằng cách đưa ánh sáng trực tiếp vào thiết bị để bốc hơi nước muối.

Xin cho biết, sau khi nghiên cứu tổng quan của vấn đề, các bạn đặt mục tiêu nghiên cứu là gì?

Từ ý tưởng nghiên cứu là kết hợp công nghệ chân không và năng lượng mặt trời, và sau một thời gian đọc và tìm hiểu về nhiều công nghệ hiện tại, mục tiêu nghiên cứu cụ thể của chúng em là (1) thiết kế hệ thống bơm-ejector để tạo được độ chân không phù hợp và hiệu quả cho việc chưng cất, (2) thiết lập mô hình toán để tối ưu hóa quá trình chưng cất, và (3) thiết kế toàn hệ thống, gồm công nghệ chân không và mặt trời, để xử lý nước mặn.

Cuộc thi INTEL ISEF là cuộc thi đề cao tính mới, tính sáng tạo, vậy các bạn đã làm được điều gì để được các “giám khảo khó tính” cho là có tính mới?

Đề tài của bọn em, khi đó tuy còn sơ khai, đã chứng minh được tính khả thi của ý tưởng kết hợp chân không và năng lượng mặt trời để xử lý nước mặn. Việc tạo chân không làm nước sôi ở nhiệt độ thấp hơn nhiều so với 100 độ C nên đã tạo cơ hội sử dụng được năng lượng của ánh sáng mặt trời, giúp tiết kiệm được năng lượng và tăng được lượng nước chưng cất.

Tăng được năng suất và dùng năng lượng mặt trời rất rẻ tiền để chưng cất nước biển sôi ở nhiệt độ rất thấp, một ý tưởng táo bạo đã thành hiện thực, vậy các bạn đã bắt đầu nghiên cứu như thế nào? Khó khăn lúc đầu là gì?

Em bắt đầu nghiên cứu bằng cách đọc và viết tổng quan để tìm ý tưởng. Cùng lúc đó, một số công việc cấp thiết là tìm cộng sự để xây dựng nhóm cũng như tìm thầy giáo để hỏi han, liệu ý tưởng và suy nghĩ của mình có khả thi hay không. Khó khăn lúc đầu thì có rất nhiều, vì tất cả mọi thứ đều vô cùng mung lung. Không có gì là chắc chắn cả, từ ý tưởng của mình, đến sự đồng lòng và nhiệt huyết, cũng như mong muốn cống hiến của tất cả mọi thành viên.

Một trong những khó khăn lớn nhất khi làm STEM ở Việt Nam là thiếu các điều kiện thực nghiệm? Điều gì là khó khăn? Hãy nêu 5 điều khó nhất khi làm thí nghiệm và thử nghiệm?

Nói về thí nghiệm thì cũng có rất nhiều khó khăn. Đáng lẽ, khi tiến hành đề tài, theo đúng quy trình thì sẽ phải bắt đầu từ những thí nghiệm nhỏ, thành công rồi mới chuyển sang cụm thử nghiệm lớn (pilot). Tuy nhiên, do thời gian hạn hẹp, nên việc chế tạo cụm thử nghiệm lớn bắt đầu ngay từ những ngày đầu tiên. Đó là một sự đặt cược mạo hiểm, vì có rất nhiều khả năng nhóm sẽ không được đi thi quốc tế lúc bấy giờ. Kinh phí chế tạo toàn bộ cụm thiết bị thử nghiệm là \$3000, hoàn toàn lấy từ tiền túi của gia đình học sinh. Chúng em rất mừng là kết quả cuối cùng đã được như ý muốn.

Thật khó có thể chỉ ra điều gì là khó khăn nhất trong khi thực nghiệm, vì tất cả các công đoạn đều đóng vai trò quan trọng đối với sự thành công của đề tài, và chúng đều có những độ phức tạp riêng và theo nhiều cách khác nhau. Những khó khăn khi làm thực nghiệm bao gồm (1) việc liên hệ, lựa chọn phòng thí nghiệm và địa điểm thực nghiệm (do cơ sở vật chất trong trường Amsterdam không đủ khả năng), (2) việc thiết kế, chế tạo và lựa chọn thiết bị, (3) việc tìm kỹ thuật viên để theo dõi và đảm bảo an toàn cho mọi người, (4) việc lắp ráp và hiệu chỉnh thí nghiệm, (5) việc học cách sử dụng các thiết bị thí nghiệm, (6)

việc lên lịch để tìm thời gian làm thí nghiệm chung cho cả nhóm, (7) việc phân tích số liệu và công tác tối ưu hóa với những thiết bị có trong tay, và (8) vấn đề sức ép về mặt thời gian cho các vòng thi. Tất cả mọi thứ đều mới mẻ và khó khăn với chúng em, vì lúc đó bọn em mới đang là học sinh cấp 3 và gần như không có mấy kinh nghiệm.

Vậy nên chúng em rất biết ơn gia đình đã tạo điều kiện, công ty Sơn Hà đã tài trợ bình nước nóng năng lượng mặt trời, và kỹ sư Vũ Đình Lăng (ĐH Kiến trúc Hà Nội) đã đảm bảo an toàn, giúp đỡ lắp đặt và hiệu chỉnh thiết bị cho bọn em.

Bạn cho biết về những vấn đề toán học của đề tài? Công thức toán được ra đời thế nào? Ai giúp cơ sở lý thuyết? Vì sao bạn học trước chương trình về tích phân?

Mô hình toán của đề tài ra đời từ nhu cầu thực tế là cần phải tối ưu hóa việc xử lý nước mặn thành nước ngọt với những thiết bị có sẵn. Đặc thù thiết bị của nhóm không cho phép việc chưng cất liên tục (continuos) mà chỉ có thể chưng cất theo mẻ (batch). Một khi đã cho nước mặn vào chưng cất thì không thể lấy ra, vì điều đó sẽ ảnh hưởng đến hiệu suất. Vậy nên mỗi lần cho nước mặn vào để chưng cất thì chúng em đều phải ước chừng lượng nước tối ưu: nếu cho quá nhiều thì phải cần có nhiều năng lượng hơn để làm cả khối nước nóng lên; nếu cho quá ít thì cũng không thu được lượng nước chưng cất mà đáng ra chúng ta có thể thu thêm được. Từ đó, mô hình toán được ra đời, dựa trên thực tế là các tính chất nhiệt vật lý của nước muối là khác với nước thường và thay đổi liên tục theo nồng độ trong quá trình nước bốc hơi.

Lượng nước có thể được chưng cất trong một ngày phụ thuộc vào năng lượng mà mặt trời cung cấp (được ước chừng từ bản đồ có trước về nắng trong một năm), nồng độ nước muối ban đầu, và độ chân không có thể đạt được của máy. Về nền tảng cho

cơ sở lý thuyết, giáo sư Đàm Thanh Sơn đã gửi cho chúng em tư liệu về tính chất nhiệt vật lý của nước mặn, thầy Lê Nguyên Minh đã cung cấp những tài liệu khác liên quan đến nhiệt học và các tính chất của nước, thầy Đinh Trần Phương (thầy giáo vật lý của lớp em, lớp chuyên Lý 1 khóa 2010-2013) giúp đỡ thêm về đặt đề bài và về giải tích.

Em học tích phân trước vì đó là chương trình bắt buộc của khối chuyên lý trong trường Hà Nội - Amsterdam.

Bạn đã cần mấy ngày để tìm ra được công thức?

Đối với quá trình suy nghĩ về hiện tượng, đặt câu hỏi và đặt đầu bài, bọn em bắt đầu từ rất sớm, ngay từ những ngày thí nghiệm đầu tiên. Những suy nghĩ đó là tiền đề cho mô hình toán sau này. Thời gian tìm kiếm tài liệu cũng mất một khoảng kha khá. Còn việc tính toán, khai triển và đưa thành mô hình, từ lúc đặt bút, chỉ diễn ra trong vòng từ 1 đến 2 ngày.

Kết quả thử nghiệm thế nào so với lý thuyết?

Sai số giữa kết quả thực nghiệm với lý thuyết là khoảng 10%.

Hiện nay bạn đang học gì? Có mối liên hệ gì đến cuộc thi? Dự định trong tương lai?

Hiện nay em đang học ngành Kỹ thuật và Toán. Kỹ thuật chính là lĩnh vực của đề tài chúng em. Em chọn học toán vì toán có trong tất cả các ngành kỹ thuật. Việc hiểu và biết cách áp dụng toán là một lợi thế lớn đối với bất kỳ kỹ sư nào.

Em xin phép không trả lời về nghiên cứu hiện tại, vì mọi thứ vẫn còn đang dở dang.

Dự định trong tương lai của em là tiếp tục theo học đến khi hoàn thành bậc tiến sĩ. Còn sau đó thì em chưa có kế hoạch.

Cuộc thi quốc tế INTEL ISEF có những thách thức gì đáng lưu ý? Tính thấu đáo?

Cách trình bày? Yếu tố thực hành? Yếu tố toán học? Kỹ năng đối thoại?

Đến sân chơi quốc tế, thách thức thì nhiều. Tất cả các khâu đều đóng những vai trò riêng và có độ quan trọng nhất định đối với kết quả cuối cùng. Tuy nhiên có một số thách thức/yêu cầu chính khi tham gia cuộc thi như tính thấu đáo của đề tài, sự cố gắng của học sinh cùng với tinh thần đam mê khoa học, và quan trọng nhất là tính trung thực của nhóm.

Về tính thấu đáo của đề tài, đây là thách thức liên quan trực tiếp đến chuyên môn và độ chuyên sâu của đề tài. Vấn đề này rất khó, vì nó liên quan cả đến thầy giáo hướng dẫn cũng như khả năng làm việc và sáng tạo của học sinh.

Về sự cố gắng của học sinh và tinh thần đam mê khoa học, đây là yếu tố quan trọng hàng đầu và cũng là mục tiêu chính mà ISEF muốn mang tới toàn thể học sinh. Ở bậc phổ thông, có được tinh thần đam mê nghiên cứu khoa học quan trọng hơn rất nhiều so với có được phát minh hay tìm ra kết quả khoa học mới.

Một số kỹ năng cần lưu ý như khả năng đọc hiểu và tra cứu tài liệu, khả năng đưa ra một giả định mới, khả năng kết nối những mảng kiến thức trong phạm vi hiểu biết, kỹ năng xã hội để kết nối với các chuyên gia, kỹ năng làm thí nghiệm, kỹ năng viết báo cáo, kỹ năng làm việc nhóm, và kỹ năng thuyết trình.

Về tính trung thực thì em cũng không muốn phân tích nhiều. Nếu như học sinh đã có tinh thần đam mê khoa học thì những học sinh đó sẽ đề cao sự trung thực. Mọi hành động không trung thực đều sẽ bị các giám khảo phát hiện, vì tất cả học sinh đều còn trong sáng và non nớt, về cả tuổi đời cũng như tuổi nghề.

Thật ra, khi đã hòa mình vào dòng chảy của dự án thì những thách thức không còn là khó khăn, mà chỉ đơn thuần là những việc phải làm.

Bạn có ý kiến hay lời khuyên nào cho các em học sinh sắp đi thi quốc tế năm nay?

Em xin có lời khuyên, không chỉ cho các bạn học sinh sẽ đi thi quốc tế vào giữa năm nay mà còn cho các bạn đang trong quá trình thi thành phố và quốc gia:

Cuộc thi ISEF là một trải nghiệm thú vị, và phần thú vị nhất của trải nghiệm đó, không đâu xa, lại chính là quá trình thực hiện đề tài. Các bạn đừng quá quan tâm đến giải thưởng, vì khi nhìn lại sau một chặng đường dài, giải thưởng không còn nhiều ý nghĩa. Cuộc thi ISEF là một bước đệm cho tương lai. Một số sẽ tìm thấy được câu trả lời cho ngành nghề tương lai của mình; một số sẽ quyết định không tiếp tục theo đuổi con đường nghiên cứu (việc các bạn đã biết được mình không thích gì cũng là một điều hay). Điều quan trọng nhất trong cuộc thi là những kiến thức và kỹ năng học được (mình tin là những kiến thức và kỹ năng ấy, dù ít hay nhiều, đều sẽ giúp ích cho công việc của các bạn trong tương lai). Vậy nên, mình mong các bạn cố gắng và phấn đấu để có trải nghiệm tuyệt vời nhất ở ISEF. Hãy thực hiện những đề tài của các bạn bằng sự ham học hỏi và một niềm đam mê trong sáng! Chúc các bạn một năm làm việc hiệu quả và hăng say!



Các bạn trong nhóm nghiên cứu, từ trái sang: Bùi Thị Quỳnh Trang, Trần Bách Trung, Vũ Anh Vinh (ảnh do Trần Bách Trung cung cấp)



ÁNH SÁNG TRONG THIÊN VĂN HỌC: KHÁM PHÁ VÀ GHI NHẬN

Phạm Ngọc Diệp

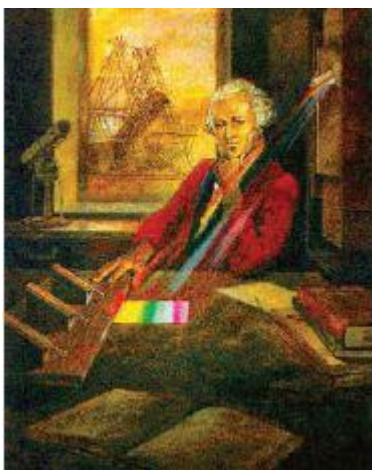
“Chỉ có thể nhìn thấy một vật khi có ánh sáng từ vật đó đi tới mắt”. Thứ ánh sáng mà ta nói đến ở đây được gọi là ánh sáng khả kiến, hay ánh sáng mà mắt người có thể nhìn thấy được có bước sóng từ 0,4 đến 0,7 micromét. Tuy nhiên, ánh sáng “có thể nhìn thấy được” chỉ là một phần rất nhỏ của một dải ánh sáng rộng hơn được gọi là phổ điện từ. Phổ này chứa nhiều loại “ánh sáng” có bước sóng nằm ở cả hai phía của vùng ánh sáng khả kiến mà mắt người không nhìn thấy được. Sự tồn tại của chúng chỉ có thể được nhận biết nhờ máy móc, thiết bị hỗ trợ hay qua những tác động mà chúng để lại lên môi trường xung quanh.

Với tính chất “có thể nhìn thấy được” nên dĩ nhiên ánh sáng khả kiến là dải ánh sáng được con người biết đến từ sớm và lâu đời nhất, thậm chí con người biết đến nó trước khi biết đó là ánh sáng! Người Hy Lạp cổ cách đây hàng nghìn năm đã biết rằng ánh sáng truyền theo đường thẳng. Họ đã thực hiện những nghiên cứu về tính chất của ánh sáng như phản xạ và khúc xạ. Mãi đến tận đầu thế kỷ thứ 19, chúng ta mới biết đến sự tồn tại của ánh sáng ngoài vùng khả kiến, và phải mất hơn một thế kỷ sau đó con người mới khám phá hoàn toàn phổ điện từ.

Năm 1800, William Herschel, một nhà khoa học người Anh gốc Đức, tiến hành nghiên cứu nhiệt lượng mang theo bởi ánh sáng có màu sắc khác nhau. Ông đã sử dụng một lăng kính để tách bảy sắc cầu vồng của ánh sáng (đỏ, da cam, vàng, lục, lam, chàm, tím), rồi đặt các nhiệt kế dưới những vùng ánh sáng đó. Ngoài ra, ông cũng đặt thêm một nhiệt kế bên ngoài vùng ánh sáng đỏ. Herschel phát hiện một

điều rất kỳ lạ, chiếc nhiệt kế đặt bên ngoài vùng ánh sáng nhìn thấy lại có nhiệt độ cao nhất. Đó chính là thời khắc ông phát hiện ra tia hồng ngoại (xem hình).

Một năm sau đó, được truyền cảm hứng từ khám phá của Herschel, Johann Wilhelm Ritter, một nhà hoá học, vật lý và triết học người Đức, thực hiện nghiên cứu, tìm kiếm ánh sáng ở phía bên kia của vùng khả kiến (ngoài vùng màu tím). Ritter đã thành công, ông khám phá ra tia cực tím, những tia có tính chất giống như ánh sáng tím nhưng có bước sóng nằm ngoài vùng khả kiến.



Chân dung William Herschel với thí nghiệm cho phép ông khám phá ra ánh sáng hồng ngoại (Nguồn: NASA/IPAC).



Chân dung Wilhelm Conrad Röntgen người khám phá ra tia X



Bàn tay của bà Röntgen, hình ảnh tia X chụp người đầu tiên.

Vào những năm 1860, James Clerk Maxwell phát triển những phương trình vi phân riêng phần mô tả tính chất sóng của trường điện từ. Ông tiên đoán tồn tại sóng

điện từ với những bước sóng khác nhau. Phân tích tốc độ của sóng, Maxwell nhận ra rằng chúng phải chuyển động với vận tốc bằng với vận tốc ánh sáng. Sự trùng hợp đáng kinh ngạc này khiến Maxwell cho rằng ánh sáng là một dạng sóng điện từ và đó chính là manh mối đầu tiên về sự tồn tại của toàn bộ *phổ điện từ*.

Vào năm 1867, Maxwell dự đoán tồn tại sóng điện từ với bước sóng thậm chí còn dài hơn ánh sáng hồng ngoại. Tuy nhiên, phải đến gần 20 năm sau, năm 1886 Heinrich Hertz, một nhà vật lý người Đức, mới chứng minh được sự tồn tại của loại sóng mà Maxwell dự đoán. Ông đã thành công trong việc tạo ra sóng mà sau này được gọi là sóng vô tuyến trong phòng thí nghiệm. Cũng như ánh sáng, sóng vô tuyến cũng có thể phản xạ, khúc xạ và mang đầy đủ các tính chất khác của ánh sáng.

Đối với ánh sáng có năng lượng cao hơn (hay bước sóng ngắn hơn) trong phổ điện từ, các nhà khoa học đã phải mất nhiều thời gian hơn để khám phá ra chúng.

Tia X lần đầu tiên được Wilhelm Conrad Röntgen, một nhà khoa học người Đức, quan sát và nghiên cứu vào năm 1895. Ông đã tìm ra tia X một cách tình cờ khi nghiên cứu các ống chân không. Một tuần sau khi quan sát được tia X, Röntgen đã dùng tia X để chụp ảnh bàn tay vợ mình. Hình ảnh cho thấy rất rõ chiếc nhẫn cưới và xương của bà Röntgen. Bức ảnh này đã tạo ra sự phấn khích rất lớn với công chúng và giới khoa học. Röntgen gọi tia này là tia "X" ngụ ý rằng nó là một dạng bức xạ chưa được biết đến. Cái tên này đã được sử dụng cho đến ngày nay mặc dù nhiều đồng nghiệp của ông đã gợi ý gọi nó là tia Röntgen. Mặc dù Röntgen phát hiện ra tia X vào năm 1895 nhưng cho đến tận năm 1912 các nhà khoa học mới có thể kết luận được rằng những tia này, thực ra, là một dạng khác của ánh sáng.

Những tia gamma với năng lượng cao hơn lần đầu tiên được quan sát vào năm 1900 bởi Paul Villard, nhà hoá học và vật lý người Pháp, khi ông nghiên cứu bức xạ từ nguyên tố Radi. Một vài năm sau đó, Ernest Rutherford đề xuất cách gọi những tia phóng xạ mới này là “tia gamma” và cái tên này đã được sử dụng cho đến ngày nay. Cũng giống như tia X, phải mất một thời gian dài các nhà khoa học mới tìm ra bản chất của tia gamma. Năm 1914, khi Rutherford thực hiện quan sát phản xạ của tia gamma trên bề mặt tinh thể, ông phát hiện ra rằng chúng thể hiện rất rõ ràng những tính chất giống như tia X. Điều đó chứng minh rằng tia gamma cũng là một dạng khác của ánh sáng nhưng với bước sóng ngắn hơn nhiều.

Ánh sáng gắn liền với sự phát triển của thiên văn học. Muốn tìm hiểu những vật thể thiên văn, để tiếp cận chúng một cách trực tiếp là việc hết sức khó khăn, thậm chí bất khả thi, do đó phần lớn những nghiên cứu thiên văn được thực hiện dựa trên việc thu nhận ánh sáng do vật thể đó phát ra. Trong thiên văn học ánh sáng được phát ra từ nhiều nguồn ở nhiều dải bước sóng khác nhau trên khắp phổ điện từ. Tuy nhiên, do sự hấp thụ của bầu khí quyển Trái đất, chỉ có ánh sáng khả kiến và sóng vô tuyến là có thể đi xuống mặt đất được. Để ghi nhận những sóng khác như tia X, cực tím hay phần lớn phổ hồng ngoại, chúng ta phải gửi thiết bị ra ngoài không gian.

Mỗi một phần của phổ điện từ phát ra bởi vật thể thiên văn cung cấp cho ta một phần thông tin về nó. Cũng như “thầy bói xem voi” để có thể có được hình ảnh đầy đủ nhất về vật thể càng nhiều hình ảnh ở các bước sóng khác nhau của vật thể được ghi nhận càng tốt. Ghi nhận ánh sáng đến từ những vật thể thiên văn xa xôi thực sự là một kỳ công, các kỹ thuật ghi nhận ánh sáng có năng lượng khác nhau là rất khác nhau. Mỗi một lớp đối tượng phát xạ mạnh

ở một vùng bước sóng xác định, do đó chúng ta có nhiều nhánh khác nhau của thiên văn học: thiên văn vô tuyến, thiên văn hồng ngoại, thiên văn khả kiến, thiên văn tia cực tím, thiên văn tia X, thiên văn tia gamma, thậm chí nó còn được chia thành các nhánh nhỏ hơn như thiên văn dưới milimét hay thiên văn hồng ngoại xa. Thông thường ánh sáng đến bề mặt Trái đất hay các đài quan sát không gian thường rất yếu do khoảng cách từ người quan sát đến chúng thường rất lớn. Vì vậy chúng ta thường phải xây dựng những hệ kính lớn, làm lạnh đầu dò đến nhiệt độ thấp để có thể thu được nhiều ánh sáng hơn, làm giảm thiểu nhiễu và để có thể phân biệt được những chi tiết, phát hiện được tín hiệu yếu phát ra từ vật thể thiên văn.

Một hệ ghi nhận ánh sáng quen thuộc nhất với chúng ta là mắt, cùng với các giác quan khác mắt giúp con người tri nhận thế giới xung quanh. Ánh sáng phản xạ hay truyền qua đối tượng được mắt ghi nhận và chuyển thành các xung thần kinh, kích hoạt cảm nhận màu trong não bộ. Sở dĩ con người có thể nhìn thấy được các vật thể xung quanh do trên võng mạc của mắt có rất nhiều tế bào nhạy sáng. Có hai loại tế bào: tế bào hình que và tế bào hình nón. Tế bào hình que có chức năng phân biệt sáng tối trong khi tế bào hình nón ghi nhận màu sắc. Có 3 loại tế bào hình nón, mỗi loại nhạy với ánh sáng màu xanh da trời, xanh lá cây và đỏ. Do đó, con người có thể nhận biết được màu sắc rực rỡ của thế giới nhờ sự kết hợp của những màu cơ bản này.

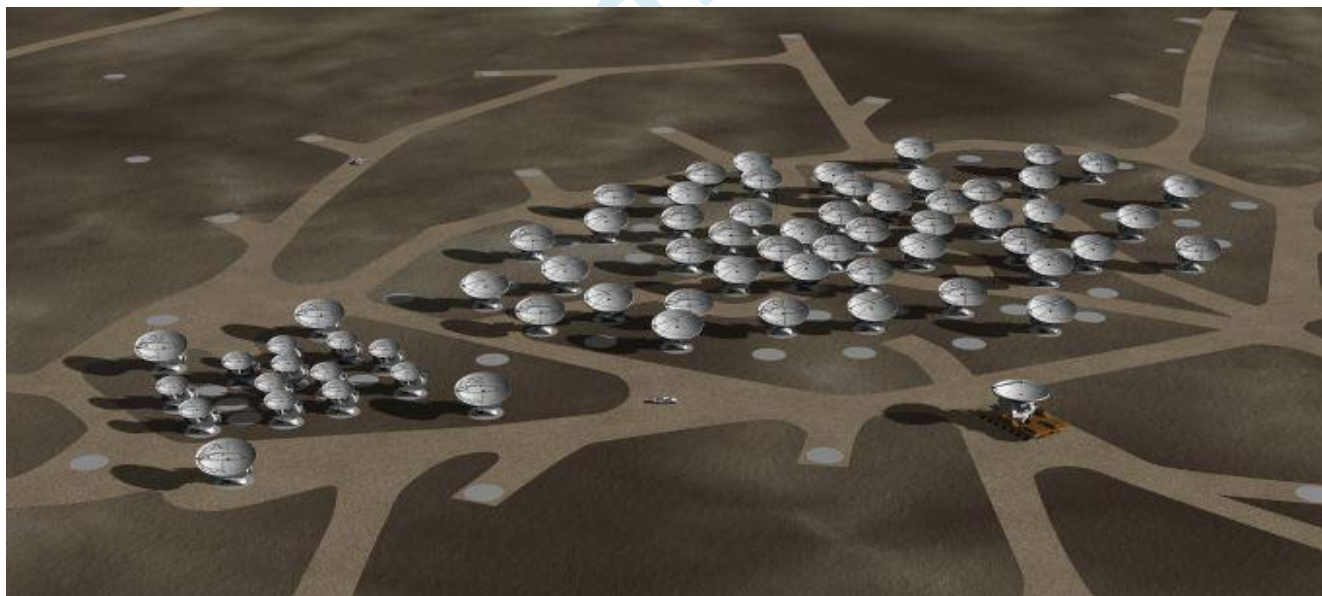
Cấu tạo của các hệ ghi đo ánh sáng ở các bước sóng khác về cơ bản cũng gồm ba phần như vậy: gương hay chảo tương đương với con người mắt có chức năng thu nhận, hội tụ ánh sáng đến đầu dò; đầu dò có chức năng như võng mạc chuyển đổi sóng ánh sáng thành những tín hiệu tương tự (như tín hiệu điện) có thể ghi đo được;

và cuối cùng hình ảnh được trình diễn trên máy tính hay các thiết bị đầu ra khác. Đầu dò có thể là những ăng-ten, cảm biến CCD, ống nhân quang điện, cảm biến bán dẫn,...

Cũng cần chú ý rằng, ngoài việc nghiên cứu thiên văn và vũ trụ nhờ sóng ánh sáng ta còn có những phương tiện khác như các hạt (tia vũ trụ, neutrino) hay sóng khác như sóng hấp dẫn.

Thiên văn học là một trong những ngành khoa học lâu đời nhất nhưng với sự phát triển gần đây của công nghệ, nó lại là một trong những ngành khoa học phát triển năng động nhất. Những câu hỏi hóc búa nhất của vật lý hiện nay nằm trong thiên văn học (năng lượng tối, vật chất tối, lạm phát vũ trụ,...). Trong hơn nửa thế kỷ qua đã có 17 nhà khoa học đoạt giải thưởng Nobel trong lĩnh vực thiên văn học, trung bình cứ mỗi thập kỷ lại có 3 nhà vật lý thiên văn được trao giải. Số người gia nhập hoặc chuyển sang làm nghiên cứu thiên văn đang có xu hướng tăng lên. Một con số thống kê trong giai đoạn 2012-

2016 của Hội Vật lý Mỹ cho thấy, số lượng thành viên trong lĩnh vực thiên văn học của Hội có tốc độ tăng nhanh nhất trong các ngành, 15% so với mức tăng trung bình của các tất cả các ngành. Nhiều dự án thiên văn mới đang được xây dựng với mức kinh phí đầu tư lớn. Nhiều hợp tác quốc tế xuyên kinh độ, vĩ độ đang được thiết lập trên toàn thế giới. Thiên văn thu hút giới trẻ và công chúng hướng đến khoa học và công nghệ. Bản thân nó cũng trực tiếp thúc đẩy sự phát triển của khoa học, công nghệ và giáo dục. Hơn nữa, hiện nay, các nhà thiên văn học từ khắp nơi trên thế giới có cơ hội thực hiện những nghiên cứu tiên phong của khoa học khi được tiếp cận tới những số liệu hiện đại nhất được ghi nhận bởi nhiều Đài thiên văn lớn nhờ chính sách mở số liệu của họ tới cộng đồng, điển hình trong đó là Đài thiên văn ALMA (xem hình). Đây là cơ hội lớn cho Việt Nam, cho những nhà nghiên cứu thiên văn ở Việt Nam để phát triển nghiên cứu và giảng dạy ngành này trong nước.



Hình vẽ minh họa hệ 66 kính của Đài thiên văn ALMA đặt trên cao nguyên Atacama, Chile ở độ cao 5500 mét trên mực nước biển. Được vận hành bởi nhiều nước Châu Âu (là thành viên của Đài thiên văn Nam Âu), Mỹ, Canada, Nhật Bản, Đài Loan, Hàn Quốc và Chile, với mức đầu tư 1,3 tỉ đô la, đầu dò của các kính được giữ ở nhiệt độ 4oK, độ chính xác bề mặt kính khoảng 20 micromét... ALMA là hệ kính hiện đại nhất trên thế giới hiện nay hoạt động ở dải bước sóng milimét và dưới milimét.



Tiết kiệm nguyên liệu

Pi đi học về, thấy bố đang loay hoay đo đạc ngoài sân.

- Bố làm gì đấy?

- À, bên Trung tâm thí nghiệm đặt hàng cho bố đóng 100 cái thùng hình hộp chữ nhật để đựng khí. Không quy định số đo các chiều, chỉ cần mỗi thùng có dung tích đúng 1m^3 là được. Họ đưa hai loại hợp kim, loại 1 giá 100.000 đồng một mét vuông, loại 2 có giá 800.000 đồng một mét vuông. Yêu cầu chỉ là bốn mặt của thùng làm bằng hợp kim loại 1, hai mặt còn lại bằng hợp kim loại 2, không nhất thiết mặt nào trong 6 mặt là loại 1 hay loại 2.



Minh họa: Tuấn Linh

- Vậy bố định đóng thế nào?

- Thì đơn giản thôi, cứ đóng thành hình lập phương mỗi chiều 1 mét, hai mặt nào đó dùng hợp kim loại 2 là được!

- Bố làm thế thì lỗ rồi. Con thiết kế cho bố kiểu này, sẽ tiết kiệm nhiều đấy! Giá thành mỗi thùng chỉ bằng hơn một nửa giá thành của thùng làm theo cách của bố thôi!

Bạn có thể thiết kế thùng để tiết kiệm được như Pi không?

Tìm bạn đời

(Phan Thanh Hồng và Nguyễn Thị Nhung sưu tầm. Ông Chủ quán đóng gói lại)

Có chàng trai đến gần ngày cưới thì lưỡng lự (nhiều chàng như thế lắm!), tự hỏi không biết mình đã “tìm hiểu” kỹ chưa, biết đâu trên đời này vẫn còn những cô gái hợp với mình hơn? Anh ta tìm đến Pi, nhà thông thái, để hỏi.

Pi khuyên anh chàng:

“Anh hãy đến chỗ nhà người yêu anh đang ở bây giờ, rồi đi 10 km về phía Nam; quay người, đi 10 km về phía Đông; lại quay người, đi tiếp 10 km về phía Bắc. Người con gái anh gặp cuối cuộc hành trình sẽ là người con gái hợp nhất với anh”.



Minh họa: Tuấn Linh

Anh chàng nghe lời bước đi, còn Pi tủm cười, vì biết anh ta sẽ gặp chính người bạn của mình đang đứng chỗ cũ đợi anh ta!

Pi biết như thế nhờ quan sát vị trí ngôi nhà của người yêu anh chàng nọ.

Bạn đoán ra ngay là người yêu anh ta đang ở Cực Bắc Trái đất chứ?

Đúng rồi đấy, nhưng cô nàng còn có thể ở rất nhiều nơi khác nữa mà vẫn yên tâm đợi chàng trai, chứ ở đúng điểm Cực Bắc thì rét quá!

Đó là những nơi nào khác trên Trái đất vậy nhỉ?

Đặc biệt, nếu bạn gái anh chàng đó lại ở đúng toà soạn của Pi (Thư viện Tạ Quang Bửu, ĐHBK Hà Nội) thì chắc Pi phải khuyên anh chàng hành trình tương tự, nhưng mỗi đoạn của hành trình dài hơn 10 km rất nhiều. Tính được chính xác độ dài của mỗi đoạn là bài toán khó đấy, bạn thử xem.

Áp dụng (sai) thống kê trong y học

1. Có người ốm nặng, tìm đến thầy thuốc. Khám xong, ông thầy tươi cười bảo:

- Bệnh này nặng lắm, 10 người mắc thì có đến 9 người chết!

Rồi tiếp:

- Nhưng anh may đấy, tôi vừa chữa 9 người, chết cả rồi! Anh là thứ 10.



Minh họa: Linh Rab

2. Ông lão ốm nặng, sai con đi tìm thầy thuốc. Dặn:

- Con nhớ tìm thầy giỏi. Cứ ông nào mà trước cửa ít oan hồn đòi mạng thì mời.

Anh con trai tìm cả ngày mà không được, trước cửa nhà thầy thuốc nào cũng đông đặc oan hồn chen nhau kêu la đòi mạng. May gần tối tìm được một ông thầy, mà trước cửa chỉ có hai oan hồn đang kêu khóc. Mừng quá, mời thầy về. Gần đến nhà, hỏi:

- Sao thầy giỏi thế? Trước cửa nhà các thầy khác rất nhiều oan hồn đòi mạng, mà trước cửa nhà thầy chỉ có hai?

- À, từ khi hành nghề, tôi cũng mới chữa được cho hai bệnh nhân thôi!

Pi trả nhuận bút

Chất lượng một bài viết về Toán học không phải bao giờ cũng tỷ lệ thuận với độ dài bài viết. Trên quan điểm đó, và dựa vào nguồn tài chính hạn hẹp của mình, Pi sẽ trả nhuận bút như sau:

Lấy đơn vị $\pi = 314.159$ đồng (bằng chữ: Ba trăm mười bốn ngàn một trăm năm mươi chín đồng).

1/ Bài ra (kèm lời giải) cho mục Thách thức Toán học: 1π . (Nếu là “sưu tầm” thì chỉ biểu báo!).

2/ Chấm bài, nhận xét: $2\pi/3$.

3/ Bài viết: trang thứ k được nhuận bút π/k . Tức là nếu bài viết của bạn dài một trang thì nhuận bút là 1π , nếu dài hai trang thì nhuận bút là $(1+1/2)\pi = 1,5\pi, \dots$, nếu n trang thì tiền nhuận bút sẽ là: $(1+1/2+\dots+1/n)\pi$.

Một lưu ý nhỏ: Chuỗi $1+1/2+\dots+1/n\dots$ là chuỗi phân kỳ, tức là tổng có thể lớn hơn bất kỳ số nào cho trước khi số n đủ lớn! Vì vậy tác giả của Pi vẫn có cơ hội trở thành người giàu nhất thế giới!

Sau khi Pi công bố phương án chi trả nhuận bút như trên, Giáo sư Đàm Thanh Sơn (Đại học Chicago) đặt câu hỏi: “Nếu bạn Tèo viết bài dài nửa trang, được đăng trong Tạp chí Pi, thì nhuận bút sẽ là bao nhiêu?”

Thành thật mà nói thì Pi rất bí! Bài dài nửa trang mà được đăng thì phải có chất lượng tốt. Nhưng trả như bài 1 trang thì lại không đúng quy định.

May sao, Giáo sư Đàm Thanh Sơn là nhà Vật lý, nên chính ông lại cho Pi một giải pháp cực kỳ độc đáo và hợp lý, mà không đến nỗi làm cho Pi tổn kém quá! Giải pháp do Giáo sư Sơn đề nghị như sau:

Đặt $H_n = 1+1/2+\dots+1/n$. Ta biết

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1} dx,$$

do đó

$$H_n = \int_0^1 (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$$

Ta xem công thức tính nhuận bút của Pi áp dụng cho cả số trang là hữu tỷ. Bài của bạn Tèo có $n = 1/2$ trang, như vậy nhuận bút của bạn là $H_{1/2}\pi$. Trước hết cần tính

$$H_{1/2} = \int_0^1 \frac{1-x^{1/2}}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

Để tính tích phân cuối, cùng ta có phép đổi biến $x = u^2 - 1$. Kết quả cuối cùng là

$$H_{1/2} = 2(1 - \ln(2)) \approx 0.6137.$$

Như vậy, nhuận bút mà bạn Tèo nhận được là 192.799 đồng (bằng chữ: một trăm chín mươi hai ngàn bảy trăm chín mươi chín đồng).

Giải đáp bài “Pi đi mua đất”

(Đề ra: xem Tạp chí Pi số 1 tập 1 năm 2017)

Giả sử chiều dài, chiều rộng của mảnh đất bé là x, y , của mảnh đất lớn (mảnh đất đang “đàm phán”) là z, u . Do các cây cau được trồng cách đều nhau, khoảng cách giữa hai cây cau liền nhau ở hai mảnh đất là như nhau và số cây cau trồng ở chu vi hai mảnh đất là như nhau nên ta có $x+y = z+u$. Mặt khác, theo lời ông chủ đất, ta có $2xy = zu$. Như vậy, ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y = z+u & (1) \\ 2xy = zu & (2) \end{cases}$$

Bình phương hai vế của (1), nhân hai vế của (2) với 4, rồi trừ từng vế hai đẳng thức nhận được, ta có:

$$x^2 - 6xy + y^2 = (z - u)^2.$$

Suy ra:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 1 = \left(\frac{z - u}{y}\right)^2. \quad (3)$$

Do đó $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 1 \geq 0.$ Từ đó, với lưu

ý $x \geq y$, suy ra $\frac{x}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}.$

Do các cây cau được trồng cách đều nhau

nên tỉ số $\frac{x}{y}$ chính bằng tỉ số giữa số cây trồng ở chiều dài và số cây trồng ở chiều rộng của mảnh đất bé. Vì thế, khi đếm số cây trên hai cạnh của mảnh đất bé, ông khách phát hiện ra rằng

$$\frac{x}{y} = 5 < 3 + 2\sqrt{2}.$$

Vì thế, diện tích mảnh đất bé không thể bằng một nửa diện tích mảnh đất lớn. Hơn nữa, ta biết rằng, khi tổng $x + y$ là hằng số

thì tích xy càng lớn nếu tỉ số $\frac{x}{y}$ giữa số lớn và số bé càng nhỏ. Từ đó suy ra, diện tích mảnh đất bé phải lớn hơn một nửa diện tích mảnh đất lớn.

Tất nhiên, để chứng minh diện tích mảnh đất lớn chưa bằng hai lần diện tích mảnh đất bé, ta có thể làm đơn giản hơn nhiều, như nhiều bạn đọc đã làm và gửi lời giải tới Tòa soạn. Lời giải trên đây nhằm mục đích tiến xa hơn: trả lời cho câu hỏi thứ ba.

Như đã nêu trên, tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng tỉ số giữa hai số nguyên dương nên nó không thể là $3 + 2\sqrt{2}.$

Vì thế anh chàng mua đất mới khẳng định là ngay cả khi mảnh đất bé có diện tích bằng đúng một nửa diện tích mảnh đất lớn, ông chủ đất cũng không thể nào trồng cây để đạt tỷ lệ tối thiểu mà anh ta đã tìm ra.

Khẳng định tiếp theo của anh chàng mua đất không thật chính xác, vì trong trường hợp này, ta phải coi hai mảnh đất của ông chủ đất là cố định. Ông Chủ quán thành thật xin lỗi vì đã quá tin anh chàng nọ. Tuy nhiên, có thể chứng minh rằng, luôn tồn tại hai mảnh đất hình chữ nhật (có thể là của ông chủ khác!) mà trên đó có thể trồng cây như mô tả trong bài, mảnh này có diện tích gấp đôi mảnh kia, và tỷ số giữa số cây được trồng trên chiều dài và trên chiều rộng của mảnh đất bé có thể gần $3 + 2\sqrt{2}$ bao nhiêu tùy ý.

Thật vậy, coi hệ (1) - (2) nêu trên là hệ phương trình nghiệm nguyên dương, với các ẩn là x, y, z, u . Khi đó, về mặt Toán học, điều vừa nói trên tương đương với khẳng định rằng tồn tại nghiệm nguyên dương (x, y, z, u) của hệ phương trình đó, mà $x \geq y$ và

tỷ số $\frac{x}{y}$ gần $3 + 2\sqrt{2}$ bao nhiêu tùy ý.

Từ (3) suy ra, khẳng định vừa nêu trên tương đương với việc tồn tại các nghiệm nguyên dương (x, y, z, u) của hệ (1) - (2)

sao cho $x \geq y$ và tỷ số $\frac{|z - u|}{y}$ nhỏ tùy ý.

Trong hệ phương trình nghiệm nguyên dương (1) - (2), có thể xem x, y, z, u đôi một nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, giả sử (x, y, z, u) là một nghiệm của hệ phương trình đó và p là một ước nguyên tố của x, y . Từ hệ phương trình dễ dàng suy ra p là ước chung của x, y, z, u . Do đó $\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}, \frac{u}{p}\right)$ cũng là một nghiệm nguyên dương của hệ phương trình nói trên.

Bình phương hai vế của phương trình (1), nhân hai vế của phương trình (2) với 2, rồi trừ từng vế hai phương trình nhận được, ta được phương trình $(x - y)^2 = z^2 + u^2$.

Từ đó, do x, y, z, u đôi một nguyên tố cùng nhau nên $z, u, x - y$ lập thành một bộ số Pythagore nguyên thủy. Có thể giả thiết rằng u chẵn; khi đó, tồn tại các số nguyên dương a, b , với $a > b$, sao cho:

$$z = a^2 - b^2, u = 2ab \text{ và } x - y = a^2 + b^2. \quad (4)$$

Kết hợp với phương trình (1), ta được:

$$x = a^2 + ab \text{ và } y = ab - b^2.$$

Từ (4), ta có

$$z - u = a^2 - b^2 - 2ab = (a - b)^2 - 2b^2.$$

Từ (3) suy ra, nếu $z = u$ và x, y là các số

$$\frac{x}{y} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

thực thì y Trong trường hợp này, tất nhiên, ông chủ đất có thể “xấp xỉ” tùy ý, với giả thiết “xa thực tế” là các cây cau có thể “nhỏ tùy ý”.

Xét những mảnh đất mà $z - u = 1$. Từ công thức xác định y ta thấy, vấn đề còn lại chỉ là chứng minh có vô hạn cặp số nguyên dương (a, b) , với $a > b$, thỏa mãn hệ thức

$$(a - b)^2 - 2b^2 = 1 \quad (5)$$

(vì khi đó luôn chọn được cặp số nguyên dương (a, b) , với $a > b$, sao cho $z - u = 1$ và $y = ab - b^2$ lớn tùy ý).

Xét phương trình Pell:

$$t^2 - 2v^2 = 1. \quad (6)$$

Dễ thấy, tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) xác định bởi

$$a = t + v \text{ và } b = v,$$

với (t, v) là nghiệm nguyên dương của (6), sẽ thỏa mãn (5) và $a > b$.



Minh họa: Linh Rab

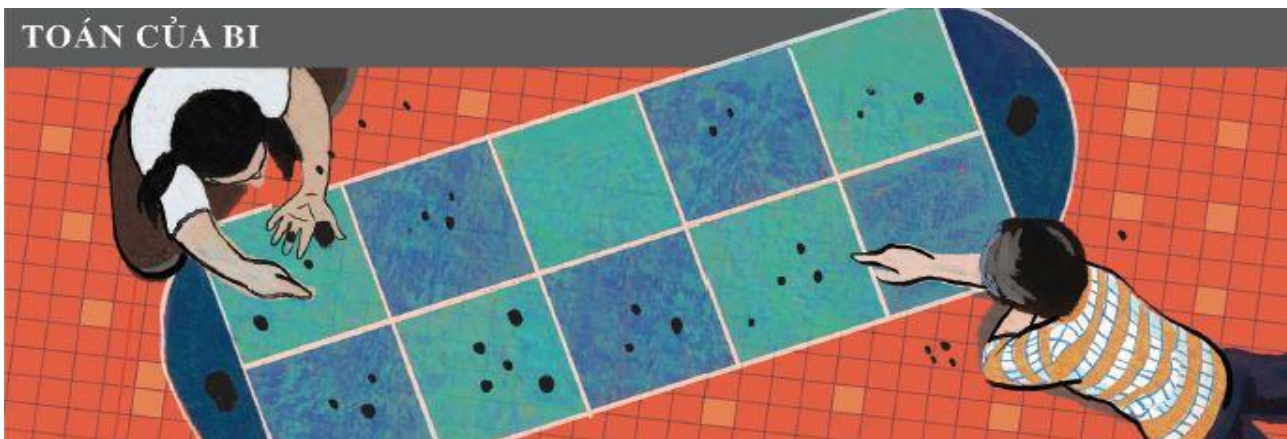
Mà ta biết rằng tồn tại vô hạn cặp số nguyên dương (t, v) là nghiệm của (6) nên suy ra tồn tại vô hạn cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn (5) và $a > b$.

Như vậy, bằng cách chọn $y = ab - b^2$ đủ lớn (và x, z, u được xác định theo a, b bởi các công thức nêu trên), với (a, b) là cặp số nguyên dương thỏa mãn (5) và $a > b$, ta sẽ được hai mảnh đất thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý: Trên đây, để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp $z - u = 1$. Trường hợp $z - u$ là số nguyên dương tùy ý, kết luận về việc tồn tại nghiệm nguyên dương (x, y, z, u) của hệ phương trình (1) - (2) sao cho tỉ số $\frac{x}{y}$ xấp xỉ tùy ý $3 + 2\sqrt{2}$ vẫn còn đúng (bạn hãy kiểm tra!).

Hãy giữ cho mình quyền suy nghĩ, bởi vì ngay cả khi nghĩ sai vẫn tốt hơn rất nhiều so với không nghĩ gì cả.

Hypatia thành Alexandria

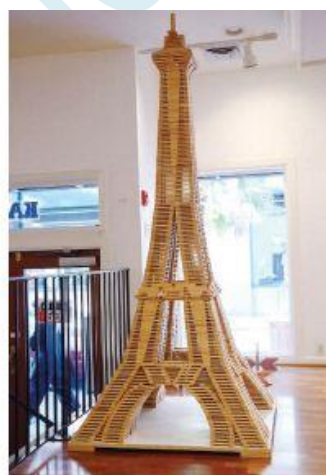
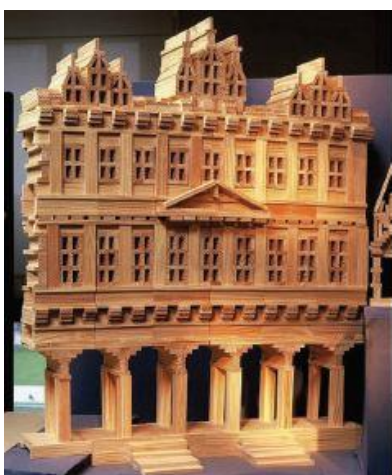


XẾP NHỮNG HÌNH KÌ DIỆU

Lưu Thanh Hà

Ở số trước, bạn đọc đã được biết đến những thanh gỗ KAPLA đầy thú vị. Bạn đọc cũng được thử thách với những khối hình “mong manh” và chắc là các bạn cũng đã tìm ra bí quyết cho mình rồi chứ?

Trong số này, với số lượng thanh gỗ KAPLA lên đến hàng trăm, thậm chí hàng nghìn thanh thì điều gì sẽ xảy ra? Mời các bạn xem một số hình ảnh sau:



Wow, quả là những công trình khổng lồ! Chắc các bạn không quên hình ảnh Cột cờ Hà Nội ở số trước? Công trình này “ngốn” mất 7000 thanh gỗ. Mô hình tòa nhà Alpha (Đại học FPT) còn đồ sộ hơn, khi phải sử dụng tới 10000 thanh gỗ (cùng một số khung đỡ tối thiểu). Và nhiều bạn chắc rất ngạc nhiên, khi thấy tháp Eiffel cũng có thể dựng được bằng những thanh gỗ KAPLA?

Câu hỏi đặt ra: Những công trình này đã được tạo ra như thế nào, khi mà ngoài những thanh gỗ xếp lên nhau thì chẳng còn gì khác? Để trả lời câu hỏi này, bạn đọc hãy quan sát một công trình được xếp từ 210 thanh gỗ dưới đây:



Các bạn đã nhìn thấy những gì? Một đài quan sát? Một tòa tháp đôi?

Khoan nghĩ đến chuyện đó mà hãy nhìn vào chiếc cầu (ở tầng 1) nối hai tòa tháp. Chúng không có chân để đỡ ngoài 2 trụ đầu cầu, hoàn toàn chỉ là các thanh gỗ chồng lên nhau, “nuơng” vào nhau để giữ được cân bằng. Điều gì đã xảy ra, xin mời các bạn quan sát toàn bộ công trình từ lúc bắt đầu được dựng:



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Quan sát hình 1, ta thấy ngay từ khi đặt 2 thanh gỗ đầu tiên lên cột trụ, trọng tâm của mỗi thanh đã rơi ra ngoài mặt cột trụ hoặc nếu đặt độ chính xác cực cao thì trọng tâm rơi trên cạnh của mặt cột trụ. Điều này làm mất cân bằng của thanh gỗ. Và để “kéo” trọng tâm trở lại, một thanh gỗ thứ ba đã được đặt lên trên và “chia” đều cho 2 thanh.

Ở hình 2, thanh gỗ thứ tư được đặt sang phải thanh thứ ba. Tương tự, ta lại đặt các thanh gỗ lên phía trên, bên trái để “kéo” trọng tâm trở lại; nhưng không phải 1, mà là 3 thanh.

Vì sao thế? Ta biết rằng trọng lực tác dụng lên vật tỉ lệ thuận với khối lượng của vật. Ở đây, thanh thứ 4 chủ yếu chịu tác động của trọng lực và một phần nhỏ phản lực từ thanh gỗ phía dưới. Do đó, nó có xu hướng rơi xuống theo chiều của trọng lực. Vì thế, để lấy lại cân bằng cho cả khối, ta cần dùng một lực ngược hướng đủ lớn. Số thanh gỗ cần dùng là 3 là vì vậy.

Tương tự như vậy, các thanh gỗ càng đặt xa cột trụ ta càng phải tăng số lượng thanh gỗ đặt về phía ngược lại để giữ được cân bằng. Các bạn để ý, khi xây tiếp hai tòa tháp lên hai cột trụ, khối lượng đã được gia tăng đủ lớn, cầu nối đã chịu được một lớp các thanh gỗ phía trên mà không mất cân bằng.

Một ý tưởng mới đặt ra: Tiếp tục xây một chiếc cầu nữa nhưng diện tích tiếp xúc giữa các thanh chỉ bằng bề dày của mỗi thanh gỗ (Hình 4). Như vậy, khả năng mất cân bằng của chiếc cầu sẽ tăng lên rất lớn. Thực hiện ý tưởng tương tự, mỗi tòa tháp đã được đặt một “mái nhà” gồm 15 thanh gỗ để đảm bảo sự cân bằng khi đặt các thanh gỗ lên cầu. Dĩ nhiên, đến đây không chỉ còn là sự tính toán mà còn là sự tập trung, chính xác, tỉ mỉ, vì cầu xây từ hai bên có thể bị lệch nhau.

Thử thách dành cho bạn đọc

Các bạn có từng mơ ước xây dựng được những công trình của riêng mình, như tác giả của KAPLA – Tom van der Bruggen? Vậy hãy thử “tập sự” với các thanh gỗ KAPLA nhé! Có một gợi ý về thành phố KAPLA ở phía dưới đây!



Biệt thự (1200 thanh)



Trụ sở thành phố (1500 thanh)



Nhà 2 tầng (400 thanh)



Nhà văn hóa thanh niên (550 thanh)



Trường học (250 thanh)



Tháp truyền hình (150 thanh)



Chùa (200 thanh)



Tàu hỏa (100 thanh)



Ô tô (210 thanh)

Một vài góc nhìn về KAPLA

Hẳn bạn đọc nào cũng thấy được các giá trị từ KAPLA, như khuyến khích tư duy logic, phát triển nhận thức về không gian, tăng cường nhận thức về hình dạng, khối lượng, sự cân bằng, kích thích khả năng sáng tạo không giới hạn, kỹ năng tinh xảo, sự tập trung, kiên trì, kiên nhẫn. Nhưng liệu bạn có nghĩ đến những góc nhìn nào khác không? Dưới đây là một số góc nhìn độc đáo mà tác giả ghi nhận được:

1. Cân bằng: Trạng thái cần thiết, luôn phải kiếm tìm của cuộc sống.

2. Cân bằng: Nghe tĩnh mà thấy động.
3. Các thanh gỗ tương đồng chỉ là những thanh gỗ giống nhau, nhưng nếu nung vào nhau ở trạng thái cân bằng sẽ tạo ra những điều tuyệt vời. Con người cũng vậy! Thế mới biết, KAPLA là một trò chơi nhiều thử thách, nhưng cũng tràn đầy thú vị, ý nghĩa! Còn bạn, bạn nghĩ gì?

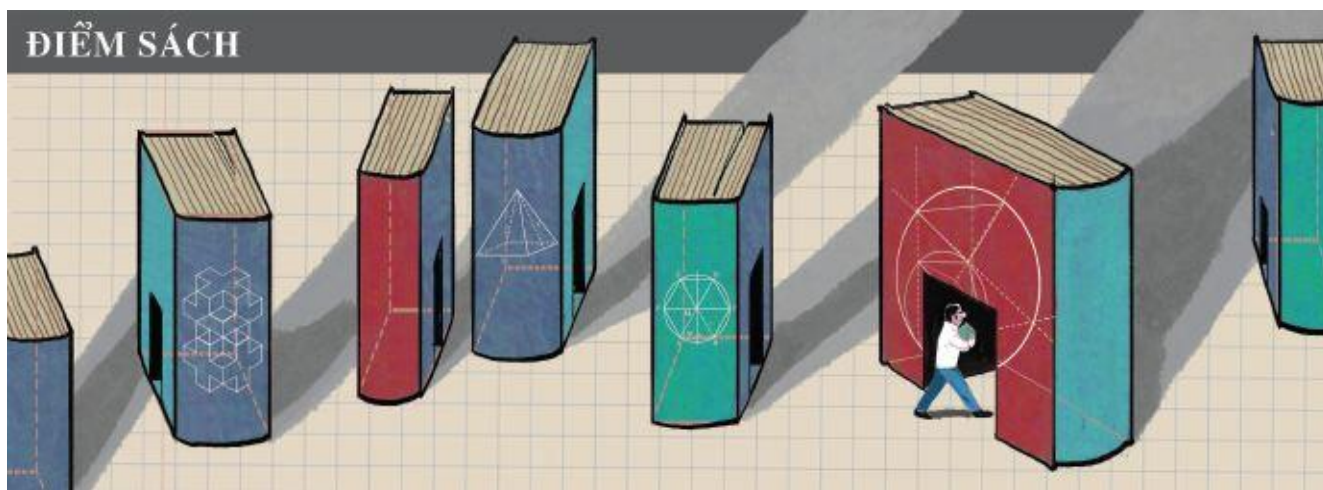
CHIA BÁNH CHƯNG

Anh Tuấn

Các bạn Hạ, Thu, Đông, Mai, Trúc đến chơi nhà bạn Xuân, nhân ngày Tết. Xuân mang bánh chưng ra mời các bạn (ngày Tết thì chẳng thể thiếu bánh chưng được mà!). Trúc xung phong bóc bánh. Khi Trúc đang loay hoay đặt lạt cắt bánh theo kiểu truyền thống thì Xuân nói: “Chúng ta chỉ có 6 người, chia bánh làm 8 thì không thích lắm, liệu có cách nào chia được bánh thành 6 miếng, đảm bảo cả phần vỏ và phần nhân của 6 miếng đều bằng nhau không nhỉ?”. Cả 6 bạn cùng “nhăn trán” và rồi... gọi điện thoại nhờ Pi trợ giúp. Các fan của Pi hãy giúp Pi với nào!

(Ta qui ước coi cả chiếc bánh và phần nhân bánh là những hình vuông có cùng tâm và có các cạnh song song; đồng thời, cả phần vỏ và phần nhân bánh được gói đều nhau, các bạn nhé.)





TÌNH YÊU VÀ TOÁN HỌC

Ngô Bảo Châu

Tôi gặp Edward Frenkel lần đầu vào năm 1999 khi anh đến Paris báo cáo trong hội thảo thường niên của Bourbaki. Tuy chỉ hơn tôi bốn tuổi nhưng vào thời điểm đó, khi tôi còn chập chững bước vào nghề, thì anh đã có ghế giáo sư đại học Berkeley và là một ngôi sao đang lên trong bầu trời toán học. Phiên báo cáo của anh gây ấn tượng khó quên. Anh trình bày về một vấn đề hóc búa, rất trừu tượng với một vẻ dễ dàng, thanh thoi. Anh có một phong cách rất lạ so với các nhà toán học khác, và có gì đó hao hao giống một tài tử điện ảnh.

Khoảng mười năm sau, tôi có dịp cộng tác khoa học với Edward trong một thời gian khá dài. Làm việc cùng nhau, tôi nhận ra ở anh nhiều năng khiếu trong đó có khả năng nắm bắt vấn đề rất nhanh để rồi phát biểu và diễn giải nó một cách vô cùng trong sáng và lịch lãm. Năng khiếu đó được Edward vận dụng trong quyển sách mà quý độc giả đang cầm trên tay để giải thích những khái niệm hóc búa của toán

học và vật lý thuyết bằng ngôn ngữ mà trên nguyên tắc ai cũng có thể hiểu được.

Viết về toán học cho công chúng hàm chứa nhiều rủi ro. Bạn luôn đi giữa hai bờ vực, một bên là ngôn ngữ hàn lâm có tính chất đánh đố với độc giả phổ thông, một bên là ngôn ngữ đời thường, đôi khi dễ dãi, làm bạn trượt chân rơi vào vực thẳm của sự thiếu chính xác, của sự tối nghĩa. Tác giả Edward Frenkel dường như đã tìm được sợi dây mỏng tang giữa hai vực thẳm rồi bước trên sợi dây đẩy những bước chân thanh thoi, giống như ta tản bộ mỗi sáng.

Một số người làm toán chuyên nghiệp, trong đó có tôi, chưa thực sự mãn nguyện khi đọc cuốn sách này. Khi nói về chương trình Langlands, tác giả dường như né tránh bằng cách giữ im lặng những gì sâu sắc nhất. Nhưng sẽ không công bằng khi độc giả cứ mong muốn tác giả phải diễn đạt những ý tưởng toán học sâu sắc nhất bằng ngôn ngữ đời thường, một việc rất có thể là bất khả.

Rất may mắn, chương trình Langlands và vật lý lý thuyết chỉ là món dessert cho cuốn sách này. Món chính cũng chính là tên cuốn sách “Tình yêu và toán học”; mà nếu chúng ta bỏ chữ “và” đi thì sẽ đúng nghĩa hơn. Tác giả đã thuật lại câu chuyện tình yêu của mình với toán học, từ lúc là một cậu bé sống trong một thành phố nhỏ của Liên bang Xô Viết, được tiếp nhận vào môi trường toán học sôi động ở Moscow, rồi cuối cùng là Harvard và Berkeley.

Đối với một người ở “ngoại vi” như tôi, môi trường toán học Xô Viết luôn là một bí mật đầy hấp dẫn. Phải chăng sự thiếu thốn vật chất và thông tin, không khí kỳ thị Do

Thái (mà tác giả dành nhiều trang sách để đề cập tới), chính là chất xúc tác trực tiếp hay gián tiếp làm cho toán học sinh trưởng. Liệu sự thiếu thốn vật chất, thông tin, và kỳ thị sắc tộc, có tạo nên một môi trường lý tưởng cho sự phát triển của toán học? Câu chuyện của tác giả, được thuật lại một cách chân thực, cho phép độc giả bước một chân vào phía sau bức màn bí mật ấy.

Cảm ơn các dịch giả Phạm Văn Thiều và Nguyễn Duy Khánh, và nhà sách Nhã Nam đã mang cuốn sách thú vị này tới tay các bạn đọc Việt Nam.



CUỘC THI TÔI & TOÁN HỌC

Để cùng nhau trao đổi nhẹ nhàng và ngắn gọn những suy nghĩ của bạn về Toán học, Tạp chí Pi mở cuộc thi “Tôi & Toán học”, với thể lệ như sau:

1. Nội dung: Viết về “Tôi & Toán học”: tại sao bạn yêu Toán, tại sao không yêu Toán, tại sao sợ Toán, Toán có ích gì cho bạn,....
2. Hình thức: bài viết không quá 700 chữ (khoảng 1 trang A4, cỡ chữ 12).
3. Bài gửi về: BBT@pi.edu.vn. Subject: Bài dự thi “Tôi & Toán học”.
4. Thời gian nhận bài: từ 14/3 đến 22/7, năm 2017 (lưu ý: 14/3 hàng năm được lấy làm “Pi day”, do viết là 3,14; còn 22/7 chính là giá trị gần đúng của số π đã được biết đến từ lâu).
5. Bài dự thi hợp lệ: tuân thủ đúng những quy định nêu trên (về độ dài, thời gian gửi, địa chỉ gửi, subject thư), có ghi rõ Tên người dự thi, địa chỉ liên hệ, nơi học tập, làm việc, năm sinh.
6. Bài viết có chất lượng sẽ được đăng trên Tạp chí Pi.
7. Giải thưởng: Chia thành 4 đối tượng:
 - Tiểu học
 - THCS
 - THPT
 - Khác

Trong mỗi đối tượng có:

- 01 giải nhất: mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 10 Pi tiền mặt
- 02 giải nhì, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 7 Pi tiền mặt
- 03 giải ba, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi + 3 Pi tiền mặt
- 10 giải khuyến khích, mỗi giải gồm 01 năm báo Pi.

Ghi chú: 1 Pi tiền mặt bằng 314.159 đồng.

Ban Giám khảo:

- Ngô Bảo Châu,
- Hà Huy Khoái,
- Nguyễn Ái Việt.

Nhà tài trợ: TH* True Milk.

Thể lệ gửi bài:

- Bài gửi đến Tạp chí qua email cần ghi rõ ở subject của email: lời giải của bài nào; dự định vào chuyên mục gì; hoặc không theo chuyên mục nào; bài toán đề xuất.
- Bản thảo đính kèm email cần ghi rõ họ tên tác giả, địa chỉ, e-mail và điện thoại để tiện liên hệ.
- Các bài toán đề xuất cần kèm theo lời giải và gợi ý trước về khối lớp. Bản dịch hay sưu tầm cần ghi rõ nguồn.
- Bản thảo gửi theo định dạng latex hoặc word, cùng với file định dạng pdf. Tạp chí chỉ nhận những bài chưa đăng trên báo trong và ngoài nước.

Địa chỉ gửi bài:

- Qua email: btt@pi.edu.vn
- Qua bưu điện đến:
Tòa soạn Tạp chí Pi
P705 - B8, tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu,
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội,
Số 1 Đại Cồ Việt, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.

Thể lệ đặt báo:

Bạn đọc quan tâm có thể đặt báo theo một trong các hình thức sau:

- Đặt tại tất cả các bưu cục trong cả nước. Mã của Tạp chí Pi là C057.
- Đặt tại website www.pi.edu.vn: chọn nút Đặt tạp chí hoặc Đọc trực tuyến và làm theo hướng dẫn.
- Đặt với Tòa soạn: gửi email đến địa chỉ info@pi.edu.vn với các nội dung:
 - Họ và tên, Địa chỉ, Điện thoại,
 - Số lượng kỳ đặt, Số lượng báo mỗi kỳ (25.000đ/cuốn).

Chuyển tiền vào tài khoản Tạp chí Pi, số tài khoản: 0851000012293, Ngân hàng Vietcombank chi nhánh Dịch vụ Khách hàng đặc biệt **(trong nội dung chuyển tiền ghi rõ họ tên người chuyển)**.

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (*Tổng Biên tập*)

Trần Nam Dũng (*Phó Tổng Biên tập*)

Nguyễn Thị Lê Hương (*Thư ký Tòa soạn*)

Nguyễn Khắc Minh (*Trưởng ban Biên tập*)

Ngô Bảo Châu, Phạm Huy Điển, Nguyễn Thành Nam, Trần Văn Nhung, Nguyễn Duy Thái Sơn, Chu Cẩm Thơ, Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn, Nguyễn Ái Việt, Lê Anh Vinh.

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hạ Vũ Anh, Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Ngọc Diệp, Lưu Thị Thanh Hà, Trần Minh Hiền, Phan Thanh Hồng, Trần Quang Hùng, Hà Duy Hưng, Đậu Hoàng Hưng, Nguyễn Văn Huyện, Vũ Thế Khôi, Nguyễn Duy Liên, Phạm Vũ Lộc, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh, Nguyễn Thị Nhung, Đặng Văn Sơn, Đỗ Hoàng Sơn, Lê Xuân Sơn, Lưu Bá Thắng, Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thu.

TÒA SOẠN

Tầng 7 Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Số 1, Đại Cồ Việt, P. Bách khoa, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội

Email gửi bài: bbt@pi.edu.vn. Giao dịch: info@pi.edu.vn

Điện thoại: 04. 3215.1407 Fax: 04.36231543

Website: www.pi.edu.vn

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016

In tại: Công ty Cổ phần In Hà Nội

Tạp chí ra hàng tháng

Giá: 25.000 đồng

Chế bản và trình bày:

Phạm Huy Điển, Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường

Ảnh bìa 1: Hypatia thành Alexandria

(*Nguồn: Internet*)



HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
Vietnam Mathematical Society

MYTS

TÌM KIẾM TÀI NĂNG TOÁN HỌC TRẺ

VÒNG THI THỨ NHẤT

26/03/2017

đặt tại các địa điểm

Hà Nội

HV Kỹ thuật Quân sự

Hải Phòng

THPT chuyên Trần Phú

Nghệ An

THPT chuyên Phan Bội Châu

Thanh Hóa

THPT chuyên Lam Sơn

Tp HCM

THCS Trần Đại Nghĩa

VÒNG THI THỨ HAI

09/04/2017

Hà Nội

Hồ Chí Minh



Mathematical Young Talent Search

Hexagon of Math & Science

www.vms.org.vn hoặc www.hexagon.edu.vn/myts.html

